Sistemi nel dominio del Tempo

Un sistema è un operatore che trasforma un segnale in un altro segnale

Dati gli insiemi di segnali X e Y, ogni operatore

$$T : x \in X \to y = T(x) \in Y$$

è un sistema

Nota
W → domande wooclap

Nota 1 È possibile ma non necessario che $X = Y$

Nota 2 È possibile ma non necessario che X, Y o entrambi sono spazi vettoriali

Nota 3 È possibile ma non necessario che X e Y sono entrambi insiemi di segnali t.d o t.c.

Esempio $X = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, $Y = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, $T[x] = E_x \cdot x$

Esempio $X = \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R})$, $Y = \mathcal{C}^{(0)}(\mathbb{R})$ $y = T[x] = \dot{x}$

Esempio $X \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$, $Y = \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ $T[x] =$ "x ritardato di t_0"

cioè $\forall t$, $y(t) = x(t - t_0)$

Esempio $X \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$, $Y \in C^{(0)}(\mathbb{R})$ $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$

Esempio Campionamento $X \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$, $Y \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ $y(n) = x(nT)$

È importante capire che i sistemi trasformano l'*intero* segnale d'ingresso nell'*intero* segnale d'uscita.

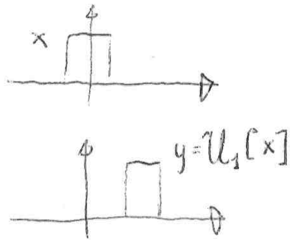
Quindi è fuorviante la notazione $T[x(t)]$ perché $x(t)$ è il valore del segnale x all'istante t.

Tuttavia, spesso è comodo definire il segnale y tramite i suoi valori istante per istante

Alcuni sistemi notevoli

1) Ritardo $\mathcal{U}_\beta$

$$\forall \beta \in \mathbb{R}, \quad y = \mathcal{U}_\beta[x] \iff \forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = x(t-\beta)$$



Esempio $\quad y = \mathcal{U}_1[\text{rect}] \iff y(t) = \text{rect}(t-1)$

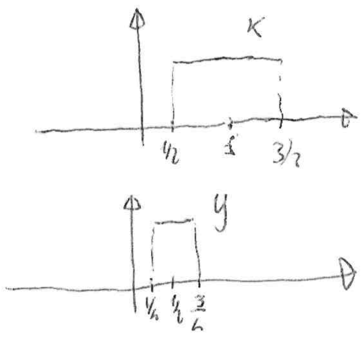
Nota x periodico di periodo $T \iff x = \mathcal{U}_T[x]$

2) Cambio scala $\mathcal{S}_\alpha$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_0, \quad y = \mathcal{S}_\alpha[x] \iff \forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = x(\alpha t)$$

Esempio $\quad x(t) = \text{rect}(t-1) \qquad y = \mathcal{S}_2(x)$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = x(2t) = \text{rect}(2t-1)$$
$$= \text{rect}\left(\frac{t-1/2}{1/2}\right)$$

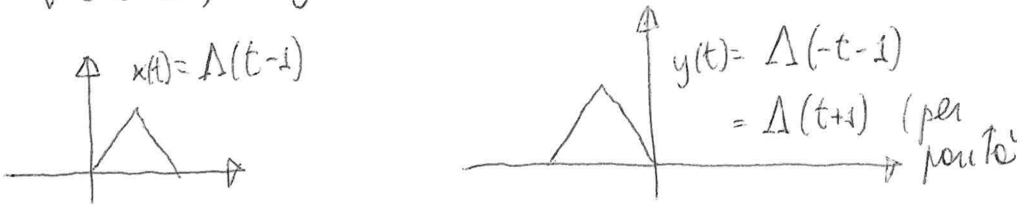


$|\alpha| > 1$ "compressione"

$0 < |\alpha| < 1$ "espansione"

3) Caso particolare: $\alpha = -1$: ribaltamento

$y = \mathcal{R}[x] \iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = x(-t)$



