Esercizi proposti 1
soluzioni

Numeri complessi

1.1

Siano $a_1 = 4 - 5j$ e $a_2 = 2 + 3j$. Calcolare in forma cartesiana

$$a_1 a_2, \quad \frac{1}{a_2}, \quad \frac{a_2}{a_1}, \quad (a_1 + a_2)^2, \quad \frac{a_1}{a_1 + a_2}.$$

Soluzione

$$\begin{aligned}
a_1 a_2 &= (4 - 5j)(2 + 3j) = 23 + 2j \\
\frac{1}{a_2} &= \frac{\overline{a_2}}{|a_2|^2} = \frac{2 - 3j}{13} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}j \\
\frac{a_2}{a_1} &= \frac{a_2 \overline{a_1}}{|a_1|^2} = \frac{(2 + 3j)(4 + 5j)}{41} = -\frac{7}{41} + \frac{22}{41}j \\
(a_1 + a_2)^2 &= (6 - 2j)^2 = 36 - 24j - 4 = 32 - 24j \\
\frac{a_1}{a_1 + a_2} &= \frac{4 - 5j}{6 - 2j} = \frac{(4 - 5j)(6 + 2j)}{40} = \frac{34}{40} - \frac{22}{40}j
\end{aligned}$$

1.2

Trovare la rappresentazione polare $\rho e^{j\phi}$ dei numeri

(a.)

$$1, \quad -3, \quad 1 + j, \quad 1 - j, \quad -1 + j, \quad -1 - j, \quad \frac{1 + j}{1 - j},$$

(b.)

$$1 + j\sqrt{3}, \quad (1 - j\sqrt{3})^2, \quad j(1 + j)e^{j\frac{\pi}{6}}, \quad \frac{e^{j\frac{\pi}{3}} - 1}{1 + j\sqrt{3}}, \quad \rho \sin\phi + j\rho\cos\phi.$$

Soluzione

(a.)

$$\begin{aligned}
1 &= 1\, e^{j0}, & -3 &= 3\, e^{j\pi} \\
1 + j &= \sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}}, & 1 - j &= \sqrt{2}\, e^{-j\frac{\pi}{4}} \\
-1 + j &= \sqrt{2}\, e^{j\frac{3}{4}\pi}, & -1 - j &= \sqrt{2}\, e^{-j\frac{3}{4}\pi} \\
\frac{1 + j}{1 - j} &= j = 1\, e^{j\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

(b.)

$$\begin{aligned}
1 + j\sqrt{3} &= 2\, e^{j\arctan\sqrt{3}} = 2\, e^{j\frac{\pi}{3}} \\
(1 - j\sqrt{3})^2 &= \left(2\, e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)^2 = 4\, e^{-j\frac{2}{3}\pi}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
j(1+j)e^{j\frac{\pi}{6}} &= e^{j\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\,e^{j\frac{\pi}{4}}\,e^{j\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}\,e^{j\frac{11}{12}\pi} \\
\frac{e^{j\frac{\pi}{3}}-1}{1+j\sqrt{3}} &= \frac{1}{2}\,e^{j\frac{\pi}{3}} \qquad \textit{suggerimento: } e^{j\frac{\pi}{3}}+e^{-j\frac{\pi}{3}}=1 \textit{ ecc.} \\
\rho\sin\phi + j\rho\cos\phi &= j\rho(\cos\phi - j\sin\phi) = \rho e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-j\phi} = \rho e^{-j\left(\phi-\frac{\pi}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

1.3

Calcolare in forma cartesiana

$$2e^{-j\frac{\pi}{4}}, \quad 3e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad 2, \quad e^{j\frac{5\pi}{4}}, \quad e^{-j\frac{4\pi}{3}}, \quad (1+j)^{16}.$$

