Analisi Matematica 2A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 8/7/2024

Esercizio 1 (10 punti) Dati $a, b \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = (x+a)e^{y^2+bx}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ calcolare tutti i punti critici di f e discuterne la natura.

Risposte. Punti critici:	Natura:

Esercizio 2 (12 punti) Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x + x^3 e^{-y} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

i) Studiare l'esistenza di una soluzione locale e globale.

ii) Studiare simmetrie e monotonia della soluzione

iii) Provare che esite e calcolare il limite

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x^2}.$$

iv) Disegnare un grafico qualitativo della soluzione (la convessità non è richiesta).

v) Calcolare la soluzione in modo esplicito.

Risposte: iii) $L =$	iv) Grafico:	v) $y(x) =$

Esercizio 3 (10 punti) Provare che esiste un'unica funzione $\varphi \in C([0,1])$ che risolve l'equazione integrale

$$\varphi(x) = \int_0^1 (x-t)^2 \Big(\arctan(\varphi(t)) - \frac{1}{2}\varphi(t) \Big) dt, \qquad x \in [0,1].$$

Discutere la regolarità di φ.

Risposte. Regolarità di φ:

2 ore e 30 minuti a disposizione

<u>Esercizio</u> Dati $a, b \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = (x+a)\, e^{y^2+bx}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ calcolare tutti i punti critici di f e discuterne la natura.

Risoluzione. Conti per le derivate parziali prime e seconde

$$f_x = e^{y^2+bx} + (x+a)\, e^{y^2+bx} \cdot b$$

$$= e^{y^2+bx} \left[1 + bx + ab \right]$$

$$f_y = (x+a)\, 2y\, e^{y^2+bx}$$

$$f_{xx} = e^{y^2+bx} \left[b + b(1+bx+ab) \right]$$

$$f_{xy} = e^{y^2+bx}\, 2y \left[1 + bx + ab \right]$$

$$f_{yy} = 2(x+a)\, e^{y^2+bx} \left[1 + 2y^2 \right].$$

Punti critici: Il sistema $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$ è equivalente a

$$\begin{cases} 1 + bx + ab = 0 \\ (x+a)\, y = 0, \end{cases}$$

La seconda equazione fornisce $x+a=0$ oppure $y=0$. Per $x+a=0$ la prima diventa $1=0$, impossibile. Rimane $y=0$ e la prima equazione $1+b(x+a)=0$. Se $b=0$ non c'è soluzione e non ci sono punti critici. Per $b \neq 0$ si trova il punto $\left(-a-\frac{1}{b}, 0\right)$.

La matrice Hessiana di f è:

$$Hf = e^{y^2+bx} \begin{bmatrix} b\left[2+b(x+a)\right] & 2y\left[1+b(x+a)\right] \\ 2y\left[1+b(x+a)\right] & 2(x+a)\left[1+2y^2\right] \end{bmatrix}$$

Nel punto critico:

$$Hf = e^{y^2+bx} \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & -\frac{2}{b}(1+2y^2) \end{bmatrix}$$

e quindi in questo punto:

$$\det Hf = -e^{2(y^2+bx)}\, 2(1+2y^2) < 0.$$

Si tratta di un punto di sella.

$\square$

Esercizio Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x + x^3 e^{-y} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

i) Discutere l'esistenza di soluzioni locali e globali.

ii) Studiare simmetrie e monotonia della soluzione

iii) Provare che esiste e calcolare il limite

$$L = \lim_{x \to \infty} \frac{y(x)}{x^2}.$$

iv) Disegnare un grafico qualitativo della soluzione,

v) Calcolare la soluzione in modo esplicito.

Risoluzione. La funzione $f(x,y) = x + x^3 e^{-y}$ è C^∞ e dunque c'è esistenza e unicità locale di una soluzione $y \in C^\infty(-\delta, \delta)$ con $\delta > 0$.

Osserviamo che $f(x,y) = x\,(1 + x^2 e^{-y}) \geq 0 \iff x \geq 0$.

Dunque y cresce per $x \geq 0$ e decresce per $x \leq 0$.

Deduciamo che $y(x) \geq 1$ nel dominio di definizione e quindi

$$|y'(x)| \leq |x| + |x|^3 e^{-1}.$$

La soluzione non può esplodere in tempo finito.

Quindi la soluzione (massimale) è definita per $x \in \mathbb{R}$.

