I segnali nel dominio del Tempo

Segnali a tempo continuo (t.c.)

- Sono funzioni di variabile reale e valore complesso:

$x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ esempio: $x(t) = e^{jt}$

caso particolare: segnale reale: $\forall t \in \mathbb{R}, \; x(t) \in \mathbb{R}$

- Quasi sempre, l'insieme di definizione dei segnali a tempo continuo sarà tutto l'asse reale
- Sceglieremo di considerare equivalenti due segnali che assumono valori distinti in un insieme discreto (o, a maggior ragione, finito) di punti. Vedere dopo "distanza tra segnali"

Segnali a Tempo discreto (t.d.)

$x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ "successioni bilatere"

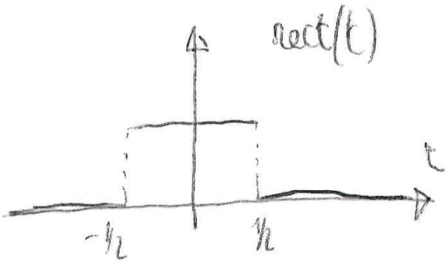
$x : \{0, 1, \dots N-1\} \to \mathbb{C}$ segnali t.d. periodici

Che differenza c'è tra segnali e funzioni? Matematicamente, nessuna. In pratica però, i segnali rappresentano una grandezza fisica d'interesse tipicamente in funzione del Tempo

Esempi di segnali particolarmente importanti

1. Impulso rettangolare, finestra rettangolare, rect

$$\text{rect}: t \in \mathbb{R} \to \begin{cases} 1 & \text{se } |t| < 1/2 \\ 0 & \text{se } |t| > 1/2 \end{cases}$$

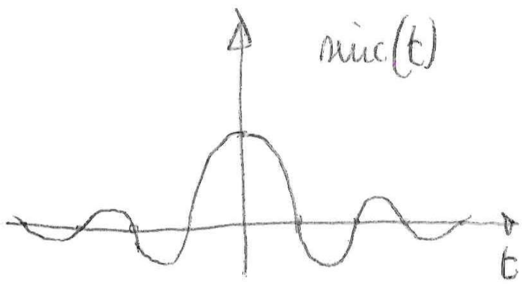


Inoltre, $\text{rect}(\pm 1/2) = 1/2$. Vedremo in seguito che, in un certo senso, il valore di un segnale in un punto "non ha importanza"

---

2 Seno cardinale o sinc

$$\text{sinc}: t \in \mathbb{R} = \begin{cases} 1 & \text{se } t = 0 \\ \frac{\sin \pi t}{\pi t} & \text{altrimenti} \end{cases}$$



- Funzione continua in $\mathbb{R}$: infatti $\lim_{t \to 0} \frac{\sin \pi t}{\pi t} = 1 = \text{sinc}(0)$
- Funzione infinitamente derivabile in $\mathbb{R}$ (si parla di "regolarità")
- $\text{sinc}(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_0$
- Funzione NON assolutamente integrabile

---

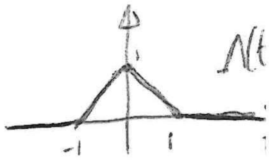
3 Gradino o step o $u(t)$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Funzione continua a tratti e derivabile a tratti

4 Triangolo o finestra Triangolare o $\Lambda(t)$

$$\Lambda(t) = (1-|t|)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) = \begin{cases} 1+t & \text{se } -1<t<0 \\ 1-t & \text{se } 0<t<1 \\ 0 & \text{se } |t|\geq 1 \end{cases}$$



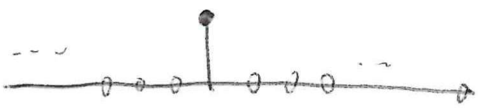
Funzione continua su $\mathbb{R}$, derivabile a tratti

5 Gradino a Tempo discreto $u(n)$

$$u : n \in \mathbb{Z} \to \begin{cases} 1 & \text{se } n \geq 0 \\ 0 & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

6 Delta discreta o Delta di Kronecker

$$\delta : n \in \mathbb{Z} \to \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$



KDOJPR

Parametri riassuntivi dei segnali

1 Valor medio
2 Energia e mutua energia
3 Potenza

1. Valor medio

Segnali a Tempo continuo.

