Segnali periodici a Tempo discreto

$x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ è periodico di periodo $N \in \mathbb{N}_0$ se e solo se

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad x(n+N) = x(n)$$

Il minimo N che soddisfa la definizione è detto periodo fondamentale

Valor medio su un periodo: $m_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)$

Energia su di un periodo: $E_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \sum_{n=m}^{m+N-1} |x(n)|^2$

Potenza su di un periodo $P_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{E_N(x)}{N}$

Invece l'energia su $\mathbb{Z}$ di un segnale periodico non nullo è infinita

Infatti $E(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{n=kN}^{(k+1)N-1} |x(n)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} E_N(x) = +\infty$

Sinusoide t.d.

$$x(n) = A\cos(\omega_0 n + \varphi) = A\cos(2\pi\nu_0 n + \varphi)$$

con $A \in \mathbb{R}^+$, $\omega_0 \in (0, \pi)$, $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$, $\varphi \in (0, 2\pi)$

Domande

1) Perchè ci limitiamo a $\omega_0 \in (0,\pi)$?
Nel caso t.c., $\omega_0 \in \mathbb{R}^+$

2) La sinusoide t.d. è sempre un segnale periodico?

Chiariamo bene questi aspetti studiando la parametrizzazione della sinusoide t.d.

1) Mostriamo che basta prendere $\omega_0 \in (-\pi, \pi)$ per rappresentare qualsiasi sinusoide t.d.

In altre parole, $\forall \omega_1 \in \mathbb{R}$, $\exists \omega_2 \in (-\pi, \pi)$: $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$A\cos(\omega_1 n + \varphi) = A\cos(\omega_2 n + \varphi)$$

<u>DIM.</u> Qualunque sia $\omega_1 \in \mathbb{R}$, possiamo trovare $\omega_2 \in (-\pi, \pi)$ tale che $\omega_1 = \omega_2 + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Allora si ha $A\cos(\omega_1 n + \varphi) = A\cos(\omega_2 n + \varphi + \cancel{2k\pi \cdot n})$ per periodicità

$= A\cos(\omega_2 n + \varphi)$ C.V.D.

Quindi, basta prendere $\omega_0 \in (-\pi, \pi)$ o, equivalentemente, $\nu_0 \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ per rappresentare ogni possibile cosinusoide t.d.

<u>In realtà basta prendere $\omega_0 \in (0, \pi)$:</u>

In altre parole, se $\omega_0 < 0$ allora: $x_1(n) = A\cos(\omega_0 n + \varphi) = A\cos(-|\omega_0| n + \varphi) =$

$= A\cos(|\omega_0| n - \varphi)$

Basta cambiare il segno alla fase per ottenere una pulsazione positiva

<u>Esempi</u> Mettere in forma canonica

W

$$x_1(n) = 3\cos\left(-\frac{\pi}{4} n - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$x_2(n) = -4\cos\left((20.5)\cdot \pi n + \frac{14}{3}\pi\right)$$

$$x_3(n) = 2\cos(-1001.7\,\pi n)$$

Soluzioni

$$x_1(n) = 3\cos\left(-\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{3}\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} A = 3 \\ \omega_0 = \pi/4 \\ \nu_0 = 1/8 \\ \varphi = \pi/3 \end{array}}$$

$$x_2(n) = -4\cos\left(20.5\pi n + \frac{14}{3}\pi\right) =$$

$-\cos\alpha = \cos(\alpha \pm \pi)$

$$= 4\cos\left(20.5\pi n + \frac{11}{3}\pi\right) =$$

$$= 4\cos\left(\left(20+\frac{1}{2}\right)\pi n + \left(4-\frac{1}{3}\right)\pi\right) =$$

$$= 4\cos\left(\frac{1}{2}\pi n - \frac{\pi}{3} + 20\pi n + 4\pi\right)$$

$$= 4\cos\left(\frac{1}{2}\pi n - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} A = 4 \\ \omega_0 = \pi/2 \\ \nu_0 = 1/4 \\ \varphi = -\pi/3 \end{array}}$$

$$x_3(n) = 2\cos(-1001.7\pi n) = 2\cos((-1002 + 0.3)\pi n)$$

$$= 2\cos(0.3\pi n - 1002\pi n) = 2\cos(0.3\pi n)$$

2) Periodicità della sinusoide a t.d.