Per S_α, se $\alpha < 0$, c'è un ribaltamento e un cambio scala

4) Generalizzazione: Trasformazione affine del Tempo

$\forall \alpha \in \mathbb{R}_0, \beta \in \mathbb{R}, \quad y = A_{\alpha,\beta}[x] = S_\alpha[U_\beta[x]]$

$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = x(\alpha t - \beta)$

Si applica prima il ritardo e dopo il cambio scala

Notare che $y(t) = x(\alpha(t - \beta/\alpha)) = U_{\beta/\alpha}[S_\alpha[x]](t)$

W

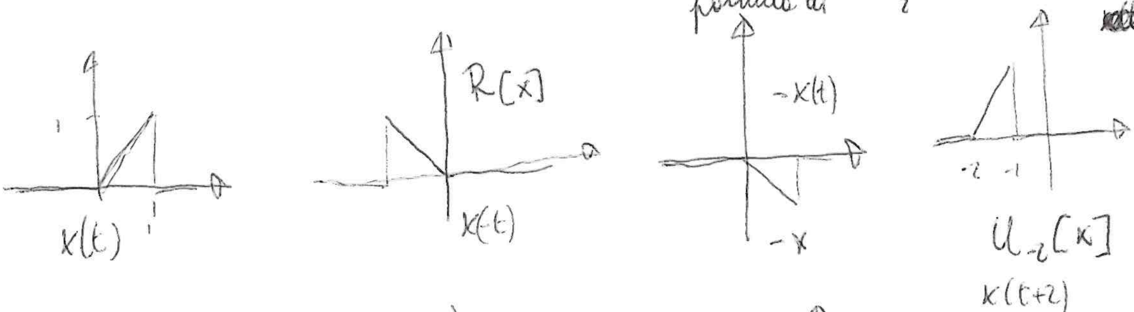
In altre parole $S_\alpha \circ U_\beta \neq U_\beta \circ S_\alpha$

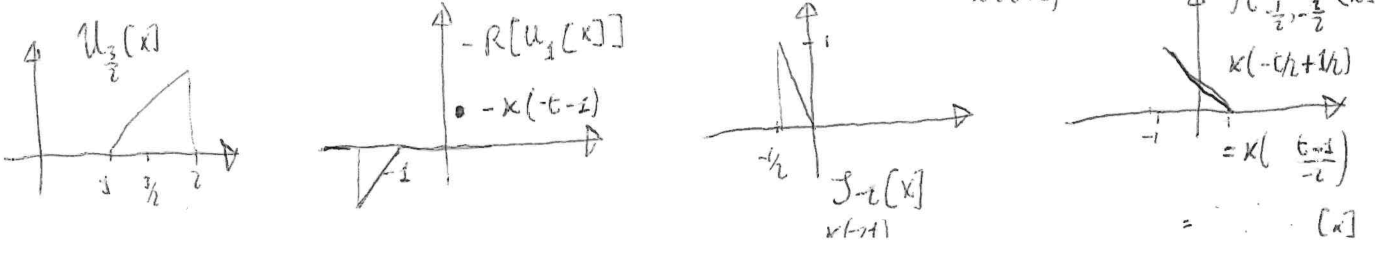
RJOLNA

ma $\boxed{S_\alpha \circ U_\beta = U_{\frac{\beta}{\alpha}} \circ S_\alpha}$

NB: $x\left(\frac{t-t_0}{T}\right) = S_{\frac{1}{T}} U_{\frac{t_0}{T}}[x] = \boxed{U_{t_0} S_{\frac{1}{T}}[x]}$

Esempi: Sia $x(t) = t \cdot \text{rect}(t - 1/2)$: disegnare $x(t)$, $\mathcal{R}(x)$, $-x$, $U_{-2}[x]$ e dare le formule di $U_{\frac{3}{2}}[x]$, $-\mathcal{R}[U_1[x]]$, $S_2[x]$, $\bullet A_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}[x]$





Trasformazioni affini del Tempo nel caso t.d.