Soluzione

$$
\begin{aligned}
2e^{-j\frac{\pi}{4}} &= 2\left(\cos\frac{\pi}{4} - j\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}(1-j) \\
3e^{j\frac{\pi}{2}} &= 3j \\
2 &= \qquad 2 \\
e^{j\frac{5\pi}{4}} &= -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+j) \\
e^{-j\frac{4\pi}{3}} &= -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\
(1+j)^{16} &= \left(\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^{16} = 2^8 e^{j\frac{16\pi}{4}} = 256
\end{aligned}
$$

1.4

Determinare i numeri reali

$$\operatorname{Re}\frac{1}{1+j}, \quad \operatorname{Im}\frac{3+4j}{7-j}, \quad \operatorname{Re}e^{3+j3\pi}, \quad \operatorname{Im}e^{j\frac{\pi}{4}},$$

$$\left|\frac{1+j}{1-j}\;e^{j\sqrt{3}}\right|, \quad \left|\frac{e^{j\frac{\pi}{2}}-1}{e^{-j\frac{\pi}{2}}+1}\right|, \quad \left|\frac{2\cos t + 2j\sin t}{1+2j}\right|, \quad \left|\frac{5+7j}{7-5j}\right|, \quad \left|\frac{(1+j)^6}{j^3(1+4j)^2}\right|.$$

Soluzione

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re}\frac{1}{1+j} &= \frac{1}{2} \\
\operatorname{Im}\frac{3+4j}{7-j} &= \operatorname{Im}\frac{(3+4j)(7+j)}{50} = \frac{31}{50} \\
\operatorname{Re}e^{3+j3\pi} &= e^3\cos 3\pi = -e^3 \\
\operatorname{Im}e^{j\frac{\pi}{4}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\left|\frac{1+j}{1-j}\;e^{j\sqrt{3}}\right| &= \frac{|1+j|}{|1-j|} = 1 \\
\left|\frac{e^{j\frac{\pi}{2}}-1}{e^{-j\frac{\pi}{2}}+1}\right| &= \frac{|-1+j|}{|1-j|} = 1 \\
\left|\frac{2\cos t + 2j\sin t}{1+2j}\right| &= \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}
\end{aligned}
$$

$$\left|\frac{5+7j}{7-5j}\right| = \frac{\sqrt{74}}{\sqrt{74}} = 1$$

$$\left|\frac{(1+j)^6}{j^3(1+4j)^2}\right| = \frac{|1+j|^6}{|j|^3\,|1+4j|^2} = \frac{(\sqrt{2})^6}{1^3\,(\sqrt{17})^2} = \frac{8}{17}$$

1.5

Eseguire le seguenti operazioni

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{7+3j}{1+j}, & \dfrac{(5+4j)^*}{1+3j}, & \dfrac{1+j}{1-j}, \\ (7+4j)^2, & \dfrac{(1+j)^2}{3+4j}, & 1+j+j^2+j^3, \\ (1+j)^3, & \dfrac{(1+j)^3}{(1-j)^2}, & \dfrac{(1+j)^{128}}{(1-j)^{64}}. \end{array}$$

Soluzione

$$\begin{aligned}
\frac{7+3j}{1+j} &= \frac{(7+3j)(1-j)}{(1+j)(1-j)} = \frac{10-4j}{2} = 5-2j, \\
\frac{(5+4j)^*}{1+3j} &= \frac{(5-4j)(1-3j)}{(1+3j)(1-3j)} = -\frac{7}{10} - \frac{19}{10}j, \\
\frac{1+j}{1-j} &= j, \\
(7+4j)^2 &= 33+56j, \\
\frac{(1+j)^2}{3+4j} &= \frac{2j(3-4j)}{9+16} = \frac{8+6j}{25}, \\
1+j+j^2+j^3 &= \frac{1-j^4}{1-j} = 0, \qquad \text{immediato se visto geometricamente,} \\
(1+j)^3 &= (1+j)^2(1+j) = 2j(1+j) = -2+2j, \qquad \text{oppure,} \\
(1+j)^3 &= \left(\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^3 = \sqrt{2^3}e^{j\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2+2j, \\
\frac{(1+j)^3}{(1-j)^2} &= \frac{\sqrt{2^3}e^{j\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{2^2}e^{-j\frac{2}{4}\pi}} = \sqrt{2}e^{j\frac{5}{4}\pi} = \sqrt{2}e^{-j\frac{3}{4}\pi} = -(1+j), \\
\frac{(1+j)^{128}}{(1-j)^{64}} &= \frac{\sqrt{2^{128}}e^{j\frac{128\pi}{4}}}{\sqrt{2^{64}}e^{-j\frac{64\pi}{4}}} = 2^{32}e^{j48\pi} = 2^{32}.
\end{aligned}$$