Sia $x(n) = A\cos(2\pi\nu_0 n + \varphi)$

Vediamo in quali condizioni esiste $N \neq 0 : \forall n \in \mathbb{Z}$, $x(n+N) = x(n)$

$x(n+N) = x(n)$ se e solo se gli argomenti del coseno differiscono di un multiplo intero di 2π!

x periodico di periodo $N \iff \exists k \in \mathbb{Z} : \quad 2\pi\nu_0(n+N) + \varphi = 2\pi\nu_0 n + \varphi + 2k\pi$

$$\iff 2\pi\nu_0 N = 2\pi k \iff \nu_0 N = k \iff \nu_0 = k/N$$

Quindi x è periodico se e solo se la frequenza numerica è <u>razionale</u>

Qual è il periodo? Attenzione, non è necessariamente il <u>reciproco</u> della frequenza!

Bisogna mettere la frequenza numerica in forma razionale con num. e den. <u>primi tra loro</u>: il denominatore sarà il periodo

<u>Esercizio</u> Trovare freq. num. e periodo di

$$x(n) = \cos(-10.01\,\pi n)$$

scriviamo $-10.01 = \overset{\text{numero pari}}{-10} - 0.01$

allora $x(n) = \cos(-10\pi n - 0.01\pi n) = \cos(-0.01\pi n) =$

$$= \cos(0.01\,\pi n) = \cos\left(\frac{1}{200} 2\pi n\right)$$

La freq. numerica è $\frac{1}{200}$; il periodo è $N = 200$

A volte la freq. num. può essere grande (cioè, vicina a $\pm\frac{1}{2}$) ma anche il periodo risulta grande:

<u>esempio</u> $x(n) = \cos\left(-39.02\,\pi n\right) =$

$$= \cos\left((-40+0.98)\pi n\right) = \cos(0.98\,\pi n) = \cos\left(\frac{49}{100} \cdot 2\pi n\right)$$

$\nu_0 = 0.49$

$N = 100$

Conclusione: A T. d., il periodo è ingannevole, una sinusoide può oscillare molto rapidamente ed avere un periodo grande o piccolo o non essere periodico!

1) $x(n) = \cos(\pi n)$: massima frequenza $\left(\nu_0 = \frac{1}{2}\right)$, periodo piccolo $N=2$

2) $x(n) = \cos\left(\frac{999}{1000} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi\, n\right)$ freq. grande $\left(\nu_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{999}{1000}\right)$ periodo grande: $N=2$

3) $x(n) = \cos\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{10^4}\right) \cdot n\right)$ "freq" grande $\left(\nu_0 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{10^4}\right)$ ma segnale non periodico

Esponenziale immaginario t.d.

$$x(n) = A\, e^{j(\omega_0 n + \varphi)} = A\cos(\omega_0 n + \varphi) + jA\sin(\omega_0 n + \varphi)$$

Osserviamo che $x(n) = A e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega_0 n}$

costante

La parte interessante è $e^{j\omega_0 n}$

che si può anche scrivere come $e^{j2\pi\nu_0 n}$ con $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$

Questa volta sappiamo che ω_0 può variare in $(-\pi, \pi)$

cioè anche le frequenze negative hanno senso

Se $\omega_1 = \omega_0 + 2k\pi$, $e^{j\omega_1 n} = e^{j\omega_0 n} e^{j2k\pi n} = e^{j\omega_0 n}$

Se $\omega_1 = -\omega_0$, $e^{j\omega_1 n} = e^{-j\omega_0 n} = \overline{e^{j\omega_0 n}}$ non si può ricondurre a e^{j}

