Wooclap:
BMFRHO

Segnali e Sistemi

Aritmetica ed algebra dei numeri complessi

Adotteremo un approccio pragmatico alla aritmetica ed all'algebra dei numeri complessi, invece dell'approccio assiomatico usato in corsi di matematica

Un numero complesso si esprime in termini di:

parte reale: $\alpha \in \mathbb{R}$

coefficiente della parte immaginaria: $\beta \in \mathbb{R}$

unità immaginaria: indicata con j, caratterizzata da $\boxed{j^2 = -1}$

L'insieme dei complessi $\mathbb{C}$ è formato dai numeri esprimibili come segue:

Parte reale, $\mathrm{Re}(a)$

$$a \in \mathbb{C} \iff \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \quad a = \boxed{\alpha} + \boxed{j}\boxed{\beta}$$

coeff. immaginario $\mathrm{Im}(a)$

unità immaginaria

L'aritmetica e l'algebra dei complessi sono formalmente delle semplici estensioni dei corrispettivi reali.

Esempi

Somma: $(2+3j) + (-1-j) = 1+2j$

Prodotto: $(1+j)\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}j\right) = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2} - \frac{1}{2}j + \frac{1}{2} = 1$

In generale, il prodotto si può esprimere così:

Se $a \in \mathbb{C}$ e $a = \alpha + j\beta$, $b \in \mathbb{C}$ e $b = \gamma + j\delta$

allora $a \cdot b = (\alpha + j\beta)(\gamma + j\delta) = (\alpha\gamma - \beta\delta) + j(\alpha\delta + \beta\gamma)$

Reciproco Ogni complesso diverso da zero è dotato di reciproco:

$\forall a \in \mathbb{C}_0$, si definisce $a^{-1} \doteq \dfrac{1}{\alpha + j\beta}$

Usando il formalismo dell'aritmetica complessa, si ha:

$$a^{-1} = \frac{1}{\alpha + j\beta} = \frac{\alpha - j\beta}{(\alpha + j\beta)(\alpha - j\beta)} = \frac{\alpha - j\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

Quindi $\mathrm{Re}(a^{-1}) = \dfrac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$ $\qquad \mathrm{Im}(a^{-1}) = \dfrac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$

Notiamo che, se $\beta = 0$, $a = \alpha \in \mathbb{R}$ e $a^{-1} = \dfrac{\alpha}{\alpha^2 + 0} - j\dfrac{0}{\alpha^2 + 0} = \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{a}$

Esempio $\dfrac{1}{j} = \dfrac{j}{j^2} = -j$

Divisione Se $a \in \mathbb{C}$ e $b \in \mathbb{C}_0$ (cioè $b \neq 0$), definiamo $\dfrac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$

Per il calcolo, basterà usare il formalismo algebrico

Esempio $\dfrac{3+4j}{1+j} = \dfrac{(3+4j)(1-j)}{(1+j)(1-j)} = \dfrac{3+4j-3j+4}{1-j^2} = \dfrac{7+j}{2} = \dfrac{7}{2} + j\dfrac{1}{2}$

Potenze intere di numeri complessi

$\forall n \in \mathbb{Z}_0^+$, $\forall a \in \mathbb{C}$, $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ volte}}$

$\forall n \in \mathbb{Z}_0^-$, $\forall a \in \mathbb{C}_0$, $a^{-n} = \underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdots a^{-1}}_{n \text{ volte}}$

Per $n = 0$, $\forall a \in \mathbb{C}_0$, $a^0 = 1$

Esercizio Calcolare j^n $\forall n \in \mathbb{Z}$

$j^0 = 1$ $\quad j^1 = j$ $\quad j^2 = -1$ $\quad j^3 = j \cdot j^2 = -j$ $\quad j^4 = (j^2)^2 = 1$

Siccome $j^4 = 1$, sia, $\forall n \in \mathbb{Z}$ $k = n \bmod 4$

cioè k è il resto della divisione intera in diviso. 4
notiamo che k è funzione periodica di n.

