Esercizi proposti 7
soluzioni

Proprietà dei sistemi[1]

7.1

Classificare i seguenti sistemi in (a.) statici, (b.) dinamici, (b.1) dinamici causali, (b.2) dinamici anticausali, (c.) BIBO stabili, (d.) tempo invarianti, (e.) lineari.

1. $y(n) = \sum_{k=n-10}^{n+10} x(k)$,
2. $y(t) = x(t)x(t+2)$,
3. $y(n) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$,
4. $y(t) = x(t)\sin(t+2)$,
5. $y(t) = x(t-2)$,
6. $y(n) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{n-1} 3^{-k}\, x(k)$,
7. $y(t) = x(0)^2 - t$,
8. $y(n) = \frac{1}{3}\Big[x(n-2) + x(n) + x(n+2)\Big]$,
9. $y(t) = t\, x(t)\, x(t-1)$,
10. $y(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|} x(t-\tau)\, d\tau$,
11. $y(t) = 2x(t) + x^2(t-1)$,
12. $y(t) = 2 + \int_{-\infty}^{t-1} x(t-\tau)\, d\tau$,
13. $y(t) = e^{-t} \int_{-\infty}^{t} e^{\tau} x(\tau)\, d\tau$,
14. $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(2\tau)\, d\tau$,
15. $y(n) = x(-n)$,
16. $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{t-\sigma} x^2(\sigma)\, d\sigma$,
17. $y(t) = -3x(t) + \int_{-\infty}^{t} 3x(\tau)\, d\tau$,
18. $y(n) = x(n)x(n-1)$,
19. $y(n) = \sum_{k=n-3}^{n} \cos(x(k))$.

[1] alcuni esercizi sono tratti dalle note di Wilson Rugh

Soluzione

sistema	stat.	dinam.	caus.	antic.	BIBO	t. invar.	lineare
(1.)	no	si	no	no	si	si	si
(2.)	no	si	no	si	si	si	no
(3.)	no	si	si	no	no	si	si
(4.)	si	no	si	si	si	no	si
(5.)	no	si	si	no	si	si	si
(6.)	no	si	si	no	no	no	si
(7.)	no	si	no	no	no	no	no
(8.)	no	si	no	no	si	si	si
(9.)	no	si	si	no	no	no	no
(10.)	no	si	no	no	si	si	si
(11.)	no	si	si	no	si	si	no
(12.)	no	si	no	no	no	no	no
(13.)	no	si	si	no	si	si	si
(14.)	no	si	no	no	no	no	si
(15.)	no	si	no	no	si	no	si
(16.)	no	si	si	no	no	si	no
(17.)	no	si	si	no	no	si	si
(18.)	no	si	si	no	si	si	no
(19.)	no	si	si	no	si	si	no

Molte delle proprietà elencate sono banali conseguenze delle definizioni. Qui sotto, per ciascuno dei sistemi, forniamo la spiegazione delle proprietà che non sono evidenti per ispezione.

1. $y(n) = \sum_{k=n-10}^{n+10} x(k)$

   Per la BIBO stabilità. Se $x(\cdot)$ è un qualunque ingresso limitato, tale che $|x(n)| \leq M_x < \infty$ per ogni n allora l'uscita è limitata infatti

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=n-10}^{n+10} x(k) \right| \leq \sum_{k=n-10}^{n+10} |x(k)| \leq 21 M_x < \infty.$$

   Per la tempo invarianza. Affinché valga la tempo invarianza: se l'ingresso è $\overline{x}(n) := x(n+N)$, l'uscita deve essere $\overline{y}(n) = y(n+N)$, ed infatti

$$\begin{aligned} \overline{y}(n) &= \sum_{k=n-10}^{n+10} \overline{x}(k) \\ &= \sum_{k=n-10}^{n+10} x(k+N) = \quad \text{cambiando l'indice a } k' = k+N \\ &= \sum_{k=n+N-10}^{n+N+10} x(k) = y(n+N) \end{aligned}$$

2. $y(t) = x(t)x(t+2)$

Per la BIBO stabilità. Se $x(\cdot)$ è un qualunque ingresso limitato, tale che $|x(t)| \leq M_x < \infty$ per ogni t allora

$$|y(t)| = |x(t)x(t+2)| \leq M_x^2 < \infty.$$

Si conclude che l'uscita è limitata e che il sistema è BIBO stabile.

3. $y(n) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$

   Per la BIBO stabilità. L'ingresso limitato $x(n) = u(n)$ produce l'uscita $y(n) = \sum_{k=0}^{n} u(n) = n+1$ che diverge a $+\infty$ per $n \to \infty$. Si conclude che il sistema non è BIBO stabile.