Sia $\alpha \in \mathbb{Z}_0$, $\beta \in \mathbb{Z}$ $\quad y = A_{\alpha,\beta}[x] \iff \forall n,\ y(n) = x(\alpha n + \beta)$

Siccome $|\alpha| \geq 1$, non ci può essere espansione (come riempio i "vuoti"?) ma solo compressioni

In pratica, per il caso t.c., conviene passare da $x(\alpha t - \beta)$ a $x\left(\frac{t - t_0}{T}\right)$ con $T = \frac{1}{\alpha}$ $t_0 = \frac{\beta}{\alpha}$

Per Tracciare $x\left(\frac{t - t_0}{T}\right)$

1) Cambiamento di scala di $|T|$ e ribalto se $T < 0$
2) Centrare (traslare) in t_0

Proprietà dei sistemi

1) Sistema statico: il valore dell'uscita all'istante t non dipende da valori dell'ingresso diversi da quello all'istante t

Terminologia: $\boxed{\text{Statico = istantaneo}}$

Esempio

$$y(t) = \log\left[\,|\cos(x(t))| + 1\,\right]$$

$$y(t) = t \cdot x(t) + \cos(t)$$

$$y(t) = x(t)$$

$$y(t) = x^2(t) + x(t) + 1$$

$$y(n) = n^2 + 2n + 1 + x(n)$$

2) Sistema dinamico o con memoria: un qualsiasi sistema __non__ statico

__Esempi__

$$y(t) = x(t+1)$$

$$y(n) = \sum_{k=n-3}^{n} \frac{x(n)}{4}$$

$$y(t) = x'(t)$$

3) Sistema causale e anticausale

È un sotto caso di sistema dinamico; l'uscita all'istante t

3.1 causale: dipende dai valori dell'ingresso in istanti precedenti o coincidenti con t:

$\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t)$ dipende $^{\text{solo}}$ da $\{x(\tau)$ con $\tau \leq t\}$ e non dal futuro

3.2 Anticausale $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t)$ dipende $^{\text{solo}}$ da $\{x(\tau)$ con $\tau \geq t\}$

Nota: un sistema istantaneo è sia causale, sia anticausale (e viceversa)

3.3 Non causale $\exists t \in \mathbb{R}$: $y(t)$ dipende sia dal passato che dal futuro

Esempi

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \quad \text{causale}$$

$$y(n) = n \cdot x(n+1) \quad \text{anticausale}$$

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} x(\tau)d\tau = m_{(t-\frac{T}{2},\, t+\frac{T}{2})}[x] \quad \text{non causale}$$

$$y(n) = \sum_{m=n-N+1}^{n} \frac{1}{N} x(n) = m_{(n-N+1,\, n)}[x] \quad \text{causale}$$

W

4) Sistemi BIBO stabili

S è BIBO stabile t.c. $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R})$, $S[x] \in \mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R})$

S è BIBO stabile t.d. $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \ell^{\infty}(\mathbb{Z})$, $S[x] \in \ell^{\infty}(\mathbb{Z})$

Cioè BIBO stabile $\Leftrightarrow$ se l'ingresso è limitato, deve esserlo l'uscita

<u>Esempi</u> 4.1) Identità : è BIBO stabile

4.2) $y(t) = \cos(x(t)) + t$ instabile

4.3) $y(n) = tg^{-1}(x(n))$ stabile

4.4) $y(n) = \sum_{m=n-N}^{n+N} x(n)$ stabile

5) Linearità siano X e Y <u>spazi vettoriali</u> su $\mathbb{C}$

$S: X \to Y$ è lineare $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}, \; \forall x_1, x_2 \in X, \quad S(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 S(x_1) + \alpha_2 S(x_2)$

la definizione si applica sia al caso t.d. che al caso t.c.

