SEGNALI E SISTEMI
4 settembre 2024
Terzo appello
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2023-2024)
SOLUZIONI

Esercizio 1 [punti 7]

Trovare il/i segnale/i $x(t)$ che soddisfa/no le seguenti proprietà:

1. è reale e pari;
2. è periodico di periodo $T = 3$, e a energia finita sul periodo;
3. ha media pari a 5;
4. ha coefficienti di Fourier $a_k = 0$ per $k > 2$
5. $\frac{1}{3}\int_0^3 |x(t)|^2 dt = 45$
6. $\int_{-6}^{-3} x(t)e^{-j\frac{2\pi}{3}t}dt = 9$

Soluzione. Dalla 2) si ricava che $\omega_0 = \frac{2\pi}{3}$. Dalla 1) deduciamo che a_k è reale e pari ($a_k = a_k* = a_{-k}$). Dalla 4) si ha

$$a_k = \begin{cases} A & , k = 0 \\ B & , k = \pm 1 \\ C & , k = \pm 2 \\ 0 & , \text{altrove} \end{cases}$$

Dalla 3) sappiamo che $a_0 = A = 5$. Dalla 2) e dalla 6) si ottiene $a_1 = a_{-1} = B = \frac{9}{3} = 3$, dove va notato che l'integrale rappresenta il coefficiente di Fourier di ordine 1 a meno di un fattore $\frac{1}{T_p} = \frac{1}{3}$. Dalla 2) e dalla 5), per il teorema di Parseval si ha che

$$P_x = 45 = |A|^2 + 2|B|^2 + 2|C|^2 = 25 + 18 + 2|C|^2$$

da cui $C = a_2 = a_{-2} = \pm 1$. I segnali cercati sono quindi

$$x(t) = 5 + 6\cos(\tfrac{2\pi}{3}t) \pm 2\cos(\tfrac{4\pi}{3}t) \ .$$

Esercizio 2 [punti 7]

Dato il sistem LTI a tempo discreto con risposta impulsiva $h(n) = \frac{1}{3}\delta(n+1) - 2\delta(n) + 3\delta(n-1)$ si chiede di:

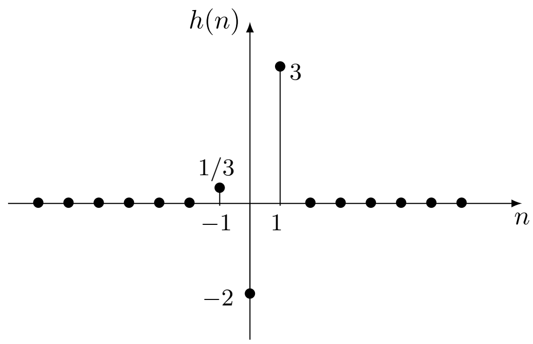
1. disegnare $h(n)$;
2. dire se il sitema è causale e BIBO stabile e giustificare la risposta;

3. dato il segnale di ingresso $x(n) = \text{rect}(\frac{n-1}{5})$, disegnare $x(n)$ e trovare l'uscita corrispondente $y(n)$;

4. trovare l'uscita $z(n)$ corrispondente al segnale di ingresso $w(n) = \text{rect}(\frac{n-2}{5})$.

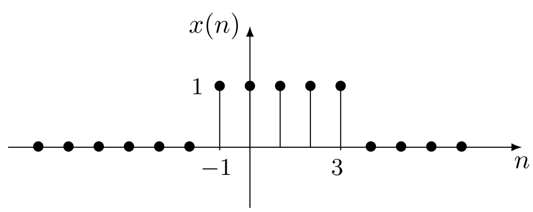
Soluzione.

1. Il segnale $h(n)$ è rappresentato in figura



2. Il sistema non è causale in quanto $h(n)$ non è identicamente nulla per $n < 0$. Il sistema è BIBO stabile poichè $h(n)$ è assolutamente sommabile.