1.6

Calcolare il modulo dei seguenti numeri

$$\frac{(1+j)^8}{1-j}, \quad \frac{(1+j)^2+j}{7+2j}, \quad \frac{(3+4j)^5}{(8+6j)^7}.$$

Soluzione

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{(1+j)^8}{1-j}\right| &= \frac{|(1+j)^8|}{|1-j|} = \frac{\sqrt{2^8}}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2},\\
\left|\frac{(1+j)^2+j}{7+2j}\right| &= \frac{|3j|}{|7+2j|} = \frac{3}{\sqrt{53}},\\
\left|\frac{(3+4j)^5}{(8+6j)^7}\right| &= \frac{\sqrt{25^5}}{\sqrt{100^7}} = \frac{5^5}{10^7} = \frac{1}{3200}.
\end{aligned}
$$

1.7

Disegnare i seguenti sottoinsiemi del piano complesso

(a.) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-4j| = 4\}$,

(b.) $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}\, z < \frac{\pi}{2}\}$,

(c.) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z) > 0\}$,

(d.) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\}$,

(e.) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$,

(f.) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 2\}$,

(g.) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \leq 1\}$,

(h.) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2 \text{ e } |z-j| \geq 1\}$,

(i.) $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\right\}$,

(j.) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 2\,\mathrm{Re}(z)\}$,

(h.) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z^2) = 1\}$,

(k.) $\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z^3) = \frac{\pi}{2}\}$,

(l.) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \leq |z+1|\}$.

Soluzione

Preliminare. Il sottoinsieme del piano complesso

$$\mathcal{C} := \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = r \,\}$$

è formato dai punti della circonferenza di centro a e raggio r. Analogamente $\{\, z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leq r \,\}$ è il disco di centro a e raggio r. Vi sono modi alternativi di scrivere l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$. Ad esempio $\mathcal{C} = \{z \mid z = a + re^{j\theta},\ \theta \in (-\pi, \pi]\}$.

I sottoinsiemi del piano complesso da individuare sono

(a.) Circonferenza di centro $a = 4j$ e raggio 4.

(b.) La stricia verticale di piano compresa tra parte reale 0 e parte reale $\frac{\pi}{2}$.

(c.) Il primo e il quarto quadrante di $\mathbb{C}$.

(d.) Il disco centrato nell'origine e di raggio 2.

(e.) L'esterno del disco centrato nell'origine e di raggio 1.

(f.) La corona circolare compresa tra la circonferenza di raggio 1 e quella di raggio 2.

(g.) Il disco centrato in $a = 1$ e di raggio 1.

(h.) L'intersezione tra il disco di raggio 2 centrato nell'origine e l'esterno del disco centrato in $a = j$ di raggio 1.

(i.) Lo spicchio di piano complesso compreso tra la bisettrice del primo quadrante e quella del quarto quadrante.

(j.) La retta nel piano complesso $\beta = 2\alpha$ dove $z = \alpha + j\beta$.

(h.) L'iperbole nel piano complesso $\alpha\beta = \frac{1}{2}$. Infatti, detto $z = \alpha + j\beta$, si ha $\mathrm{Im}(z^2) = \mathrm{Im}(\alpha + j\beta) = 2\alpha\beta$.

(k.) La semiretta uscente dall'origine che forma un angolo di $\frac{\pi}{6}$ rad con l'asse reale.