<u>Esempi</u>

$y(t) = t^2 x(t)$ lineare

$y(n) = x(n) - \frac{1}{2}x(n-1) - \frac{1}{2}x(n+1)$ lineare

$y(t) = x(t) + 1$ non lineare

$y(n) = \cos(x(n))$ non lineare

⚠ 0 = vettore nullo dello spazio di segnali considerato

Lemma S lineare $\Rightarrow S(0) = 0$

Infatti S lineare $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} S(x - x) = S(x) - S(x) = 0 \\ \quad \| \\ S(0) \end{array} \right.$

6) Sistemi Tempo invarianti

$S : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ con $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ spazi vettoriali

è detto T.I. $\Leftrightarrow$ $\forall \beta \in \mathbb{R}$ [$\forall \beta \in \mathbb{Z}$ se t.d.] e $\forall x \in \mathcal{X}$,

$$S(u_\beta[x]) = u_\beta[S(x)]$$

Cioè applicando un qualsiasi ritardo all'ingresso, l'uscita è la stessa ma ritardata anch'essa della stessa quantità.

Cioè il sistema "lavora sempre allo stesso modo"

Si può formulare anche così: $y(t) = S(x)(t) \Leftrightarrow S(u_\beta(x))(t) = y(t-\beta)$

Esempi

6.1) $$y(t) = \int_{t-1}^{t+1} x(\tau)\, d\tau$$

$\tau - \beta = s$

$\tau = s + \beta$

$$S(u_\beta(x))(t) = \int_{t-1}^{t+1} x(\tau-\beta)\, d\tau = \int_{t-\beta-1}^{t-\beta+1} x(s)\, ds = y(t-\beta)$$

Tempo invariante

6.2) $$y(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k x(n-k)$$

$$S[u_\beta(x)](n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k x(n-k-\beta) = y(n-\beta)$$

Tempo invariante

6.3) $y(n) = n \cdot x(n)$ $\qquad S(u_m(x))(n) = n \cdot x(n-m)$

$$u_m(S(x))(n) = y(n-m) = (n-m)\, x(n-m)$$

Non Tempo invariante

Se la variabile Temporale appare nell'espressione di y solo come argomento di x e senza cambiamenti di scala il sistema è T.I., altrimenti no:

8

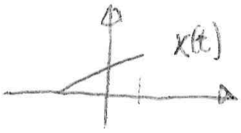
6.3) $\begin{cases} y = R(x) \\ y(t) = x(-t) \end{cases}$

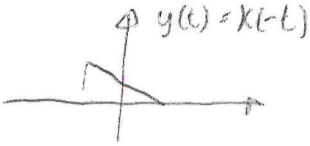
$U_\beta : t \leftarrow t-\beta \qquad R: t \leftarrow -t$

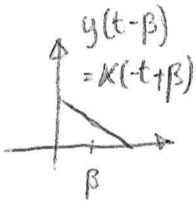
$U_\beta[R[x]](t) = x(-t+\beta) = y(t-\beta)$

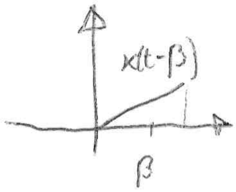
$R[U_\beta[x]](t) = x(-t-\beta) \neq y(t-\beta)$

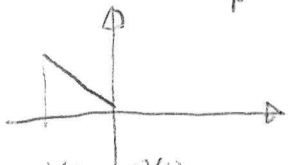
Graficamente, con un esempio











$S(U_\beta(x))(t)$
$= x(-t-\beta)$

$x(-t+\beta) \neq x(-t-\beta)$

Non Tempo invariante

6.4) $y(t) = x(2t)$

$U_\beta[S[x]](t) = y(t-\beta) = x(2t-2\beta)$

$S[U_\beta[x]](t) = S(x(t-\beta))(t) = x(2t-\beta)$

Non T.I.

6.5) $y(t) = x(t) + \cos(t)$

$y(t-\beta) = x(t-\beta) + \cos(t-\beta)$

$S(U_\beta(x))(t) = x(t-\beta) + \cos(t)$

NON T.I.