Proviamo che $y(x) = y(-x)$. Sia $z(x) = y(-x)$:

$$\begin{cases} z'(x) = -y'(-x) = -\left(-x - x^3 e^{-y(-x)}\right) = x + x^3 e^{-z(x)} \\ z(0) = y(0) = 1 \end{cases}$$

Per l'unicità della soluzione: $y = z$.

Per calcolare il limite al punto iii) osserviamo preliminarmente che

$$y'(x) = x + x^3 e^{-y} \overset{\text{per } x \geq 0}{\geq} x \quad \Rightarrow \quad y(x) = 1 + \int_0^x y'(t)\,dt$$

$$\geq 1 + \int_0^x t\,dt = 1 + \frac{x^2}{2}$$

Quindi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x^2} \overset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{y'(x)}{2x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \underbrace{\boxed{x^2 e^{-y(x)}}}_{\xrightarrow{x\to\infty} 0} \right) = \frac{1}{2}$$

A posteriori, il limite esiste per confronto ed Hôpital è lecito.

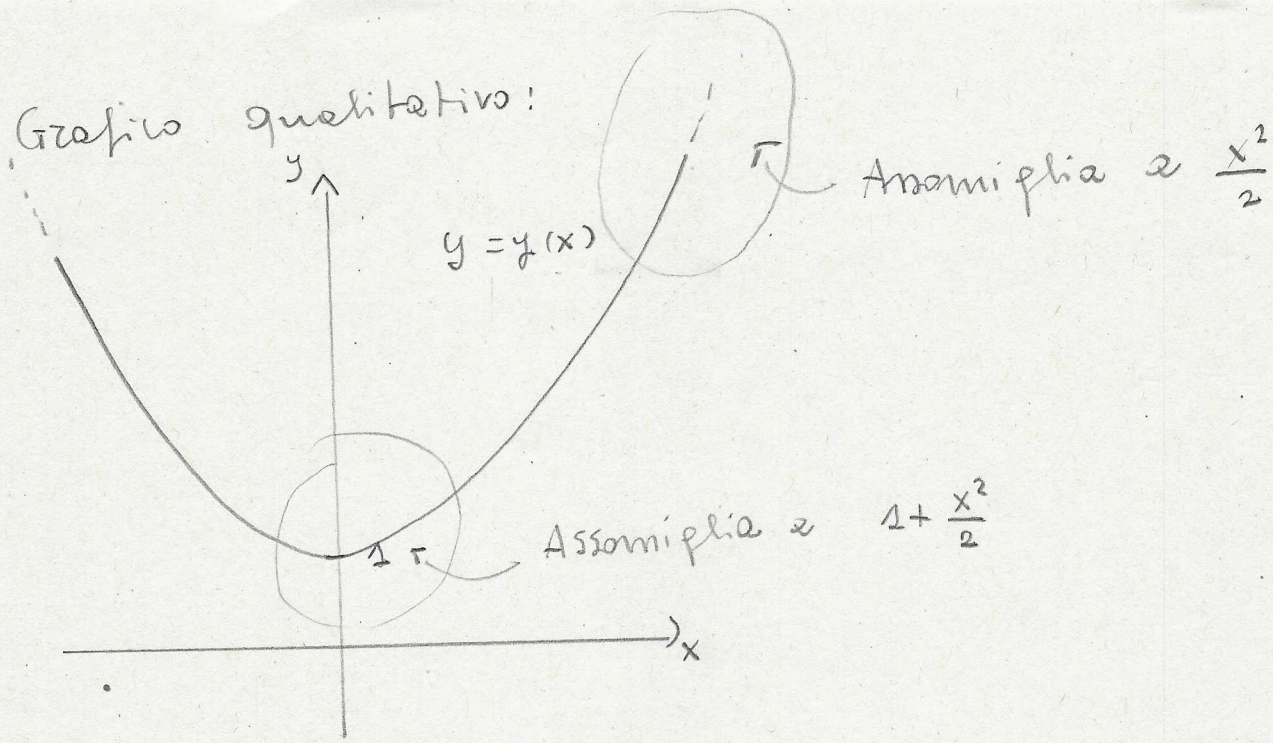
Anche se non richiesto, studiamo la convessità:

$$y'' = 1 + 3x^2 e^{-y} + x^3 e^{-y}\left(-x - x^3 e^{-y}\right)$$

Certamente esiste $\delta_0 > 0$ tale che $y'' \geq \frac{1}{2} > 0$ per $|x| \leq \delta_0$. Usando le stime precedenti si vede anche che $y'' \geq \frac{1}{2} > 0$ per $|x| \geq M_0$ per un qualche $M_0 \gg 1$.

