Esercizi proposti 6
soluzioni

Sistemi elementari – Trasformazioni lineari del tempo

6.1

Per i seguenti segnali:

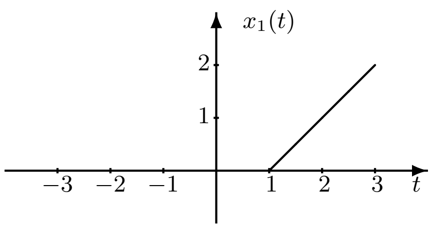
- $x_1(t) = \begin{cases} t-1, & 1 < t < 3, \\ 0, & \text{altrimenti;} \end{cases}$
- $x_2(t) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 2, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$
- $x_3(t) = \begin{cases} 1, & -\infty < t \leq 2, \\ t-2, & 2 < t \leq 4, \\ 1, & t \geq 4. \end{cases}$

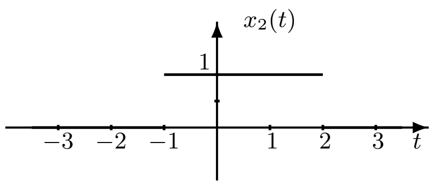
a. Si traccino i grafici dei segnali.

b. Si rappresentino i segnali impiegando gradini e/o rampe e loro traslazioni.

Soluzione

Qui sotto sono riportati i grafici dei segnali x_1 e x_2





I segnali dati si possono rappresentare in vari modi. Ad esempio

- $x_1(t) = (t-1)[u(t-1) - u(t-3)] = (t-1)\text{rect}\left(\frac{t}{2} - 1\right)$
- $x_2(t) = u(t+1) - u(t-2) = \text{rect}\left(\frac{t}{3} - \frac{1}{6}\right)$
- $x_3(t) = u(2-t) + (t-2)u(t-2) + (3-t)u(t-4)$

6.2

Si consideri il segnale a tempo continuo $x(t) = 1 + t^2$, per ogni $t \in \mathbb{R}$. Si determini, analiticamente e/o graficamente il segnale $y(t) := x(-2t+1)$.

Soluzione

Si può procedere considerando la trasformazione lineare del tempo come cascata di due trasformazioni elementari: traslazione U_1 seguita da cambio scala S_{-2},

$$x(-2t+1) = S_{-2}\, U_1 x(t),$$

ma disponendo della rappresentazione analitica di $x(t)$ è molto più semplice sostituire direttamente $-2t+1$ al posto di t nell'espressione del segnale $x(t) = 1 + t^2$. Così facendo si ottiene

$$y(t) := x(-2t+1) = 1 + (-2t+1)^2 = 4t^2 - 4t + 2.$$

6.3

Sia $x(t)$ il rettangolo unitario nell'intervallo $[1, 5]$, ovvero

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 1 \le t \le 5, \\ 0, & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

(a.) Rappresentare $x(t)$ nella forma $x(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t+\gamma}{\eta}\right)$ per opportune costanti γ e η.

(b.) Rappresentare $x(t)$ come prodotto di due gradini unitari temporalmente traslati / riscalati.

(c.) Rappresentare $x(t)$ come somma di due gradini unitari temporalmente traslati/riscalati.

Soluzione

$$x(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t-3}{4}\right) = u(-t+5)u(t-1) = u(t-1) - u(t-5)$$

6.4

Si consideri il segnale a tempo discreto

$$x(n) = \begin{cases} n-1, & 1 \le n \le 3, \\ 0, & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

(a.) Rappresentare il segnale $x(n)$ impiegando gradini e/o rampe discreti e loro traslazioni.

(b.) Tracciare il grafico del segnale $y(n) = x(-2n+1)$.

Soluzione

Occorre prestare la massima attenzione nel caso discreto: la sindrome del ± 1 è sempre in agguato[1]. Ispezionando la definizione di $x(n)$ è evidente che $x(n) \neq 0$ solo per $n = 2, 3$. Ricordando la definizione di $\delta(n)$, si può allora rappresentare $x(n)$ come

$$x(n) = \delta(n-2) + 2\delta(n-3) = (n-1)[u(n-2) - u(n-4)]$$

Convincetevi che

$$x(-2n+1) = 2\delta(n+1)$$

[1] La sindrome del ± 1 è quella che colpisce i programmatori, sempre incerti se si debba aggiungere o sottrarre 1 all'indice di un ciclo for. Per i segnali discreti succede qualcosa di simile. Ad esempio si consideri $w(n)$ così definito,

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 1 \le n \le 5, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il segnale $w(n)$ si rappresenta correttamente come

$$w(n) = u(n-1) - u(n-6)$$

e non come $u(n-1) - u(n-5)$ come si potrebbe essere tentati di scrivere.