Infatti $k(0) = 0$ (cioè $0 \div 4 = 0$ col resto di 0)

$k(1) = 1$ (cioè $1 \div 4 = 0$ col resto di 1)

$k(2) = 2$ (cioè $2 \div 4 = 0$ col resto di 2)

$k(3) = 3$ (cioè $3 \div 4 = 0$ col resto di 3)

$k(4) = 0$ (cioè $4 \div 4 = 1$ col resto di 0)

$k(-1) = 3$ (cioè $-1 \div 4 = -1$ col resto di 3)

quindi $\exists m \in \mathbb{Z}$ tale che $n = 4 \cdot m + k$

Allora $j^n = j^{4m+k} = j^{4m} \cdot j^k = j^k$

Quindi j^n è una successione periodica: $\ldots \overset{n=0}{\downarrow}{1}, j, -1, -j, 1, j, -1, -j \ldots$

Funzioni di variabile complessa $f: z \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Per il momento sappiamo definire funzioni algebriche:

$$f(z) = \frac{\sum_i a_i z^i}{\sum_j b_j z^j}$$

sappiamo calcolare f, anche quando i e j assumono valori negativi

Coniugio

Dato $a = \alpha + j\beta \in \mathbb{C}$, si definisce "coniugato di a" e si indica con $\bar{a}$, il numero complesso $\bar{a} = a - j\beta$

Esempi

$a = 3 + j \Rightarrow \bar{a} = 3 - j$

$a = -4 - j \Rightarrow \bar{a} = -4 + j$

Proprietà del coniugio

1) Somma: $\overline{(a+b)} = \bar{a} + \bar{b}$, $\forall a, b \in \mathbb{C}$

2) Prodotto per un reale: $\forall a \in \mathbb{C}, \forall k \in \mathbb{R}, \overline{(ka)} = k\bar{a}$

3) Prodotto in $\mathbb{C}$: $\forall a, b \in \mathbb{C}, \overline{(a \cdot b)} = \bar{a} \cdot \bar{b}$

Esercizio Dimostrare le proprietà del coniugio. Poniamo $a = \alpha + j\beta$, $b = \gamma + j\delta$

1) $\overline{(a+b)} = \overline{(\alpha + j\beta + \gamma + j\delta)} = \overline{(\alpha + \gamma + j(\beta + \delta))} = \alpha + \gamma - j\beta - j\delta = \bar{a} + \bar{b}$

2) $\overline{(ka)} = \overline{[k(\alpha + j\beta)]} = \overline{k\alpha + jk\beta} = k\alpha - jk\beta = k(\alpha - j\beta) = k\bar{a}$

3) $\overline{(ab)} = \overline{(\alpha\gamma - \beta\delta + j(\alpha\delta + \beta\gamma))} = \alpha\gamma - \beta\delta - j\alpha\delta - j\beta\gamma = \gamma(\alpha - j\beta) +$

$- j\delta\alpha - \beta\delta = \gamma(\alpha - j\beta) - j\delta\alpha + j\delta j\beta = \gamma(\alpha - j\beta) - j\delta(\alpha - j\beta)$

$= (\alpha - j\beta)(\gamma - j\delta) = \bar{a} \cdot \bar{b}$

Modulo di un numero complesso

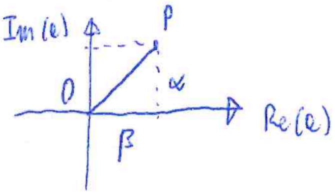
$\forall a \in \mathbb{C}$, il modulo di a, indicato con $|a|$ è definito come:

$$|a| = \sqrt{Re(a)^2 + Im(a)^2} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

Osserviamo che $|a| \in \mathbb{R}^+$ e $|a| = 0 \iff a = 0$

Piano complesso (piano di Gauss)

Associamo ad ogni $a \in \mathbb{C}$ un punto P del piano, con ascissa $Re(a)$ e ordinata $Im(a)$.



Lo zero è associato all'origine O

Il modulo di a è la distanza di P da O

Esercizi

Calcolare i moduli di $3-4j$, $2+j$, $\bar{a}$

$$|3-4j| = \sqrt{9+16} = 5$$

$$|2+j| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{\alpha^2 + (-\beta)^2} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = |a|$$

Abbiamo trovato che, $\forall a \in \mathbb{C}$, $|\bar{a}| = |a|$

Successioni di numeri complessi

Sono applicazioni da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{C}$

Esempio: $\forall n \in \mathbb{Z}$, $z_n = j^n \in \mathbb{C}$ z_n è una succ. di complessi

Convergenza di una successione di numeri complessi

Data la successione z_n e dato $z \in \mathbb{C}$, diremo che

$z_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} z$ (cioè z_n converge a z per n crescente)

se e solo se la successione di numeri reali $k_n = |z_n - z|$

è infinitesima per n crescente

Possiamo adesso definire le serie di numeri complessi e grazie alle serie, estendere le funzioni elementari di $\mathbb{R}$ all'insieme $\mathbb{C}$, semplicemente usando le serie con gli stessi coefficienti