6.6) $S[x](t) = f(x(t), t)$

$S[U_\beta(x)](t) = f(x(t-\beta), t)$

$U_\beta[S[x]](t) = f(x(t-\beta), t-\beta)$

Non Tempo invariante

<u>Nota</u> Se S è TI e x è periodico, anche $S[x]$ è periodico

Infatti x periodico $\Leftrightarrow$ $x = u_T(x)$

S t.i. $\Leftrightarrow$ $\forall \beta$, $u_\beta[S[x]] = S[u_\beta[x]]$

Ma allora, se $\beta = T$, e $y = S[x]$, si ha

$$u_T[y] = u_T[S[x]] \underset{\text{T.I.}}{=} S[u_T[x]] \underset{\substack{\text{periodicità}\\ \text{di } x}}{=} S[x] = y \quad \text{C.V.}$$

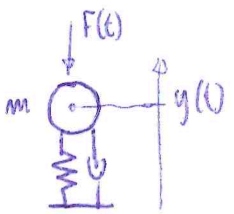
<u>Esercizio</u> Per ogni sistema, dire se è istantaneo, dinamico causale, anticausale, non causale, stabile, lineare, T.I.

	Ist	Din	Caus	Anti	N.Caus	BIBO	Lin	T.I
$y(t) = \cos(x^2(t))$	X		X	X		X		X
$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$		X	X				X	X
$y(n) = x(n+1) + 2x(n) - x(n-1)$		X			X	X	X	X
$y(t) = x(1-t)$		X			X	X	X	
$y(n) = x(3n)$		X			X	X	X	
$y(t) = t\,x(t^2) + 1$		X						

Sistemi in forma implicita

Moltissimi problemi della fisica, ingegneria, economia, biologia, ...
possono essere formulati in termini di sistemi.

Es. 1 Sistema meccanico massa - molla - smorzatore



Una forza $F(t)$ viene applicata al sistema in figura
Quale è la posizione della massa ?
(sapendo che a $t=0$ il sistema è all'equilibrio quindi $y(0)=0$ e $y'(0)=0$)

Questo è un sistema che trasforma F in y
Dalle leggi fisiche si ricava una relazione implicita

$$\sum F_i = m \cdot y'' \qquad \sum F_i = F(t) - k\,y(t) - c\,y'(t)$$

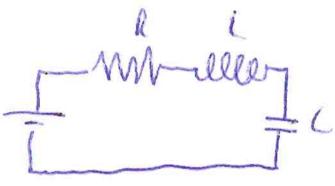
forza elastica ↑   smorzatore (attrito)

$$my'' + cy' + ky = x$$

con $y(0)=0$ e $y'(0)=0$

Mostreremo che è un LTI e quindi si possono dire tante cose usando gli strumenti di SeS

Es. 2



Si trova che $y'' + 2\alpha y' + \omega_0^2 y = x'$
y = corrente circolante
$x = \dfrac{e(t)}{L}$ Tensione (diviso per L)

Sistema $S(x) = y$

$\alpha = R/2L$ smorzamento
$\omega_0 = (LC)^{-1/2}$ risonanza.

Risposta impulsiva

Sia L un LTI t.d. e sia δ la delta di Kronecker.

Si definisce risposta impulsiva del sistema il segnale

$$\boxed{h = L[\delta]}$$

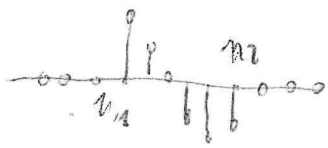
Teorema: la risposta impulsiva è una caratterizzazione del sistema LTI, cioè, noto h, posso calcolare $y = L[x]$ per tutti i segnali x di interesse [significa che esistono dei casi estremi in cui ciò non è possibile, ma nella pratica ciò è irrilevante]

DIM. Ricordiamo che, qualunque sia x, si può scrivere

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\,\delta(n-k) \iff x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, U_k[\delta] \quad (1$$

Cominciamo dal caso di segnale a supporto finito:

$\exists\, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}: \quad x(n) = 0 \quad \forall n < n_1 \text{ e } \forall n > n_2$