Il valor medio nell'intervallo (t_1, t_2) del segnale x, il cui insieme di definizione include (t_1, t_2) è:

$$m_{(t_1,t_2)}(x) = \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} x(t)\,dt$$

Il valor medio su $\mathbb{R}$ di un segnale x definito su $\mathbb{R}$ è:

$$m(x) = \lim_{T\to+\infty} m_{(-T,T)}(x) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\,dt$$

Segnali a Tempo discreto

Il valor medio del segnale t.d. x nell'intervallo n_1, n_2 è

$$m_{(n_1,n_2)}(x) = \frac{1}{n_2-n_1+1}\sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)$$

Il valor medio su $\mathbb{Z}$ è $m(x) = \lim_{N\to+\infty} m_{(-N,N)}(x)$

LINEARITÀ $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{C},\ \forall x,y : I \to \mathbb{C},\quad m_I(\alpha x+\beta y) = \alpha m_I(x) + \beta m_I(y)$

---

2. Energia di un segnale

Si consideri una resistenza attraversata da una corrente $i(t)$.
La potenza istantanea assorbita è $p(t) = v(t)\cdot i(t) = Ri^2(t)$
L'energia dissipata nell'intervallo (t_1, t_2) è $\int_{t_1}^{t_2} Ri^2(t)\,dt$

In analogia a tale caso, si definisce <u>energia</u> nell'intervallo (t_1, t_2) del segnale a tempo continuo $x(t)$:

$$E_{(t_1,t_2)}(x) = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

Si sottintende che x sia ben definito in (t_1, t_2)

Siccome $\forall t \in (t_1, t_2)$, $|x(t)|^2 \geq 0$, allora $E_{(t_1,t_2)}(X) \geq 0$

Inoltre $E_{(t_1,t_2)}(X) = 0 \iff x(t)$ è sempre nullo, a eccezione al più di un insieme numerabile di punti

Se si omette di menzionare l'intervallo, s'intende $\mathbb{R}$:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \qquad \left(\text{più precisamente, } \lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt\right)$$

<u>Esempio</u>

$$E(\text{rect}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}^2(t)dt = \int_{-1/2}^{1/2} 1^2\, dt = 1$$

$$E(\Lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda^2(t)dt = \int_{-1}^{1} (1-|t|)^2 dt = 2\int_0^1 (1-t)^2 dt$$

$$= 2\int_0^1 (1-2t+t^2)dt = 2\left[t - t^2 + \tfrac{1}{3}t^3\right]_0^1 = 2/3$$

<u>Caso Tempo discreto</u>

$$E_{(n_1,n_2)}(X) = \sum_{n=n_1}^{n_2} |x(n)|^2 \qquad E(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)|^2$$

N.B. Alcuni segnali hanno energia infinita!

Esempi: $x(t) = \text{cost.} \neq 0$ $\qquad x(t) = \sin(\pi t)$

$x(n) = u(n)$ $\qquad x(n) = u(n)\cdot n^{-1/2}$

Mutua energia

$\boxed{T.C.}$ se x e y sono definiti nell'intervallo (t_1, t_2), la mutua energia in (t_1, t_2) è:

$$E_{(t_1,t_2)}(x,y) = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\,\overline{y}(t)\,dt$$

(notare che $E(x,y) \neq E(y,x)$ tranne casi particolari)

La definizione si estende ai segnali definiti su $\mathbb{R}$: $E_{\mathbb{R}}(x,y) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\,\overline{y}(t)\,dt$

$\boxed{T.D.}$ Se x e y sono definiti in $I \subseteq \mathbb{Z}$, $E_I(x,y) = \sum_{n\in I} x(n)\,\overline{y}(n)$

3 Potenza media

È il v.q.m. (valor quadratico medio) di $|x|$

3.1 Potenza media in un intervallo finito per segnali T.C.:

$$P_{(t_1,t_2)}(x) = \frac{E_{(t_1,t_2)}(x)}{t_2 - t_1}$$

3.2 Potenza media su $\mathbb{R}$ per segnali t.c.:

$$P(x) = \lim_{T\to+\infty} P_{(-T,T)}(x)$$

3.3 Potenza media in un intervallo finito per segnali t.d.:

$$P_{(n_1,n_2)}(x) = \frac{E_{(n_1,n_2)}(x)}{n_2 - n_1 + 1}$$

3.4 Potenza media su $\mathbb{Z}$ di segnali t.d.:

$$P(x) = \lim_{N\to+\infty} \frac{E_{(-N,N)}(x)}{2N+1}$$

Nota $E_x < +\infty \Rightarrow P_x = 0$; $0 < P_x < +\infty \Rightarrow E_x = +\infty$ | I primi sono detti segnali di energia
I secondi segnali di potenza