L'esempio più importante è l'esponenziale complesso

Esponenziale complesso

Ricordiamo che, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$

Allora, formalmente possiamo definire la funzione esponenziale nel campo complesso:

$$\forall a \in \mathbb{C}, \quad e^{a} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} \qquad (1)$$

Teorema (senza dimostrazione)

1) $\forall a \in \mathbb{C}$, la serie (1) converge ad un elemento di $\mathbb{C}$

2) $\forall a, b \in \mathbb{C} \qquad e^{a+b} = e^{a} \cdot e^{b}$

Questo teorema ci assicura che l'espressione e^{a} ha senso per qualsiasi scelta di $a \in \mathbb{C}$ e che possiamo formalmente manipolare gli esponenziali complessi come quelli reali

<u>Esponenziale immaginario puro</u>

Qualunque sia $a \in \mathbb{C}$, abbiamo $\quad e^{a} = e^{\alpha + j\beta} = e^{\alpha} \cdot e^{j\beta}$

Sappiamo bene qual è il comportamento di e^{α}

È importante adesso capire il comportamento di $e^{j\beta}$,

cioè la funzione esponenziale immaginaria pura. Dalla (1),

$$\forall \beta \in \mathbb{R}, \quad e^{j\beta} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(j\beta)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(j\beta)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(j\beta)^{2m+1}}{(2m+1)}$$

Ma $j^{2n} = (-1)^n$ e $j^{2m+1} = j \cdot j^{2m} = j \cdot (-1)^m$. Quindi

$$e^{j\beta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} \beta^{2n} + j \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \beta^{2m+1}$$

Riconosciamo gli sviluppi in serie di MacLaurin delle funzioni seno e coseno. Si ottiene allora la fondamentale **formula di Eulero**

$$\boxed{e^{j\beta} = \cos\beta + j\,\text{sen}\,\beta}$$

W 6-8

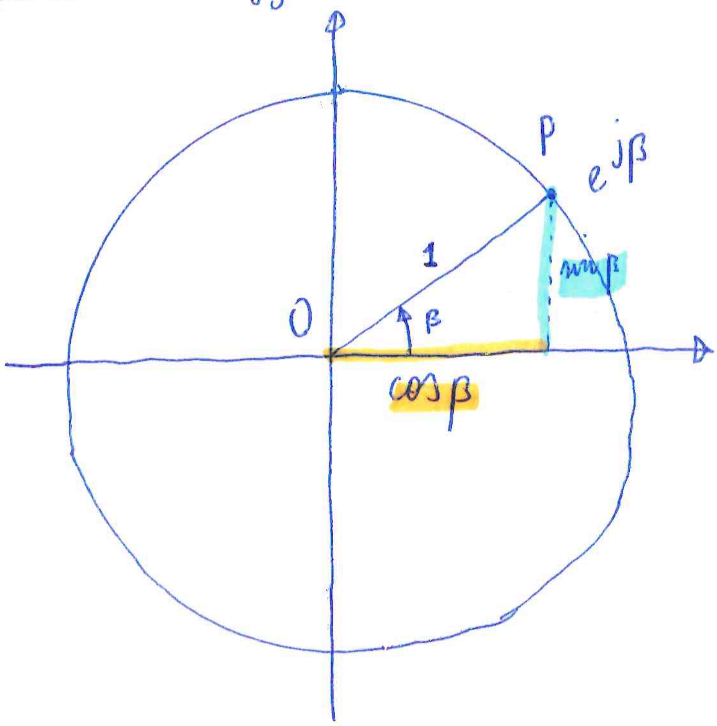
Rappresentiamo ora $e^{j\beta}$ nel piano complesso.

