Analisi Matematica 2A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 10/9/2024

Esercizio 1 (10 punti) Dati $a, b \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = (x+a)e^{y^2+bx}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ calcolare tutti i punti critici di f e discuterne la natura.

Risposte. Punti critici:	Natura:

Esercizio 2 (12 punti) Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x+y^2}{x-y^2} \\ y(0) = 1/4. \end{cases}$$

i) Discutere l'esistenza e l'unicità di una soluzione locale.

ii) Studiare la monotonia e l'intervallo di esistenza della soluzione massimale.

iii) Calcolare il limite

$$L = \lim_{x \to -\infty} y(x).$$

iv) Disegnare un grafico qualitativo della soluzione (la convessità non è richiesta).

Risposte: iii) $L =$	iv) Grafico:

Esercizio 3 (10 punti) Dato un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F(x,y) = \Big(x + \frac{\alpha}{1+x^2+y^2}, y + \frac{\alpha}{1+x^2+y^2}\Big), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

i) Provare che per $|\alpha| < 1/2$ F è un diffeomorfismo locale di classe C^∞.

ii) Provare che per $|\alpha| < 1/2$ F è un diffeomorfismo globale.

---

2 ore e 30 minuti a disposizione

Esercizio Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x+y^2}{x-y^2} \\ y(0) = 1/4. \end{cases}$$

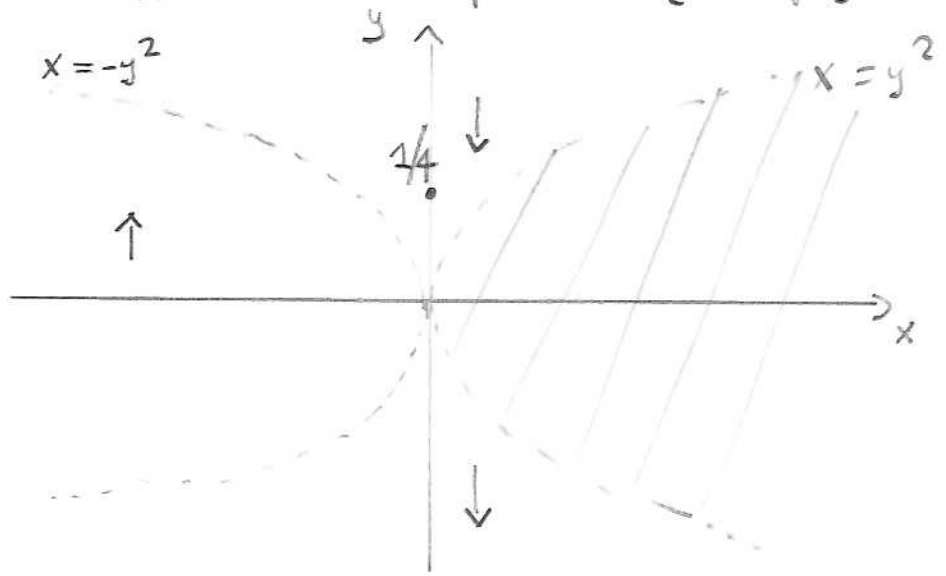
i) Discutere l'esistenza e unicità locale della soluzione.

ii) Studiare la monotonia e l'intervallo di esistenza della soluzione massimale.

iii) Calcolare il limite $\lim_{x \to -\infty} y(x)$.