Spazi di segnali a energia finita

DEFINIZIONI

L'insieme dei segnali a energia finita t.c. definiti in $I \subseteq \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}^2(I) = \left\{ x : I \to \mathbb{C} \ : \ \int_I |x(t)|^2 dt < +\infty \right\}$$

L'insieme dei segnali t.d. a energia finita è:

$$\ell^2 = \left\{ x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \ : \ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 < +\infty \right\}$$

TEOREMA $\mathcal{L}^2(I)$ e ℓ^2 sono spazi vettoriali rispetto alle usuali operazioni di somma tra segnali e di prodotto tra un segnale ed uno scalare (di $\mathbb{C}$)

(NB. il caso $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ è un caso particolare)

DIM. Ci servono alcuni risultati preliminari.

1. $\forall v, w \in \mathbb{C}$, $2|v| \cdot |w| \leq |v|^2 + |w|^2$

Basta considerare che $0 \leq (|v| - |w|)^2 = |v|^2 + |w|^2 - 2|v| \cdot |w|$

2. $\forall v, w \in \mathbb{C}$ $v\bar{w} + \bar{v}w = v\bar{w} + \overline{v\bar{w}} = 2\,\mathrm{Re}\,(v\bar{w}) \leq 2|v\bar{w}| = 2|v||w|$

Quindi per il punto 1, $\forall v, w \in \mathbb{C}$, $v\bar{w} + \bar{v}w \leq |v|^2 + |w|^2$

3 $\forall v, w \in \mathbb{C}$, $|v + w|^2 \leq 2|v|^2 + 2|w|^2$

Infatti $|v+w|^2 = (v+w)(\bar{v}+\bar{w}) = |v|^2 + |w|^2 + v\bar{w} + \bar{w}v \leq |v|^2 + |w|^2 + |v|^2 + |w|^2$ per il punto 2

Adesso, siano x_1 e x_2 due segnali di $\mathcal{L}^2(I)$. Per quanto detto,

$$\forall t \in I, \quad |x_1(t) + x_2(t)|^2 \leq 2|x_1(t)|^2 + 2|x_2(t)|^2$$

Ma tale funzione è integrabile su I, perché x_1 e x_2 sono a energia finita

Allora anche $|x_1(t)+x_2(t)|^2$ è integrabile su I, il che equivale a dire che $x_1+x_2 \in \mathcal{L}^2(I)$

Bisogna anche dimostrare che, $\forall x \in \mathcal{L}^2(I)$ e $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha x \in \mathcal{L}^2(I)$:

Se $|x(t)|^2$ è integrabile su I, anche $|\alpha x(t)|^2 = |\alpha|^2 \cdot |x(t)|^2$ lo è.
Basta applicare la linearità dell'integrale

Nel caso T.discreto la dimostrazione è formalmente identica, sostituendo "integrabile su I" con "sommabile su $\mathbb{Z}$"

W

Energia mutua e prodotto scalare

Teorema

Se x_1 e $x_2 \in \mathcal{L}^2(I)$, la loro energia mutua è finita

DIM Infatti, $\forall t \in I$, $|x_1(t) \cdot \bar{x}_2(t)| = |x_1(t)|\,|x_2(t)| \leq \frac{1}{2}|x_1(t)|^2 + \frac{1}{2}|x_2(t)|^2$

Per i lemmi dimostrati a pag. 7.