Esempio Trovare la forma canonica, la freq. numerica e, se periodico, il periodo di $x(n) = -3\exp\left[j\left(2\pi \cdot 3{,}89\, n - \frac{\pi}{4}\right.\right.$

Basta concentrarsi su $e^{j\, 2\pi \cdot 3.89 \cdot n}$

Scriviamo 3.89 come Intero + decimale tra $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$

$$3.89 = 4 - 0.11$$

Allora $e^{j\, 2\pi (3.89) n} = e^{j\, 2\pi \cdot 4 \cdot n} \cdot e^{-j\, 2\pi (0.11) n}$

La frequenza numerica è allora $\nu_0 = -\frac{11}{100}$

come nel caso della sinusoide t.d., il periodo è allora 100

Esempio Sia $x_n = e^{j\, 2\pi \nu_0 n}$

Trovare il periodo nel caso $\nu_0 = 0.48$ e nel caso $\nu_0 = 0.49$

Nel primo caso $\nu_0 = \frac{48}{100} = \frac{12}{25}$, il periodo è $N = 25$

Nel secondo caso $\nu_0 = \frac{49}{100}$, il periodo è $N = 100$

Notare che un piccolo incremento di frequenza porta ad una grande variazione del periodo

Esercizio Trovare il periodo nel caso "intermedio" $\nu_0 = 0.485$

W Domande su confronto tra exp e sin T.c. e T.d.

Replica periodica

Sia x un segnale T.C. definito su $\mathbb{R}$: $x: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Sia $T \in \mathbb{R}_0^+$ (reale strett. positivo)

Si definisce replica periodica di periodo T del segnale x il seguente segnale:

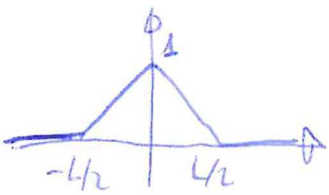
$$rep_T[x](t) : t \in \mathbb{R} \to \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t-kT)$$

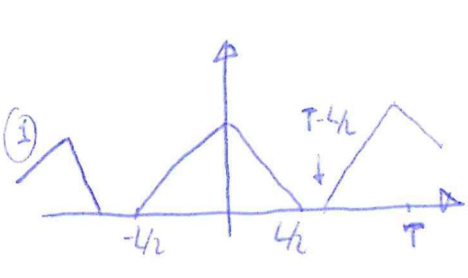
(ammesso che la serie converga $\forall t \in \mathbb{R}$)

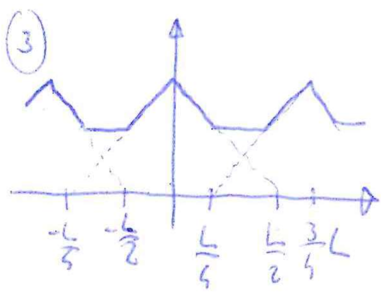
Analogamente, la replica periodica di periodo $N \in \mathbb{N}_0$ di un segnale t.d. x è:

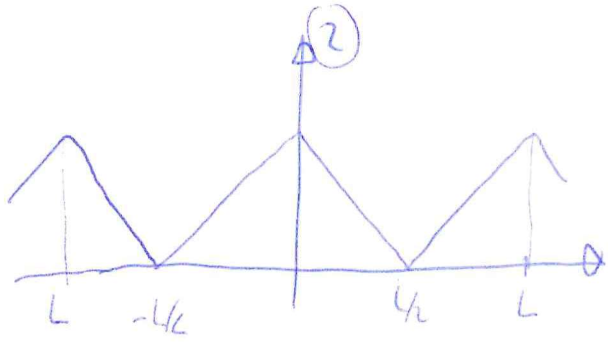
$$rep_N[x](n) : n \in \mathbb{Z} \to \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-kN)$$