Le sue coordinate sono $\cos\beta$ e $\text{sen}\,\beta$

La distanza dall'origine è

$$|e^{j\beta}| = \sqrt{\cos^2\beta + \text{sen}^2\beta} = 1 \qquad \text{qualunque sia } \beta$$

Quindi, al variare di β, $e^{j\beta}$ percorre la circonferenza di raggio unitario con centro nell'origine



Il punto P sulla circonferenza unitaria è l'immagine di $z = e^{j\beta}$

Si dice anche che z è l'affine di P

<u>Esercizio</u>

1. Calcolare $e^{j\beta}$ per $\beta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
2. Calcolare $e^{j\beta}$ per $\beta = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
3. Mostrare che $e^{j\beta}$ è una funzione periodica di β, e calcolarne il periodo

<u>Soluzione</u>

$$e^{j\beta} = \cos\beta + j \operatorname{sen}\beta$$

1. $\beta = 2k\pi \Rightarrow e^{j\beta} = \cos(2k\pi) + j\operatorname{sen}(2k\pi) = 1 + j\cdot 0 = 1$

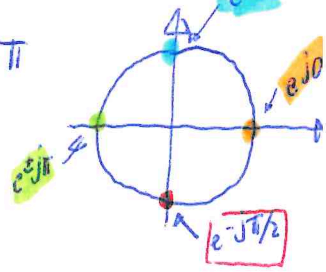
2. $\beta = (2k+1)\pi \Rightarrow e^{j\beta} = \cos(2k+1)\pi + j\sin(2k+1)\pi = -1 + j\cdot 0 = -1$

3. Poniamo $\beta_1 = \beta + 2k\pi$ con $\beta \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$. Si ha:

$$e^{j\beta_1} = e^{j(\beta + 2k\pi)} = e^{j2k\pi} \cdot e^{j\beta} = e^{j\beta} \quad (\text{per } 1)$$

Questa è la definizione di periodicità.

Quindi la funzione complessa di variabile reale $f(\beta) = e^{j\beta}$ è periodica di periodo $2k\pi$



Il periodo fondamentale è 2π

<u>Esercizio</u> 4. Calcolare $e^{j\beta}$ per $\beta = \pm\pi/2 + 2k\pi$

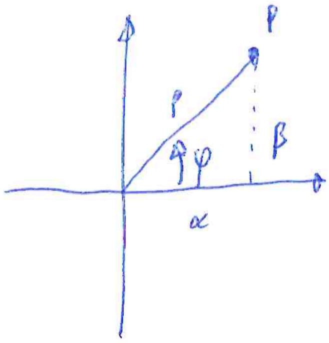
$$e^{j(\pm\pi/2 + 2k\pi)} = e^{\pm j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j2k\pi} = e^{\pm j\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 0 \pm 1\cdot j = \pm j$$

Forma polare e forma cartesiana dei numeri complessi

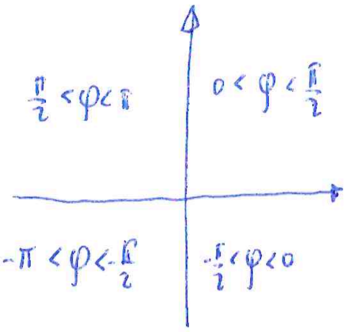
Il numero complesso $z = \alpha + j\beta$ è l'affisso del punto $P \equiv (\alpha, \beta)$

Siano (ρ, φ) le coordinate polari di P



Si ha $\begin{cases} \alpha = \rho\cos\varphi \\ \beta = \rho\sin\varphi \end{cases}$

e $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ (ρ modulo di z) $\qquad \varphi = \mathrm{arctg2}(\alpha, \beta)$ (φ fase o argomento di z)



La funzione arctg2 fornisce l'argomento principale, cioè il valore di $\varphi \in (-\pi, \pi)$

$$\varphi = \mathrm{arctg2}(\alpha,\beta) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \text{ e } \beta = 0 \quad \text{(reali positivi)} \\ \mathrm{arctg}\frac{\beta}{\alpha} & \text{se } \alpha > 0, \beta > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } \alpha = 0, \beta > 0 \quad \text{(immaginari puri a coeff. positivo)} \\ \mathrm{arctg}\frac{\beta}{\alpha} + \pi & \text{se } \alpha < 0, \beta > 0 \\ \pi & \text{se } \alpha < 0, \beta = 0 \quad \text{(reali negativi)} \\ \mathrm{arctg}\frac{\beta}{\alpha} - \pi & \text{se } \alpha < 0, \beta < 0 \\ -\pi/2 & \text{se } \alpha = 0, \beta < 0 \quad \text{(immaginari puri a coeff. negativo)} \\ \mathrm{arctg}\frac{\beta}{\alpha} & \text{se } \alpha > 0, \beta < 0 \end{cases}$$

N.B. Il numero 0 non è dotato di argomento. In altre parole, l'argomento di zero non è definito