Quindi $|x_1(t) \cdot \bar{x}_2(t)|$ è maggiorata da una funzione integrabile, per cui lo è essa stessa. In altre parole, $|E_I(x,y)| < +\infty$

Analogamente per il caso di segnali discreti (spazio ℓ^2)

Teorema

L'energia mutua è un prodotto scalare in $\mathcal{L}^2(I)$, $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, ℓ^2

DIM. Come prima, effettuiamo la dim. per $\mathcal{L}^2(I)$. Negli altri casi è facilmente estendibile

Abbiamo già provato che, $\forall x, y \in \mathcal{L}^2(I)$, $|E_I(x,y)| < +\infty$

Rimane da verificare, usando la notazione $\langle x,y\rangle = E_I(x,y)$, che:

1) $\forall x, y \in \mathcal{L}^2$, $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

2) $\begin{cases} \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} \\ \forall x_1, x_2, y \in \mathcal{L}^2 \end{cases}$, $\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y\rangle = \alpha_1 \langle x_1, y\rangle + \alpha_2 \langle x_2, y\rangle$

3) $\forall x \in \mathcal{L}^2$ $\langle x,x\rangle \in \mathbb{R}^+$ e $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Tutte queste proprietà si dimostrano facilmente usando le definizioni. Osserviamo che

$$\langle x, x\rangle = \int_I x(t)\,\bar{x}(t)\,dt = \int_I |x(t)|^2 dt = E_I(x)$$

Sappiamo già che $E_I(x) = 0$ se $x(t) = 0$ "quasi ovunque", dove "quasi ovunque" significa a meno di un insieme numerabile di punti

Gli spazi $\mathcal{L}^2(I)$, $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ e ℓ^2 sono quindi <u>spazi euclidei</u> e possono essere visti come <u>spazi metrici</u> con la norma indotta dal prodotto scalare

> Proprietà assiomatiche della norma:
> V spazio vettoriale
> $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ tale che:
> 1) $\forall x \in V$, $\|x\| \geq 0$
> 2) $\|x\| = 0 \iff x = 0$
> 3) $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$
> 4) $\forall x, y \in V$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

<u>Norma di un segnale $\mathcal{L}^2$ o ℓ^2</u>

Se $x \in \mathcal{L}^2$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{E(x)}$

Inoltre $\|x\| = 0 \iff x = 0$

Ma sappiamo che anche un segnale non nullo in un insieme numerabile ha energia (e quindi norma) nulla. (⚠ Questo solo in $\mathcal{L}^2$ perché in ℓ^2 $\|x\| = 0 \iff x_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}$!)

Che significa? Significa che, per usare la struttura algebrica di spazio metrico, tutti i segnali che differiscono in un insieme numerabile di punti, devono essere considerati come lo stesso segnale. Praticamente, questa assunzione ha sen

In conclusione, avremo quattro spazi metrici d'interesse:

1) $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ segnali di energia su $\mathbb{R}$ $\quad \langle x,y\rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t)\,\bar{y}(t)\,dt$

2) $\mathcal{L}^2(t_1,t_2)$ segnali di energia su un interv. $\quad \langle x,y\rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\,\bar{y}(t)\,dt$

3) ℓ^2 segnali T.d. di energia $\quad \langle x,y\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\,\bar{y}(n)$

4) $\mathbb{C}^N$ "segnali finiti" $\quad \langle x,y\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,\bar{y}(n)$

Per tutti questi spazi metrici vale la disuguaglianza di

$$\boxed{\text{Cauchy - Schwarz:} \quad |\langle x,y\rangle| \le \|x\|\cdot\|y\|}$$

Inoltre abbiamo la definizione di ortogonalità:

Se V è uno spazio metrico, $x,y \in V$ sono detti ortogonali se e solo se $\langle x,y\rangle = 0$ e si indica con $x \perp y$

In tal caso, anche $\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle} = 0$

Teorema di Pitagora Se V è uno spazio metrico,

$$x,y \in V \text{ e } x\perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

DIM.
$$\|x+y\|^2 = \langle x+y,\, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \underbrace{\langle x,y\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y,x\rangle}_{=0} + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Distanza tra segnali

La distanza tra due segnali in uno spazio metrico S la norma della differenza:

$$\forall x, y \in S, \quad d(x, y) = \| x - y \| \geq 0$$

Per definizione di norma, $\| x - y \| = 0 \iff x = y$

Questo ci porta a ridefinire il concetto di uguaglianza: in uno spazio metrico, due segnali sono uguali se e solo se la loro differenza ha energia nulla