(l.) Il semipiano $\mathrm{Re}(z) > 0$.

1.8

Dimostrare che

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

Soluzione

$$\begin{aligned}
4\cos^3\theta - 3\cos\theta &= 4\left(\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}\right)^3 - 3\cos\theta \\
&= 4\,\frac{e^{j3\theta}+3e^{j2\theta}e^{-j\theta}+3e^{j\theta}e^{-j2\theta}+e^{-j3\theta}}{8} - 3\cos\theta \\
&= 4\,\frac{e^{j3\theta}+3e^{j\theta}+3e^{-j\theta}+e^{-j3\theta}}{8} - 3\cos\theta \\
&= \frac{e^{j3\theta}+e^{-j3\theta}+3\left(e^{j\theta}+e^{-j\theta}\right)}{2} - 3\cos\theta \\
&= \cos 3\theta + 3\cos\theta - 3\cos\theta = \cos 3\theta
\end{aligned}$$

Commento. Quest'equazione è più utile nella forma

$$\cos^3\theta = \frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos 3\theta,$$

da confrontare con quella del prossimo esercizio.

1.9

Esprimere $\sin^3\theta$ in funzione di $\sin k\theta$ e $\cos k\theta$ per $k = 1, 2, 3$.

Soluzione

$$\begin{aligned}
\sin^3\theta &= \left(\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}\right)^3 \\
&= \frac{e^{j3\theta}-3e^{j\theta}+3e^{-j\theta}-e^{-j3\theta}}{-8j} \\
&= \frac{e^{j3\theta}-e^{-j3\theta}-3\left(e^{j\theta}-e^{-j\theta}\right)}{-8j} \\
&= \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta
\end{aligned}$$

1.10

Calcolare in forma cartesiana e polare

$$\sqrt{j}, \quad \sqrt[4]{-1}, \quad \sqrt{-7-24j},$$

$$\sqrt{e^{j\frac{\pi}{2}}}, \quad \sqrt[3]{-1}, \quad \sqrt[3]{-j}, \quad \sqrt{e^{-j\frac{\pi}{2}}}.$$

Soluzione

$\sqrt{j} = \sqrt{e^{j\frac{\pi}{2}}} = e^{j\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}},\ k = 0, 1$ ovvero

$$e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad e^{j\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{e^{j\pi}} = e^{j\frac{\pi+2\pi k}{4}},\ k = 0,1,2,3$ ovvero

$$e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad e^{j\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad e^{-j\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\sqrt{-7-24j} = 25e^{j\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{24}{7}\right)-\frac{\pi}{2}+\pi k\right)},\ k = 0,1$

Per determinare la forma cartesiana delle radici quadrate o si ricorre alle formule trignometriche per scrivere sin e cos in funzione di tan, oppure si procede per via algebrica. Ciò equivale a trovare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$-7 - 24j = (\alpha + j\beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta j$$

Il sistema di due equazioni in due incognite fornisce $\alpha = \pm 3$ e $\beta = \mp 4$ quindi

$$\sqrt{-7-24j} = \pm(3-4j)$$

Si noti che, analogamente a quanto accade in $\mathbb{R}$, le due radici *quadrate* di un qualunque numero in $\mathbb{C}$ differiscono tra loro solo per un fattore -1. Infatti, in forma polare, le due radici sono della forma è $e^{j\frac{\theta}{2}+\pi k}$, $k = 0,1$, che evidenzia come l'unica differenza sia il fattore $e^{j\pi} = -1$.

1.11

Risolvere l'equazione

$$z^2 + z + 1 - j = 0.$$

Soluzione

Le due soluzioni sono

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3+4j}}{2} \tag{1}$$

Conviene procedere algebricamente, come nel precedente esercizio, per trovare

$$\sqrt{-3+4j} = \frac{-1 \pm (1+2j)}{2}.$$

Sostituendo in (1) si trovano le soluzioni dell'equazione proposta

$$z_1 = j, \qquad z_2 = -1 - j$$