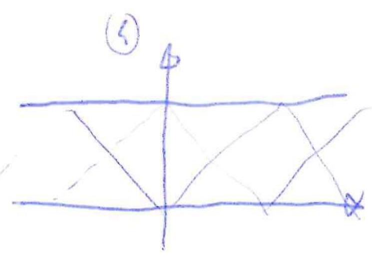
Esempio Sia $x(t) = \Lambda\left(\frac{2t}{L}\right)$ Disegnare le repliche periodiche di periodo T nei casi: 1) $T>L$ 2) $T=L$ 3) $T=\frac{3}{4}L$ 4) $T=\frac{1}{2}L$











<u>Osservazione</u> x è a supporto $\left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$.

Se $T \geq L$ è possibile recuperarla x da $rep_T[x]$:

basta moltiplicare per $rect(t/T)$

Funzioni di segnali periodici

Se x_1 e x_2 sono segnali T.c. periodici di periodo T_1 e T_2

definito $y(t) = f(x_1(t), x_2(t))$, y è periodico se $\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$

<u>DIM.</u> $\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists\, n, m : \frac{T_1}{T_2} = \frac{n}{m}$ Sia allora $T = nT_2 = mT_1$

$$y(t+T) = f(x_1(t+mT_1), x_2(t+nT_2)) = f(x_1(t), x_2(t)) = y(t)$$ C.V.D.

Delta di Dirac e sue proprietà

Nel trattamento dei segnali, a volte si vorrebbe usare delle "funzioni" che non sono descrivibili con gli strumenti usuali.

Per questo si introducono le <u>funzioni generalizzate</u> il cui esempio più famoso è la Delta di Dirac.

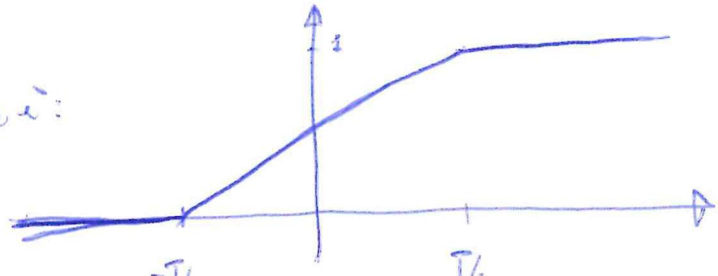
La Delta di Dirac può opporre ai problemi come i seguenti

1) Calcolare la derivata di un segnale discontinuo
2) Rappresentare un segnale tramite il suo valor medio

<u>Caso 1</u> Sia

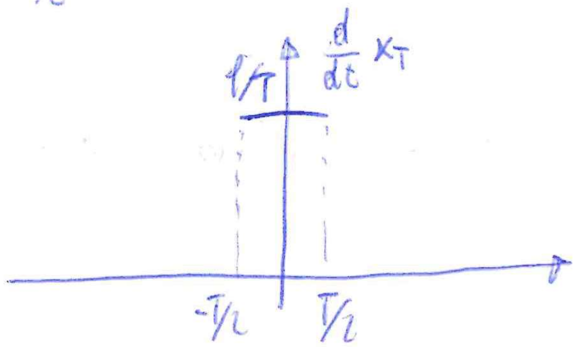
$$x_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < -T/2 \\ \dfrac{t+T/2}{T} & |t| \le T/2 \\ 1 & \text{se } t > T/2 \end{cases}$$

x_T è continua.
La sua derivata è:



$$\frac{d}{dt} x_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < -T/2 \\ 1/T & \text{se } |t| < T/2 \\ 0 & \text{se } t > T/2 \end{cases}$$

non definita se $t = \pm T/2$



cioè $\frac{d}{dt} x_T(t) = \frac{1}{T}\, rect\left(\frac{t}{T}\right) \triangleq r_T(t)$