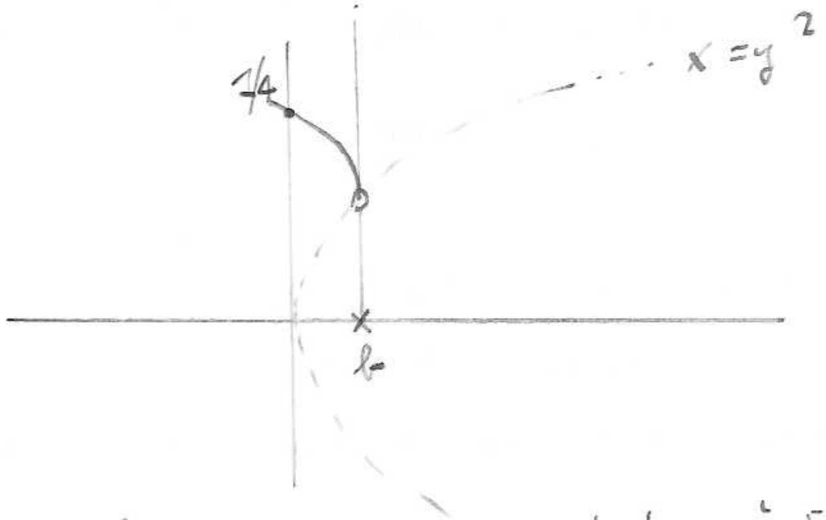
iv) Disegnare un grafico qualitativo della soluzione.

Risoluzione. Siano $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \; x - y^2 \neq 0 \}$ ed $f = \dfrac{x+y^2}{x-y^2}$.
Allora $f \in C^\infty(A)$ e dunque è localmente di Lipschitz.
Segue che esiste unica una soluzione locale $y \in C^\infty(-\delta, \delta)$ per qualche $\delta > 0$. Il grafico della soluzione è tutto contenuto nella regione $\{ x < y^2 \}$



Nella regione $-y^2 < x < y^2$ la soluzione decresce,
Nella regione $x < -y^2$ la soluzione cresce.

Deduciamo che per $x > 0$ la soluzione "va a sbattere" contro la parabola $x = y^2$;



Dunque l'intervallo massimale destro è $[0, b)$ con $b \in (0, \infty)$. Inoltre

$$\lim_{x \to b^-} y(x) = \sqrt{b} \quad e \quad \lim_{x \to b^-} y'(x) = -\infty.$$

In effetti: $0 < b < 1$.