Sembra che y sia convessa su tutto $\mathbb{R}$ anche se non riusciamo a dimostrarlo su $[\delta_0, M_0]$.

Grafico qualitativo:



v) Per calcolare la soluzione conviene porre $y = \log z$, da cui $y' = \frac{z'}{z}$. L'equazione differenziale diventa

$$\frac{z'}{z} = x + x^3 \frac{1}{z} \iff z' = xz + x^3$$

È lineare, con $z(0) = e^{y(0)} = e$.

Si risolve $z' = xz$ ovvero $(\log z)' = x$ ovvero $\log z = \frac{x^2}{2} + c$ ovvero $z = c e^{x^2/2}$.

Variazione delle costanti:

$$z' = c' e^{x^2/2} + c x e^{x^2/2},$$

sostituendo: $c' e^{x^2/2} = x^3$ ovvero

$$c' = x^3 e^{-x^2/2},$$

Integrando per parti con integrali indefiniti:

$$c = \int x^3 e^{-x^2/2} dx = -x^2 e^{-x^2/2} + \int 2x e^{-x^2/2} dx$$

$$= -x^2 e^{-x^2/2} - 2 e^{-x^2/2} + \tilde{c}$$

Si trova

$$z = \left(-x^2 e^{-x^2/2} - 2e^{-x^2/2} + \overset{\mathbb{R}}{\overset{\Psi}{C}}\right) e^{x^2/2}$$

$$= -x^2 - 2 + C e^{x^2/2}$$

con $C \in \mathbb{R}$ determinata da

$$e = z(0) = 0 - 2 + C \iff C = (e+2).$$

In conclusione

$$y = \log\left((e+2)e^{x^2/2} - x^2 - 2\right).$$

$\square$

<u>Esercizio</u> Provare che esiste un'unica funzione $\varphi \in C([0,1])$ che risolve l'equazione integrale

$$\varphi(x) = \int_0^1 (x-t)^2 \left(\arctan(\varphi(t)) - \frac{1}{2}\varphi(t)\right) dt$$

per $x \in [0,1]$. Discutere la regolarità di φ.

Risoluzione Sia $X = C([0,1])$ con $\|\varphi\| = \max_{t\in[0,1]} |\varphi(t)|$. È uno spazio di Banach.

Vogliamo provare che $T : X \to X$

$$(T\varphi)(x) = \int_0^1 (x-t)^2 \left(\arctan(\varphi(t)) - \frac{1}{2}\varphi(t)\right) dt,$$

per $x \in [0,1]$, è una contrazione.

Studiamo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \arctan x - \frac{x}{2}$;

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2} = \frac{2-(1+x^2)}{2(1+x^2)}$$

$$= \frac{1-x^2}{1+x^2} \cdot \frac{1}{2}.$$

Quindi $|F'(x)| \leq \frac{1}{2}$ e per Lagrange $|F(x_1) - F(x_2)| \leq$

$\leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2|$.

Siano $\varphi_1, \varphi_2 \in X$;

$$(T\varphi_1)(x) - (T\varphi_2)(x) = \int_0^1 \underbrace{(x-t)^2}_{\leq 1} \left(F(\varphi_1(t)) - F(\varphi_2(t))\right) dt$$

e quindi

$$|(T\varphi_1)(x) - (T\varphi_2)(x)| \leq \frac{1}{2}\int_0^1 |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|\, dt$$

$$\leq \frac{1}{2}\|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

Deduciamo che

$$\| T(\varphi_1) - T(\varphi_2) \| \leq \frac{1}{2} \| \varphi_1 - \varphi_2 \| .$$

Per il Teorema di Banach esiste unica $\varphi \in X$ tale che $T\varphi = \varphi$.

Sviluppando $(x-t)^2 = x^2 - 2xt + t^2$ si vede che

$$\varphi(x) = x^2 \int_0^1 F(\varphi)dt - 2x \int_0^1 t\, F(\varphi)dt + \int_0^1 t^2 F(\varphi)dt .$$

Dunque il punto fisso φ è un polinomio.