Per i segnali discreti vuol dire che $\forall n \in \mathbb{Z}, \ x(n) = y(n)$

Per i segnali continui vuol dire che l'insieme $I = \{ t \in \mathbb{R} : x(t) \neq y(t) \}$ ha misura nulla

cioè x e y possono differire in un insieme discreto di punti, ma non in un intervallo

Altri spazi di segnali importanti

Segnali tempo discreto:

l^1 o $l^1(\mathbb{Z})$: segnali assolutamente sommabili:

$$x \in l^1(\mathbb{Z}) \iff \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)| < +\infty$$

l^∞ o $l^\infty(\mathbb{Z})$: segnali limitati

$$x \in l^\infty(\mathbb{Z}) \iff \exists M \in \mathbb{R}^+ : \ \forall n \in \mathbb{Z}, \ |x(n)| < M$$

- Si può provare che l^1 e l^∞ sono anch'essi spazi vettoriali
- Si può introdurre la norma per l^1 e per l^∞:

$$\forall x \in l^1, \quad \|x\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|$$

$$\forall x \in l^\infty, \quad \|x\|_\infty = \sup_n \{x_n\}$$

Per definizione di l^1, $\forall x \in l^1$ $\|x\|_1 < +\infty$

Per " di l^∞, $\forall x \in l^\infty$ $\|x\|_\infty < +\infty$

Quindi anche l^1 e l^∞ sono spazi metrici

Similmente si definiscono:

$$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) = \left\{ x : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \; : \; \int_{\mathbb{R}} |x(t)|\,dt < +\infty \right\}$$

$$\forall x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \quad \|x\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|\,dt < +\infty$$

$$\mathcal{L}^1(t_1, t_2) = \left\{ x : (t_1, t_2) \to \mathbb{C} \; : \; \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|\,dt < +\infty \right\}$$

$$\forall x \in \mathcal{L}^1(t_1, t_2) \quad \|x\|_1 = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|\,dt < +\infty$$

$$\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) = \left\{ x : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \; : \; \exists M \in \mathbb{R} \text{ e } \forall t \in \mathbb{R}, \; |x(t)| < M \right\}$$

$$\|x\|_\infty = \sup \{|x(t)|\}_{t \in \mathbb{R}} < +\infty$$

$$\mathcal{L}^\infty(I) = \left\{ x : I \to \mathbb{C} \; : \; \exists M \in \mathbb{R} \text{ e } \forall t \in I \; |x(t)| < M \right\}$$

$$\|x\|_\infty = \sup \{|x(t)|\}_{t \in I} < +\infty$$

Si può provare che Tutti gli spazi
$\mathcal{L}^2$, l^2, $\mathcal{L}^1$, l^1, $\mathcal{L}^\infty$, l^∞ sono completi

cioè ogni successione di Cauchy in ognuno di Tali spazi converge ad un elemento di Tale spazio

Relazioni d'inclusione

1) $l^\infty \supset l^2 \supset l^1$

2) $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

3) Funzioni a supporto finito: dato $A \in \mathbb{R}^+$,
$S(A)$ è l'insieme delle funzioni x da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ Tali che
$\forall\ |t| > A$, $x(t) = 0$.
Allora, $\forall A \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap S(A) \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Simmetrie

(relazioni che devono valere $\forall t \in \mathbb{R}$)

$x(t) = \overline{x(t)} \iff x$ è reale

$x(t) = -\overline{x(t)} \iff x$ è immaginario puro

$x(t) = x(-t) \iff x$ è pari

$x(t) = -x(-t) \iff x$ è dispari

$x(t) = \overline{x(-t)} \iff x$ è hermitiano

$x(t) = -\overline{x(-t)} \iff x$ è antihermitiano

Dato $x(t)$ definito su $\mathbb{R}$, la sua parte pari è $x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$

la sua parte dispari è $x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$

e $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$

Segnali periodici a Tempo continuo

DEF. Sia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$; se $\exists T > 0 : \ \forall t \in \mathbb{R} \ \ x(t+T) = x(t)$,

allora si dice che x è periodico di periodo T

In effetti, se x è periodico di periodo T, lo è anche di periodo $2T$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t+2T) = x(t+2T-T) = x(t+T) = x(t)$$

Generalizzando x periodico di periodo $T \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}_0$, x periodico di per. kT

Periodo fondamentale: Dato un segnale periodico non costante, il più piccolo periodo è detto periodo fondamentale