In tal caso la (1) si scrive

$$x = \sum_{k=n_1}^{n_2} x(k)\, U_k[\delta]$$

L'uscita corrispondente a x è quindi il segnale y tale ch

$$y(n) = L[x](n) = L\left[\sum_{k=n_1}^{n_2} x(k)\,\delta(n-k)\right]$$

Per linearità abbiamo

$$y(n) = \sum_{k=n_1}^{n_2} x(k)\, L(\delta(n-k))$$

Ora, per Tempo-invarianza, se $h(n) = L(\delta(n))$, allora

$$L(\delta(n-k)) = h(n-k)$$

possiamo estendere i limiti della somma a tutto $\mathbb{Z}$ perché x è nulla al di fuori di n_1, n_2

Quindi possiamo scrivere

$$y(n) = \sum_{k=n_1}^{n_2} x(k)\, h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, h(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, h(n-k) \qquad \boxed{y = x * h}$$

N.B. Se x ha supporto infinito ci vogliono ulteriori ipotesi per scambiare l'ordine tra L e la serie. Tuttavia queste ipotesi sono abbastanza losche.

Per esempio, se $x \in \ell^{\infty}$ e $h \in \ell^1$, oppure $x \in \ell^2$ e $h \in \ell^2$ oppure $x \in \ell^1$ e $h \in \ell^{\infty}$, la serie converge e quindi la convoluzione ha senso e possiamo scambiare $\sum$ e L

Esempi di calcolo della convoluzione discreta

Nei seguenti esercizi si richiede di calcolare $x = v * w$

Cioè, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v(k)\, w(n-k) \qquad (2)$$

Esplicitando la serie, per esempio con k tra -2 e $+2$

$$\begin{aligned} x(n) = \; \dots & + v(-2)\, w(n+2) \qquad (3)\\ & + v(-1)\, w(n+1) \\ & + v(0)\, w(n) \\ & + v(+1)\, w(n-1) \\ & + v(2)\, w(n-2) + \dots \end{aligned}$$

<u>Ex 1</u> $\quad v(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \\ -1 & \text{se } n=1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad w(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \\ -3 & \text{se } n=1 \\ 2 & \text{se } n=2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Osservando l'espressione (3), solo due termini della somma infinita sono non nulli, in corrispondenza di $v(0)$ e $v(1)$:

$$x(n) = v(0)\, w(n) + v(1)\, w(n-1) = w(n) - w(n-1)$$

Ora, $\forall n<0$, $w(n)=0$ e quindi anche $w(n-1)=0$

Inoltre $\forall n>3$ $w(n)=0$ e quindi $\forall n>4$ $w(n-1)=0$

Quindi bisogna calcolare $x(n)$ solo per n compreso tra 0 e 3 perché al di fuori $w(n)$, e $w(n-1)$ sono nulli

$x(0) = W(0) - W(-1) = 1$

$x(1) = W(1) - W(0) = -3 - 1 = -4$

$x(2) = W(2) - W(1) = 5$

$x(3) = W(3) - W(2) = -2$

Ex 2 $\quad V(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \\ -1/2 & \text{se } n=1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad W(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

Come primo, abbiamo $\quad x(n) = V(0)\, W(n) - \frac{1}{2} V(1)\, W(n-1)$

$= W(n) - \frac{1}{2} W(n-1)$

Per proseguire i calcoli, osserviamo che w ha un'espressione esplicita diversa su $n<0$ e $n \geq 0$. Distinguiamo i vari casi:

$\forall n < 0 \qquad W(n) = 0 \quad \text{e} \quad W(n-1) = 0 \Rightarrow x(n) = 0$

se $n = 0 \qquad W(n) = 1 \quad \text{e} \quad W(n-1) = 0 \Rightarrow x(n) = 1$

se $n > 0 \qquad W(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{e} \quad W(n-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\Rightarrow x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

In conclusione $\quad V * W = \delta$

Ex 3 $\quad V(n) = \delta(n) \qquad W(n)$ qualsiasi

Sempre dalla (3), $\quad x(n) = V(0)\, W(n) = W(n)$

Quindi $\quad \delta * W = W \qquad$ In effetti,

δ è l'elemento neutro della convoluzione, come vedremo tra poco