Studiamo l'intervallo massimale sinistro. Abbiamo

$$\frac{x+y^2}{x-y^2} \geq -1 \overset{(x<y^2)}{\iff} x + y^2 \leq -x + y^2$$

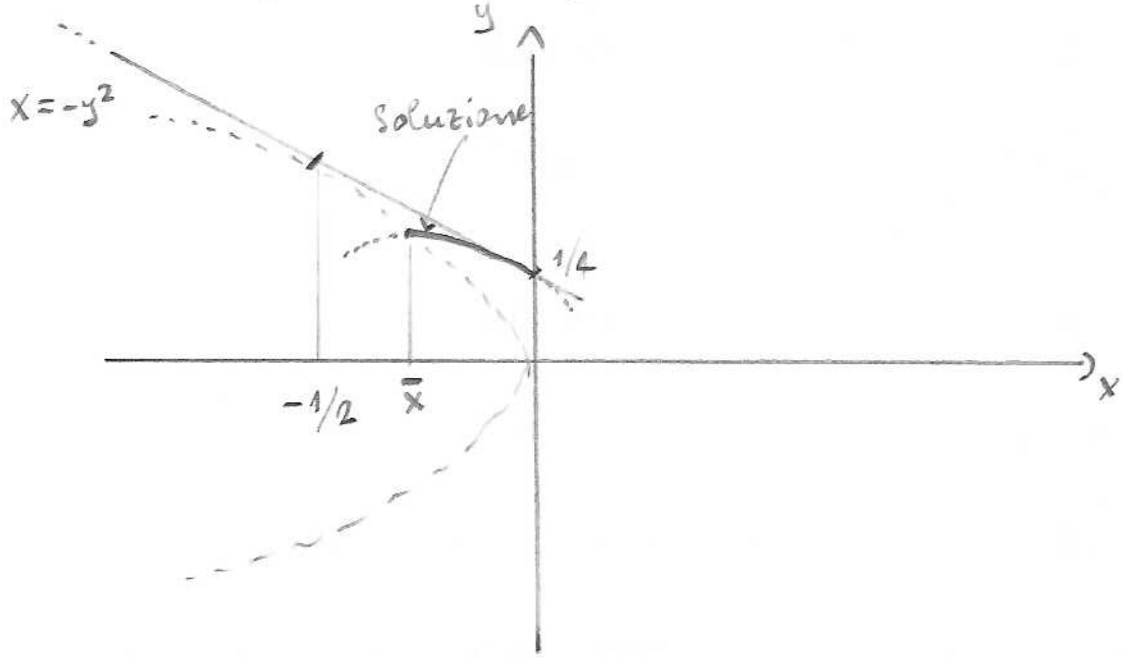
$$\iff x \leq 0.$$

Dunque: $x \leq 0 \implies y'(x) \geq -1$. Si deduce

$$1/4 = y(0) \overset{(x \leq 0)}{=} y(x) + \int_x^0 y'(t)dt \geq y(x) + (-1)\cdot(0-x)$$
$$\geq y(x) + x$$

ovvero $y(x) \leq \frac{1}{4} - x$ per $x \leq 0$.

La retta $y = \frac{1}{4} - x$ e la parabola $x = -y^2$ si toccano nel punto $x = -\frac{1}{2}$;



Deduciamo che esiste $\bar{x} \in (-1/2, 0)$ tale che $\bar{x} = -y(\bar{x})^2$, ovvero la soluzione entra nella regione $\{x < -y^2\}$ dove diventa crescente. Da questa regione la soluzione non può più uscire.

Dunque la soluzione massimale è definita su $(-\infty, b)$ per qualche $b \in (0, 1)$.

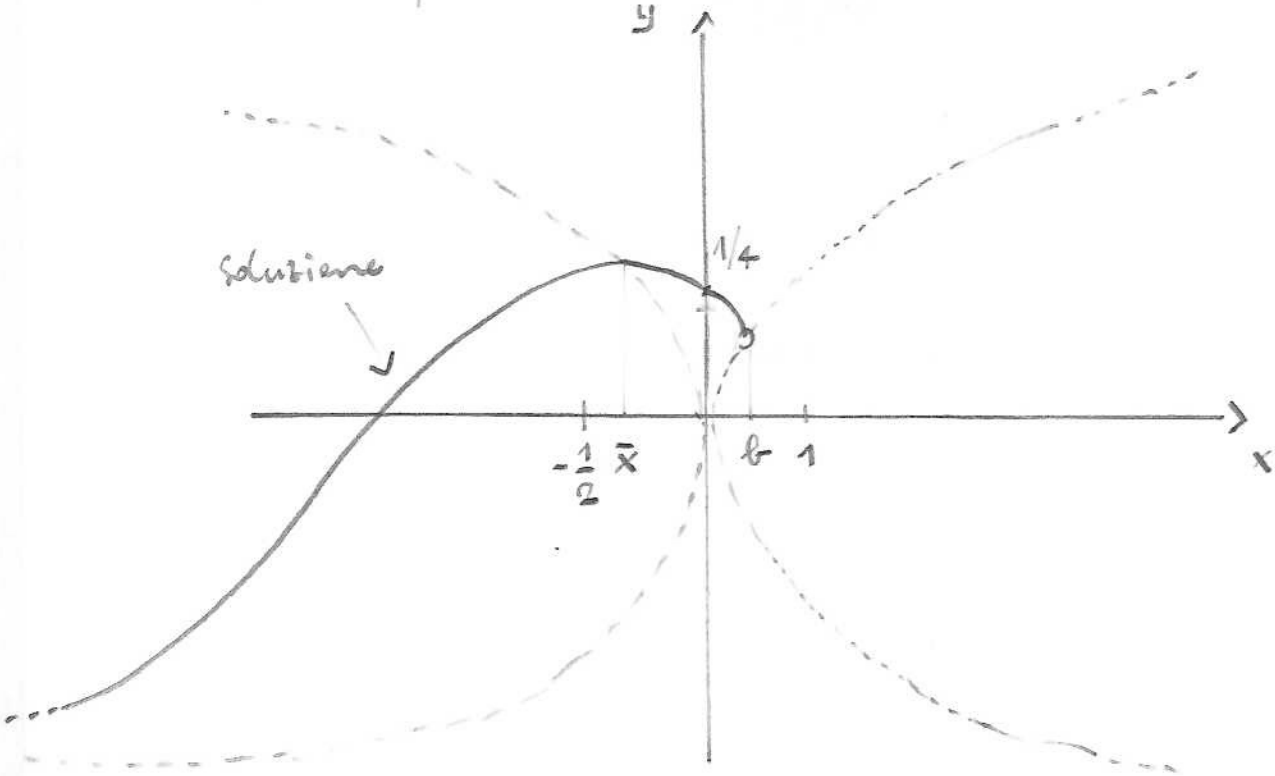
Il limite $L = \lim_{x \to -\infty} y(x) \in [-\infty, y(\bar{x}))$ esiste per monotonia. Se fosse $L \in \mathbb{R}$ avremmo:

$$\lim_{x \to -\infty} y'(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x + y^2}{x - y^2} = +1 .$$

Questo non è possibile.

Quindi $L = -\infty$.

Grafico qualitativo:



Esercizio Dato un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F(x,y) = \left(x + \frac{\alpha}{1+x^2+y^2} \, , \; y + \frac{\alpha}{1+x^2+y^2} \right), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

i) Provare che per $|\alpha| < 1/2$ F è un diffeomorfismo locale di classe C^∞

ii) Provare che esiste $\alpha_0 > 0$ tale che per $|\alpha| < \alpha_0$ $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è un diffeomorfismo.

Risoluzione. La matrice Jacobiana di F è

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 1 + \alpha \dfrac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2} & \alpha \dfrac{-2y}{(1+x^2+y^2)^2} \\ \\ \alpha \dfrac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2} & 1 + \alpha \dfrac{-2y}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

Dunque

$$\det JF(x,y) = 1 - 2\alpha \frac{x+y}{(1+x^2+y^2)^2} .$$

Osserviamo che

$$\frac{2|x|}{(1+x^2+y^2)^2} \leq \frac{2|x|}{(1+x^2)^2} \leq \frac{2|x|}{1+x^2} \leq 1$$

e analogamente $\dfrac{2|y|}{(1+x^2+y^2)^2} \leq 1$. Dunque

$$\det JF(x,y) \geq 1 - 2|\alpha| > 0 \quad \text{per } |\alpha| < 1/2 .$$

ii) Dato $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2$ vogliamo risolvere con unicità:

$$(*)\qquad F(x,y) = (\xi,\eta)$$

Definendo $G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$$G(x,y) = \left(\xi - \frac{\alpha}{1+x^2+y^2}, \eta - \frac{\alpha}{1+x^2+y^2}\right)$$

l'equazione (*) diventa un'equazione di punto fisso:

$$G(x,y) = (x,y).$$

Se G è una contrazione la soluzione $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ esiste unica. Avremo, per $(x,y),(\bar{x},\bar{y})\in\mathbb{R}^2$,

$$\left|G(x,y)-G(\bar{x},\bar{y})\right| = \left|\left(\frac{\alpha}{1+\bar{x}^2+\bar{y}^2}-\frac{\alpha}{1+x^2+y^2}, \text{stessa cosa}\right)\right|$$

$$= \sqrt{2}\,|\alpha|\cdot\left|\underbrace{\frac{1}{1+x^2+y^2}}_{f(x,y)} - \frac{1}{1+\bar{x}^2+\bar{y}^2}\right|$$

Siccome $\nabla f = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}(-2x,-2y)$ deduciamo che

$$|\nabla f(x,y)| \le 2\,\frac{(x^2+y^2)^{1/2}}{(1+x^2+y^2)^2} \le 1 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Dal Teorema del valor medio:

$$|f(x,y)-f(\bar{x},\bar{y})| \le 1\cdot|(x-\bar{x}, y-\bar{y})|$$

e quindi

$$|G(x,y)-G(\bar{x},\bar{y})| \le \sqrt{2}\,|\alpha|\,|(x,y)-(\bar{x},\bar{y})|$$

e per $\sqrt{2}|\alpha|<1$ G è una contrazione.

$\square$