D'ora in poi, intenderemo il periodo fondamentale

Per i segnali periodici è interessante considerare i parametri riassuntivi in un periodo:

Valor medio in un periodo: $\displaystyle m_T(x) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$

Energia " " : $\displaystyle E_T(x) = \int_0^T |x(t)|^2\,dt = \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2\,dt \quad \forall t_0$

Potenza " " : $\displaystyle P_T(x) = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2\,dt = \frac{E_T(x)}{T}$

Energia e potenza in $(0,T)$ e in $\mathbb{R}$

Se $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \neq 0$ e periodico di periodo T,

$$E_T(x) > 0 \quad \text{e} \quad \underbrace{E(x)}_{\uparrow\ \text{su } \mathbb{R}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+T} |x(t)|^2\,dt = \sum_k E_T(x) = +\infty$$

Invece

$$P(x) = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} |x(t)|^2 dt$$

Sia ora $K = \left\lfloor \frac{\tau}{T} \right\rfloor$; quindi $\exists_{0<\tau_0<T} : \quad \tau = KT + \tau_0$

Allora

$$\int_{-\tau}^{\tau} |x(t)|^2 dt = \int_{-\tau_0 - kT}^{-kT} |x(t)|^2 dt + \sum_{n=-k}^{k} \int_{nT}^{(n+1)T} |x(t)|^2 dt$$

$$+ \int_{kT}^{kT+\tau_0} |x(t)|^2 dt$$

(per periodicità)

$$= \int_{-\tau_0}^{0} |x(t)|^2 dt + (2K+1) E_T(x) + \int_{0}^{\tau_0} |x(t)|^2 dt$$

$$P(x) = \lim_{\tau \to +\infty} \quad \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} |x(t)|^2 dt + \frac{2K+1}{2kT + 2\tau_0} E_T(x)$$

$$P(x) = \frac{E_T(x)}{T} = P_T(x)$$

La potenza di un segnale periodico si può calcolare su di un periodo

---

Segnale sinusoidale in forma canonica

È il segnale

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

con $A \in \mathbb{R}^+$

$\omega_0 \in \mathbb{R}^+$

$\varphi \in [-\pi, \pi)$

Domanda

Perché A e ω_0 sono positivi?

Vedere esempi a pag.

oppure

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

con $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$, $\omega_0 = 2\pi f_0$

Riflettere
Che segnale otteniamo per $T \to +\infty$? Si ha $\omega \to 0$, e quindi $x \to A\cos\varphi$ costante

Il periodo è $T = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Calcolare energia in un periodo, potenza in un periodo e in $\mathbb{R}$

$$E_T(x) = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} A^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi)\,dt = \int_0^{2\pi/\omega_0} \frac{A^2}{2}\left(1+\cos(2\omega_0 t+2\varphi)\right)d\varphi$$

$$= \frac{A^2}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{A^2\pi}{\omega_0}$$

Potenza in un periodo: $P_T(x) = \frac{E_T(x)}{T} = \frac{A^2\pi}{\omega_0}\cdot\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{A^2}{2}$

Potenza in $\mathbb{R}$ = $P(x) = P_T(x) = A^2/2$

I segnali periodici sono <u>segnali di potenza</u>

<u>Esponenziale immaginario</u> in forma canonica

$$x(t) = Ae^{j(\omega_0 t+\varphi)} = A\cos(\omega_0 t+\varphi) + jA\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

$$= A\cos(\omega_0 t+\varphi) + jA\cos\left(\omega_0 t+\varphi-\frac{\pi}{2}\right)$$

Periodo: $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Infatti $x\left(t+\frac{2\pi}{\omega_0}\right) = Ae^{j(\omega_0 t+2\pi+\varphi)} = Ae^{j(\omega_0 t+\varphi)}\,\overbrace{e^{j2\pi}}^{1} = x(t)$

Energia in un periodo $E_T(x) = \int_0^{2\pi/\omega_0} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} |Ae^{j(\omega_0 t+\varphi)}|^2\,dt = \frac{2\pi}{\omega_0}\cdot A^2$

Potenza $P_T(x) = P(x) = \frac{E_T(x)}{T} = \frac{2\pi}{\omega_0}A^2\cdot\frac{\omega_0}{2\pi} = A^2$