3. il segnale $x(n)$ è mostrato in figura



La convoluzione pertanto diventa

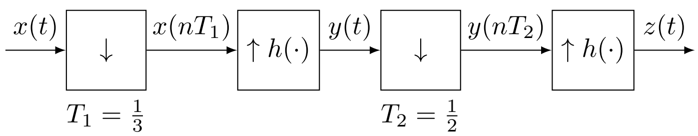
$$\begin{aligned}
y(n) &= x * h(n) \\
&= x(n) * [\tfrac{1}{3}\delta(n+1) - 2\delta(n) + 3\delta(n-1)] \\
&= \tfrac{1}{3}x(n+1) - 2x(n) + 3x(n-1) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{3} & , n = -2 \\ \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3} & , n = -1 \\ \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{4}{3} & , n = 0, 1, 2 \\ -2 + 3 = 1 & , n = 3 \\ 3 & , n = 4 \\ 0 & , \text{altrove} \end{cases}
\end{aligned}$$

4. essendo il segnale $w(n) = x(n-1)$, per la proprietà di tempo invarianza si ha

$$z(n) = y(n-1) = \begin{cases} \frac{1}{3} & , n = -1 \\ \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3} & , n = 0 \\ \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{4}{3} & , n = 1, 2, 3 \\ -2 + 3 = 1 & , n = 4 \\ 3 & , n = 5 \\ 0 & , \text{altrove} \end{cases}$$

Esercizio 3 [punti 7]

Si consideri il seguente sistema, costituito dalla cascata di due sistemi di campionamento e interpolazione



in cui $h(t) = 2\,\mathrm{sinc}(2t)$. Sapendo che $x(t) = \mathrm{sinc}^2(2t)$ si chiede di:

1. identificare la trasformata di Fourier $Y(j\omega)$ di $y(t)$ e disegnarla;
2. identificare la trasformata di Fourier $Z(j\omega)$ di $z(t)$;
3. identificare il segnale di uscita $z(t)$.

Soluzione.

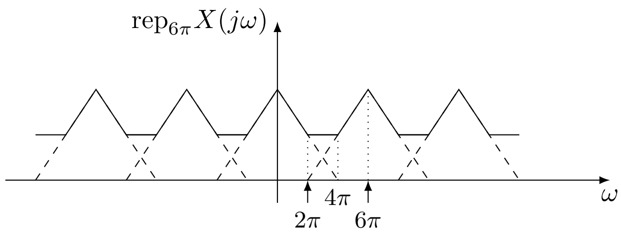
1. Dalla teoria conosciamo l'effetto nel dominio di Fourier della cascata campionamento/interpolazione, per la quale si ha

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \tfrac{1}{T_1} H(j\omega)\,\mathrm{rep}_{\frac{2\pi}{T_1}} X(j\omega)\,, \qquad H(j\omega) = \mathrm{rect}(\tfrac{\omega}{4\pi})\,,\ T_1 = \tfrac{1}{3} \\ &= 3\ \mathrm{rect}(\tfrac{\omega}{4\pi})\,\mathrm{rep}_{6\pi} X(j\omega) \end{aligned}$$

Per capire l'effetto della trasformazione, partendo da

$$X(j\omega) = \tfrac{1}{2}\mathrm{triang}(\tfrac{\omega}{4\pi})$$

si ha la condizione illustrata in figura



e pertanto nella zona di azione del filtro $H(j\omega)$ non si ha aliasing, ovvero

$$Y(j\omega) = 3H(j\omega)\, X(j\omega) = \tfrac{3}{4}\,\mathrm{rect}(\tfrac{\omega}{4\pi}) + \tfrac{3}{4}\,\mathrm{triang}(\tfrac{\omega}{2\pi})\ .$$

2. Il secondo sistema di campionamento/interpolazione è un classico sistema di ricostruzione esatta per segnali con estensione in $\omega \in [-\frac{\pi}{T_2}, \frac{\pi}{T_2}] = [-2\pi, 2\pi]$, ad esempio per il segnale $y(t)$ e pertanto si ha

$$Z(j\omega) = Y(j\omega) = \tfrac{3}{4}\,\mathrm{rect}(\tfrac{\omega}{4\pi}) + \tfrac{3}{4}\,\mathrm{triang}(\tfrac{\omega}{2\pi})\ .$$