   Per la tempo invarianza. Applicando l'ingresso $\overline{x}(n) = x(n+N)$ l'uscita è

$$\begin{aligned} \overline{y}(n) &= \sum_{k=-\infty}^{n} \overline{x}(k) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k+N) = \quad \text{cambiando l'indice a } k' = k+N \\ &= \sum_{k=-\infty}^{n+N} x(k) = y(n+N), \end{aligned}$$

   si conclude che il sistema è tempo invariante.

4. $y(t) = x(t)\sin(t+2)$

   Per la BIBO stabilità. Applicando l'ingresso limitato $x(\cdot)$ tale che $|x(t)| \leq M_x < \infty$ l'uscita è limitata infatti $|y(t)| = |x(t)\sin(t+2)| \leq |x(t)| \leq M_x$. Si conclude che il sistema è BIBO stabile.

   Per la tempo invarianza. Applicando l'ingresso $\overline{x}(t) = x(t+T)$, l'uscita corrispondente è

$$\begin{aligned} \overline{y}(t) &= \overline{x}(t)\sin(t+2) = x(t+T)\sin(t+2) \\ &\neq y(t+T) = x(t+T)\sin(t+T+2). \end{aligned}$$

   Il sistema non è tempo invariante.

5. $y(t) = x(t-2)$

   Tutte le proprietà sono evidenti per ispezione.

6. $y(n) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{n-1} 3^{-k}\, x(k)$

   Se, ad esempio, $x(n) = u(-n)$ l'uscita $y(n) = \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Il sistema non è BIBO stabile. In realtà per questo sistema non ha molto senso permettere segnali d'ingresso $x(n)$ tali che $\sum_{k=-\infty}^{n-1} 3^{-k}\, x(k)$ non converga. Una condizione sufficiente per la convergenza è che l'ingresso sia di ordine $x(-n) = O(\alpha^n)$, con $\alpha < \frac{1}{3}$. Ma queste considerazioni esulano dalla trattazione elementare.

7. $y(t) = x(0)^2 - t$

   Attenzione: non si commetta l'errore di considerare questo sistema statico! Se $t \neq 0$ l'uscita all'istante t dipende dal valore dell'ingresso in un altro istante, che può essere nel passato o nel futuro rispetto a t, quindi il sistema è dinamico, né causale né anticausale. Il sistema non è BIBO stabile poiché l'uscita diverge per $t \to \pm\infty$, qualunque sia l'ingresso applicato, limitato o no.

8. $y(n) = \frac{1}{3}\Big[x(n-2) + x(n) + x(n+2)\Big]$

   Si confronti con il sistema (1.).

9. $y(t) = t\,x(t)\,x(t-1)$

   Si confronti con il sistema (2.). A parte l'evidente differenza tra la causalità e l'anticausalità, si noti come la presenza del fattore t cancella la BIBO stabilità e la tempo invarianza!

10. $y(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|} x(t-\tau)\,d\tau$

    Si riconosce che l'uscita è la convoluzione di $h(t) = e^{-|t|}$ con l'ingresso $x(t)$. L'unica proprietà che resta da controllare è la BIBO stabilità e poiché $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\,d\tau = 2 < \infty$, si conclude che il sistema è BIBO stabile.

11. $y(t) = 2x(t) + x^2(t-1)$

    Tutte le proprietà dovrebbero essere evidenti.

12. $y(t) = 2 + \int_{-\infty}^{t-1} x(t-\tau)\,d\tau$

    Il sistema da studiare è
    $$y(t) = 2 + \int_{-\infty}^{t-1} x(t-\tau)\,d\tau$$
    Effettuando il cambio di variabile $t - \tau = \tau'$ si può riscrivere la relazione ingresso uscita come segue:
    $$y(t) = 2 + \int_{1}^{\infty} x(\tau)\,d\tau.$$
    Il sistema non è statico poiché l'uscita, costante in t, dipende comunque dall'andamento dell'ingresso nella semiretta $[1, \infty]$. Il sistema non è né causale né anticausale poiché benché l'uscita sia costante in t il suo valore dipende dai valori dell'ingresso sulla semiretta $[1, \infty)$. Il sistema non è BIBO stabile poiché $x(t) = 1$ produce $y(t) = \infty$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Il sistema non è tempo invariante poiché la risposta al segnale $\widetilde{x}(t) = x(t+\beta)$ è pari a
    $$\widetilde{y}(t) = 2 + \int_{1}^{\infty} \widetilde{x}(\tau)\,d\tau = 2 + \int_{1+\beta}^{\infty} x(\tau)\,d\tau \neq y(t+\beta) = y(t) = 2 + \int_{1}^{\infty} x(\tau)\,d\tau.$$
    Il sistema non è lineare poiché la risposta all'ingresso nullo $x(t) = 0$ è pari a $y(t) = 2$.

