Esercizi proposti 9
soluzioni

Abituarsi a scrivere in modo chiaro e ordinato, giustificando in modo conciso e completo ogni affermazione. Sarà richiesto all'esame.

Sistemi LTI e risposta in frequenza

9.1

Un sistema *lineare* a tempo continuo trasforma

$$\begin{aligned} x_1(t) = e^{j2t} \quad &\mapsto \quad y_1(t) = e^{j3t} \\ x_2(t) = e^{-j2t} \quad &\mapsto \quad y_2(t) = e^{-j3t}. \end{aligned}$$

(a.) Determinare l'uscita $y_3(t)$ corrispondente all'ingresso $x_3(t) = \cos(2(t - \frac{1}{2}))$.

(b.) Questo sistema è tempo invariante?

Soluzione

(a.) Conviene riscrivere l'ingresso $x_3(t)$, utilizzando la formula di Eulero, nella forma

$$\begin{aligned} x_3(t) &= \cos(2(t - \tfrac{1}{2})) = \cos(2t - 1) \\ &= \tfrac{1}{2} e^{j(2t-1)} + \tfrac{1}{2} e^{-j(2t-1)} \\ &= \tfrac{1}{2}\, e^{-j}\, e^{j2t} + \tfrac{1}{2}\, e^{j}\, e^{-j2t}. \end{aligned}$$

Si può ora usare la linearità del sistema L, ottenendo

$$\begin{aligned} y_3(t) &= L\left(\tfrac{1}{2}\, e^{-j}\, e^{j2t} + \tfrac{1}{2}\, e^{j}\, e^{-j2t}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\, e^{-j}\, L\left(e^{j2t}\right) + \tfrac{1}{2}\, e^{j}\, L\left(e^{-j2t}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\, e^{-j}\, e^{j3t} + \tfrac{1}{2}\, e^{j}\, e^{-j3t} \\ &= \tfrac{1}{2} e^{j(3t-1)} + \tfrac{1}{2} e^{-j(3t-1)} = \cos(3t - 1). \end{aligned}$$

(b.) Un sistema LTI sollecitato dall'ingresso $e^{j\omega t}$ risponde con l'uscita $H(j\omega)e^{j\omega t}$. Questo sistema lineare trasforma e^{j2t} in e^{j3t}, modificando la pulsazione dell'esponenziale immaginario. Il sistema non è quindi tempo invariante.

9.2

Si consideri il sistema LTI continuo di risposta in frequenza

$$H(j\omega) = \frac{\sin\omega}{\omega}$$

(a.) Si calcoli l'uscita corrispondente all'ingresso $x(t) = 1 + \cos(\pi t) + \cos(t)$.

(b.) Abbiamo dimostrato a lezione che per i sistemi LTI "se l'ingresso è periodico allora l'uscita è periodica". Vale anche la proposizione inversa?

Soluzione

(a.) L'uscita di un sistema LTI di risposta in frequenza $H(j\omega)$ corrispondente all'ingresso $x(t) = e^{j\omega t}$ è $y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$, mentre la risposta corrispondente ad $x(t) = \cos\omega t$ è $y(t) = |H(j\omega)|\cos\big(\omega t + \arg H(j\omega)\big)$. Per risolvere l'esercizio è sufficiente osservare che (a.) la costante $1 = e^{j0t}$; (b.) poiché $H(j\omega)$ è reale e pari, la sua fase vale 0 per gli ω tali che $H(j\omega) > 0$ e vale π per gli ω tali che $H(j\omega) < 0$; (c.) $H(j\pi) = 0$.

La risposta vale allora

$$y(t) = H(j0)\cdot 1 + |H(j\pi)|\cos\big(\pi t + \arg H(j\omega)\big) + |H(j1)|\cos\big(t + \arg H(j1)\big) = 1 + 0 + (\sin 1)\cos(t)$$

(b.) La risposta è negativa. Nella prima parte dell'esercizio abbiamo un controesempio, infatti ad un ingresso aperiodico corrisponde uscita periodica.

9.3

Un sistema LTI continuo di risposta impulsiva $h(t) = e^{-|t|}$ è sollecitato dall'ingresso $x(t) = 3\cos 2t$. Calcolare l'uscita $y(t)$

(a.) direttamente, via convoluzione;

(b.) calcolando la risposta in frequenza del sistema e poi sfruttandola per il calcolo dell'uscita.

Soluzione

Lasciamo la parte (a.) come esercizio. Per la parte (b.) calcoliamo la risposta in frequenza

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|}\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{(1-j\omega)\tau}\, d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-(1+j\omega)\tau}\, d\tau \\ &= \frac{1}{1-j\omega} + \frac{1}{1+j\omega} = \frac{2}{1+\omega^2} \end{aligned}$$

Si noti che $H(j\omega)$ è reale e strettamente positiva per ogni ω quindi di fase ovunque nulla. L'uscita corrispondente all'ingresso $x(t) = 3\cos 2t$ è

$$y(t) = 3|H(j2)|\cos(2t + \arg H(j\omega)) = 3\,\frac{2}{5}\,\cos 2t = \frac{6}{5}\,\cos 2t$$

9.4

Si consideri un sistema LTI continuo di risposta in frequenza

$$H(j\omega) = \frac{\sin 5\omega}{\omega}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Calcolare l'uscita $y(t)$ corrispondente all'ingresso $x(t) = e^{-j\frac{\pi}{5}t} + e^{j\frac{\pi}{10}t}$.

Soluzione

Dalla definizione di risposta in frequenza ricaviamo

$$\begin{aligned} y(t) &= H\left(-j\frac{\pi}{5}\right) e^{-j\frac{\pi}{5}t} + H\left(j\frac{\pi}{10}\right) e^{j\frac{\pi}{10}t} \\ &= \frac{\sin 5(-\frac{\pi}{5})}{-\frac{\pi}{5}} e^{-j\frac{\pi}{5}t} + \frac{\sin 5(\frac{\pi}{10})}{\frac{\pi}{10}} e^{j\frac{\pi}{10}t} \\ &= \frac{\sin(-\pi)}{-\frac{\pi}{5}} e^{-j\frac{\pi}{5}t} + \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{10}} e^{j\frac{\pi}{10}t} = \frac{10}{\pi} e^{j\frac{\pi}{10}t}. \end{aligned}$$