Consideriamo ora la famiglia di funzioni

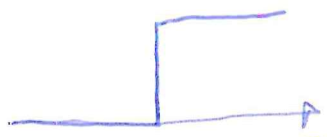
$\{x_T\}_{T \in \mathbb{R}_0^+}$ e $\{r_T\}_{T \in \mathbb{R}_0^+}$

Osserviamo che, qualunque sia $T \in \mathbb{R}_0^+$, $x_T' = r_T$

Osserviamo che r_T ha supporto $(-T/2, T/2)$ e altezza $1/T$

per cui $\forall T \in \mathbb{R}_0^+$, $\int_{-\infty}^{+\infty} r_T(t)\,dt = 1$

Infine osserviamo che $x_T \xrightarrow[T \to 0^+]{} u$



$u(t) = x_T(t)$ per $T \to 0$

Ha senso allora dire che $x_T' \xrightarrow[T \to 0^+]{} u'$?

Purtroppo, anche se $\forall T \in \mathbb{R}_0^+$ $x_T' = r_T$ esiste, il limite di questa famiglia di funzioni non è una funzione

Infatti avremmo un "oggetto" che ha supporto nullo, vale $\emptyset$ ovunque tranne che in 0, dove vale $+\infty$, ed ha area unitaria

Queste sono proprio le proprietà che vogliamo.

Non esiste una funzione che le soddisfi.

Introduciamo però la delta di Dirac $\delta(t)$ che è un oggetto matematico che soddisfa tutte queste proprietà.

Vorremmo cioè $\boxed{\delta \triangleq \lim_{T \to 0} r_T}$

Come?

Definizione della delta tramite la proprietà del campionamento

Sia x un segnale continuo in un intorno di 0 e definito in $\mathbb{R}$

Per semplicità, sia x reale

"Definiamo" la δ di Dirac come quella funzione che permette di ottenere $x(0)$ con l'operazione seguente

$$\boxed{x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, x(t)\, dt}$$

Mostriamo che, con questa definizione, possiamo dare significato al limite di r_T per $T \to 0$

Infatti posto $L_T(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_T(t)\, x(t)\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{x(t)}{T}\, dt = m_{(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})}[x]$

Cioè, $\forall T \in \mathbb{R}_0^+$, $L_T[x] = m_{(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})}[x]$

Per il Teorema del valor medio, $\exists\, t^* \in (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}) : m_{(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})}[x] = x(t^*)$

Ma se $T \to 0$, allora $t^* \to 0$

Quindi $$\int_{-\infty}^{+\infty} r_T(t)\, x(t)\, dt \xrightarrow[T \to 0]{} x(0)$$

È in questo senso che si deve intendere la definizione di δ

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, x(t)\, dt = x(0)}$$

"Salto" matematico. Ammetteremo che la scrittura $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)x(t)\,dt$ possa essere manipolata con le regole usuali dell'integrazione. Ciò è vero, perché δ è stato definito tramite un operatore integrale lineare. Ma non lo dimostreremo.

Possiamo invece dimostrare una serie di proprietà della δ. Si noti che la δ è detta anche impulso o impulso di Dirac

1) Area della δ

Sia $x(t) = \mathrm{rect}(t/D)$. $\forall D>0$, $x(0)=1$

Applichiamo la proprietà di campionamento:

$$\forall D>0, \quad 1 = x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)x(t) = \int_{-D/2}^{D/2} \delta(t)\,dt$$

Passando al limite per $D \to +\infty$, $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt$ Area dell'impulso

2) Moltiplicazione per uno scalare.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A\delta(t)\,x(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\cdot[Ax(t)]\,dt = Ax(0)$$

3) Ritardo. Sia $\beta \in \mathbb{R}$. Che significa $\delta(t-\beta)$? (impulso ritardato)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\beta)\,x(t)\,dt \underset{s=t-\beta}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(s)\,x(s+\beta)\,ds = x(\beta)$$ Se x è continua in β

3) L'equazione precedente si può riscrivere cambiando nome alle variabili:

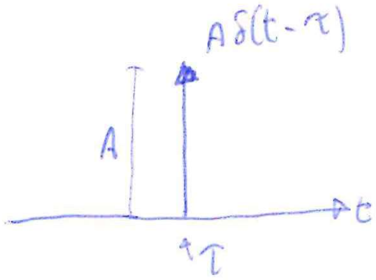
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

se x è continuo in t

Proprietà della rappresentazione integrale

x è data dalla somma integrale d'infiniti impulsi

$$\underbrace{x(\tau)}_{\text{"ampiezza" dell'impulso}} \ \underbrace{\delta(t-\tau)}_{\text{impulso centrato in } \tau}$$



4) Ribaltamento: $\delta(-t) = \delta(t)$

Infatti, con il cambiamento di variabile $\boxed{\begin{array}{c} s = -t \\ ds = dt \end{array}}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(-t)\,x(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(s)\,x(-s)\,ds = x(-0) = x(0)$$

5) Cambio scala: $a \neq 0$ $\quad \delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(at)\,x(t)\,dt = \boxed{\begin{array}{c} s = at \\ ds = |a|dt \end{array}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(s)\,x\!\left(\frac{s}{a}\right)\frac{ds}{|a|} = \frac{1}{|a|}x(0)$$

6) Prodotto segnale · impulso: $\quad f(t)\,\delta(t) = f(0)\,\delta(t)$

sia $f(t)$ continua in zero

$$\int f(t)\,\delta(t)\,x(t)\,dt = \int \delta(t)\left[f(t)\,x(t)\right]dt = f(0)\,x(0)$$

$$= \int \delta(t)\cdot f(0)\,x(t)\,dt$$

Derivate generalizzate

Un segnale derivabile a tratti è un segnale derivabile ovunque tranne che in un numero finito di punti $\{t_s\}_{s=1}^{m}$ nei quali c'è una discontinuità di salto:

$$\lim_{t \to t_s^-} x(t) = x(t_s^-) < +\infty$$

$$\lim_{t \to t_s^+} x(t) = x(t_s^+) < +\infty$$

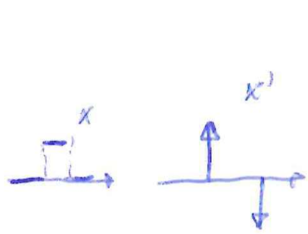
$$a_s \triangleq t_s^+ - t_s^-$$

Ponendo $$x_0(t) = x(t) - \sum_{k=1}^{m} a_k\, u(t - t_k)$$

cioè $$x(t) = x_0(t) + \sum_{k=1}^{m} a_k\, u(t - t_k)$$

Allora x è rappresentato come somma di un segnale derivabile x_0 e di m gradini. Siccome $\delta = u'$, possiamo introdurre la derivata generalizzata di x:

$$x'(t) = x_0'(t) + \sum_{k=1}^{m} a_k\, \delta(t - t_k)$$



Esempio 1 $\quad x(t) = \mathrm{rect}(t) \qquad x'(t) = \delta(t + 1/2) - \delta(t - 1/2)$

Esempio 2 $\quad x(t) = \Lambda(t) \qquad x'(t) = \mathrm{rect}(t + \tfrac{1}{2}) - \mathrm{rect}(t - \tfrac{1}{2}) \qquad x''(t) = \delta(t+1) - \delta(t) - \delta(t) + \delta(t-1)$

$$= \delta(t+1) - 2\delta(t) + \delta(t-1)$$

Delta discreta

L'abbiamo già definita: $\delta : n \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$

Ha proprietà simili alla δ di Dirac:

1) Campionamento: $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(n)\, x(n) = x(0)$

2) Rappresentazione con somme infinite

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(n-m)\, x(m)$$

3) Relazione con il gradino

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(n)$$

Detta $d_x(n) = x(n) - x(n-1)$ operatore differenza prima, ...

$$d_u(n) = u(n) - u(n-1) = \delta(n)$$