3. Antitrasformando, si ottiene

$$z(t) = y(t) = \tfrac{3}{2}\,\mathrm{sinc}(2t) + \tfrac{3}{4}\,\mathrm{sinc}^2(t)\ .$$

Esercizio 4 [punti 3]

Dato il sistema a tempo continuo, causale, descritto dall'equazione differenziale:

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = a \cdot x'''(t) + x'(t) + x(t)$$

con a complesso, si chiede di:

1. dire per quale valore di a il sistema è BIBO stabile,
2. e per quel valore trovare la risposta impulsiva.

Soluzione.

1. La funzione di trasferimento è

$$H(s) = \frac{as^3 + s + 1}{s^2 + 5s + 6} = \frac{as^3 + s + 1}{(s+2)(s+3)}$$

in cui il grado del numeratore non supera quello del denominatore (caso in cui non sono presenti fattori s, derivata, nella funzione di trasferimento) solo per $a = 0$. I poli sono in $s = -2$ed $s = -3$ quindi il sistema è BIBO stabile se e solo se $a = 0$.

2. Per $a = 0$ si ha

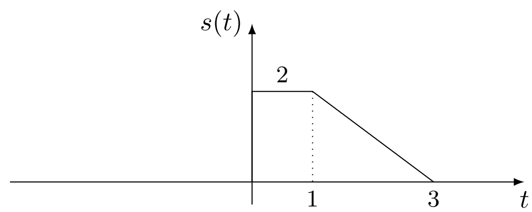
$$H(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} = -\frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+3}$$

da cui

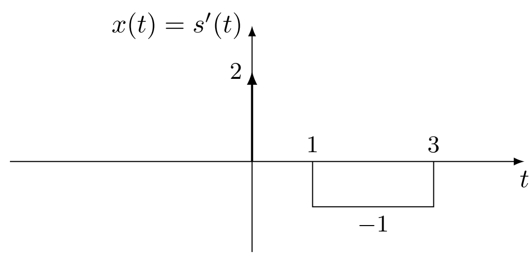
$$h(t) = (-e^{-2t} + 2e^{-3t})\, 1(t)\ .$$

Esercizio 5 [punti 3]

Si calcoli la trasformata di Fourier del segnale



Soluzione. In questo caso si può procedere tramite regola di derivazione



in cui

$$x(t) = s'(t) = 2\delta(t) - \mathrm{rect}(\tfrac{t-2}{2})$$

e pertanto dalle regole della trasformata di Fourier si ottiene

$$X(j\omega) = 2 - 2\,\mathrm{sinc}(\tfrac{2\omega}{2\pi})\,e^{-j\omega 2} = 2 - 2\,\mathrm{sinc}(\tfrac{\omega}{\pi})\,e^{-j2\omega}\ .$$

e dalla regola di derivazione

$$S(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{j\omega} + 2\pi m_s \delta(\omega) = \frac{2 - 2\,\mathrm{sinc}(\frac{\omega}{\pi})\,e^{-j2\omega}}{j\omega}$$

in quanto il segnale ha media $m_s = 0$.

Esercizio 6 [punti 3]

Si consideri un segnale a tempo continuo $x(t)$ **reale** e **causale** e sia $X(j\omega)$ la sua trasformata di Fourier; si assuma che il vettore MatLab `X`, di lunghezza `N` (con `N` un numero pari), contenga i campioni di $X(j\omega)$ in corrispondenza delle pulsazioni ω`=`ω_0`*(-N/2:N/2-1)` in cui ω_0 sia dato e pertanto sia noto il passo di campionamento nel tempo `T = 2*pi/(N*`ω_0`)`.

Si chiede di ideare un semplice script MatLab che calcoli numericamente il segnale $x(t)$ e i tempi associati, quindi ne dia una rappresentazione grafica.

Soluzione Lo script potrebbe essere

```
x = ifft(ifftshift(X))/T; % antitrasformata di Fourier
t = (0:N-1)*T; % tempi associati ai campioni del segnale

plot(t,real(x)); % plot del segnale
```