13. $y(t) = e^{-t} \int_{-\infty}^{t} e^{\tau} x(\tau)\,d\tau$

    Per rispondere si osservi che si può scrivere
    $$y(t) = e^{-t} \int_{-\infty}^{t} e^{\tau} x(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau)\,d\tau,$$
    ed è immediato riconoscere che
    $$y(t) = e^{-t}u(t) * x(t)$$
    Il sistema è quindi LTI, di risposta impulsiva $h(t) = e^{-t}u(t)$. Si conlude che il sistema è causale, infatti $h(t) = 0$ per $t < 0$, ed è BIBO stabile, infatti $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \int_{0}^{\infty} e^{-t}\,dt = 1 < \infty$.

14. $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(2\tau)\, d\tau$

    Se nell'integrale si effettua il cambio di variabile $\tau' = 2\tau$ il sistema si scrive

$$y(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)\, d\tau$$

    si riconosce che si tratta di un sistema dinamico né causale né anticausale (l'uscita all'istante t dipende dai valori dell'ingresso nella semiretta $(-\infty, 2t]$. Il sistema non è BIBO stabile, infatti applicando $x(t) = u(-t)$ l'uscita $y(t) = \infty$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Come per il sistema (6.) anche in questo caso non ha molto senso permettere segnali d'ingresso per i quali il segnale d'uscita $y(t)$ non converge per nessun valore di t. Si deve opportunamente limitare l'insieme dei possibili segnali d'ingresso ma queste considerazioni esulano dal corso di livello elementare. Per la tempo invarianza si noti che, applicando ingresso $\widetilde{x}(t) = x(t + \beta)$ l'uscita corrispondente è

$$\widetilde{y}(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{2t} \widetilde{x}(\tau)\, d\tau = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{2t} x(\tau + \beta)\, d\tau = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{2t+\beta} x(\tau)\, d\tau$$

    Si noti che $\widetilde{y}(t) \neq y(t + \beta) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{2(t+\beta)} x(\tau)\, d\tau$. La conclusione è che il sistema non è tempo invariante.

15. $y(n) = x(-n)$

    Tutte le proprietà sono evidenti per ispezione.

16. $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{t-\sigma} x^2(\sigma)\, d\sigma$

    Il sistema si scrive in modo equivalente come

$$y(t) = e^t u(t) * x^2(t)$$

    Non ha quindi senso definire la risposta impulsiva per questo sistema: $e^t u(t)$ *non* è la risposta impulsiva. Il sistema non è lineare, infatti nella convoluzione compare $x^2(t)$. Il sistema è tempo invariante come si verifica agevolmente con l'usuale metodo. Il sistema non è stabile: $x(t) = 1$ comporta $y(t) = \infty$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Si veda anche la discussione sulla stabilità dei sistemi (6.) e (14.)

17. $y(t) = -3x(t) + \int_{-\infty}^{t} 3x(\tau)\, d\tau$

    Si riconosce che

$$y(t) = \big[-3\delta(t) + 3u(t) \big] * x(t)$$

    Il sistema è quindi LTI e causale, ma non BIBO stabile, infatti $\int |h(t)|\, dt = +\infty$.

18. $y(n) = x(n)x(n-1)$

    Tutte le proprietà si verificano per ispezione. Si confronti con il sistema (2.)

19. $y(n) = \sum_{k=n-3}^{n} \cos(x(k))$

    L'uscita all'istante n dipende dai valori dell'ingresso agli istanti $n, n-1, n-2, n-3$ il sistema è quindi dinamico causale. La BIBO stabilità è banalmente verificata, poiché, qualunque sia l'ingresso, l'uscita $|y(n)| \leq 4$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. La tempo invarianza è verificata poiché applicando $\widetilde{x}(n) = x(n + m)$ si ottiene

$$\widetilde{y}(n) = \sum_{k=n-3}^{n} \cos(\widetilde{x}(k)) = \sum_{k=n-3}^{n} \cos(x(k + m)) = \sum_{k=n+m-3}^{n+m} \cos(x(k)) = y(n + m)$$

    Il sistema è ovviamente non lineare.

7.2

Calcolare la relazione ingresso uscita della cascata $\Sigma_2\,\Sigma_1$ dove Σ_1 e Σ_2 sono i sistemi così specificati

$$y(n) = \Sigma_1(x(n)) = x^2(n-2), \qquad y(n) = \Sigma_2(x(n)) = x(n+2)$$

Soluzione

È un esercizio banale. Si tratta di calcolare la composizione. Diciamo $x(n)$ l'ingresso della cascata $\Sigma_2\,\Sigma_1$. Allora

$$\Sigma_2\Big(\Sigma_1\big(x(n)\big)\Big) = \Sigma_2\Big(x^2(n-2)\Big) = x^2(n)$$