Rappresentazione di un numero complesso in modulo e fase

Sia $a = \alpha + j\beta$; esprimiamolo tramite ρ e φ:

$$a = \alpha + j\beta = \rho\cos\varphi + \rho j \sin\varphi = \rho(\cos\varphi + j\sin\varphi) = \rho e^{j\varphi}$$

$$\boxed{\alpha + j\beta = \rho e^{j\varphi}}$$

Quindi un numero complesso si esprime equivalentemente usando due coppie di numeri reali

1) Rappresentazione cartesiana $a = \alpha + j\beta$

$\alpha = \mathrm{Re}(a) \in \mathbb{R}$, $\beta = \mathrm{Im}(a) \in \mathbb{R}$

Coordinate cartesiane del punto P di cui a è l'affisso

2) Rappresentazione polare $a = \rho e^{j\varphi}$

$\rho = |a| \in \mathbb{R}^+$ $\qquad \varphi = \angle a \in \mathbb{R}$ (oppure $\varphi = \arg a$)

coordinate polari di P

φ può variare in $\mathbb{R}$, ma $\varphi' = \varphi + 2k\pi$ dà lo stesso effetto di φ. Il valore di φ compreso in $(-\pi, \pi)$ è detto argomento principale, talvolta indicato con Arg

... si ottiene con la funzione arctg2

Esercizio

1. Trovare la forma polare di $a = \sqrt{2} - j\sqrt{2}$

$$|a| = \sqrt{2+2} = 2$$

Siccome $\alpha > 0$ e $\beta < 0$ la fase (o l'argomento principale) è compresa tra $-\pi/2$ e 0

Si ha $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

Quindi $a = \sqrt{2} - j\sqrt{2} = 2e^{-j\frac{\pi}{4}}$

2. Trovare la forma cartesiana di $a = 2e^{-j\pi/3}$

Si ha $\operatorname{Re}(a) = 2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot 1/2 = 1$

$\operatorname{Im}(a) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$

Quindi $a = 1 - j\sqrt{3} = 2e^{-j\pi/3}$

W 9 - 16

Coniugio e rappresentazione polare

$$\bar{a} = \alpha - j\beta = \rho\cos\varphi - j\rho\sin\varphi = \rho\cos(-\varphi) - j\rho\sin(-\varphi) = \rho e^{-j\varphi}$$

Quindi $\operatorname{Arg}\bar{a} = -\operatorname{Arg} a$ o anche $\angle\bar{a} = -\angle a$

Riassunto proprietà importanti

1) Rappresentazione dei numeri complessi

$$a = \alpha + j\beta = \rho e^{j\varphi} = \rho\cos\varphi + j\rho\sin\varphi$$

$Re(a) = \rho\cos\varphi = \alpha$ $\qquad |a| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \rho$

$Im(a) = \rho\sin\varphi = \beta$ $\qquad \angle a = \text{arctg}2(\alpha,\beta) = \varphi$

2) coniugio

$\bar{a} = \alpha - j\beta = \rho e^{-j\varphi}$ quindi $|\bar{a}| = a$ $\quad \angle\bar{a} = -\angle a$

3) Modulo $\quad |a| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = |\bar{a}|$

$$a \cdot \bar{a} = (\alpha+j\beta)(\alpha-j\beta) = \alpha^2+\beta^2 = |a|^2 = |\bar{a}|^2$$

$\forall\varphi \in \mathbb{R}, \quad |e^{j\varphi}| = 1$ $\qquad \forall k \in \mathbb{R}, \quad |ka| = |k\rho e^{j\varphi}| = k\rho = k|a|$

$$|a \cdot b| = |\rho_a e^{j\varphi_a} \rho_b e^{j\varphi_b}| = \rho_a\rho_b |e^{j(\varphi_a+\varphi_b)}| = \rho_a\rho_b = |a|\cdot|b|$$

4) Fase $\quad \angle a = \angle(\rho e^{j\varphi}) = \varphi$

$\angle a \cdot b = \angle(\rho_a e^{j\varphi_a} \rho_b e^{j\varphi_b}) = \angle(\rho_a\rho_b e^{j(\varphi_a+\varphi_b)}) = \varphi_a + \varphi_b = \angle a + \angle b$

$\angle\bar{a} = -\angle a$

5) Reale e Imm: $\quad Re(a) = \frac{a+\bar{a}}{2}$ $\qquad Im(a) = \frac{a-\bar{a}}{2j}$

6) Eulero: $\quad e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$ $\qquad \cos\varphi = \frac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2}$

$$\sin\varphi = \frac{e^{j\varphi}-e^{-j\varphi}}{2}$$