Soluzioni

1) $D=\mathbb{R}^2$, $\begin{cases} f'_x(x,y) = 4x + 2xe^{x^2+y} \\ f'_y(x,y) = e^{x^2+y} - 1 \end{cases}$

cerco i pti critici

soshituisco a $e^{x^2+y} = 1$

$$\begin{cases} 4x+2x\,e^{x^2+y} = 0 \\ e^{x^2+y} - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x+2x\cdot 1 = 0 \\ e^{x^2+y} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x = 0 \\ e^{x^2+y} = 1 \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ e^{y}=1 \\ y=0 \end{cases}$$

$(0,0)$ è l'unico pto critico

$$f''_{xx}(x,y) = 4 + 2e^{x^2+y} + 2x\cdot 2xe^{x^2+y}$$

$$f''_{xy}(x,y) = 2x\,e^{x^2+y}$$

$$f''_{yy}(x,y) = e^{x^2+y}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 4+2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

AUTOVALORI POSITIVI $\Rightarrow$ $(0,0)$ PUNTO DI MINIMO LOCALE

2) $f(x,y) = e^{xy}$ $\quad D = \mathbb{R}^2$

$f'_x(x,y) = y\, e^{xy}$

$f'_y(x,y) = x\, e^{xy}$

pti critici: $\begin{cases} \cancel{y} e^{xy} = 0 \\ \cancel{x} e^{xy} = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ $\quad (0,0)$ è l'unico pto critico

$f''_{xx}(x,y) = y^2 e^{xy}$

$f''_{xy}(x,y) = e^{xy} + xy\, e^{xy}$

$f''_{yy}(x,y) = x^2 e^{xy}$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

determinante negativo

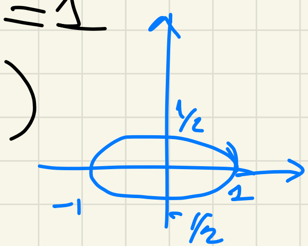
$\downarrow$ autovalori $+, -$

(0,0) pto di SELLA.

3) $f(x,y)=(1-x^2-4y^2)^2$ $\qquad D=\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} f'_x = 2(1-x^2-4y^2)\cdot(-2x) = -4x\,(1-x^2-4y^2) = 0 \\ f'_y = 2(1-x^2-4y^2)\cdot(-8y) = -16\,y\,(1-x^2-4y^2) = 0 \end{cases}$$

pti critici sono $(0,0)$ e tutti i pti che soddisfano $1-x^2-4y^2=0 \Rightarrow x^2+4y^2=1$ (pti ellisse)



dato che $f(x,y)\geq 0 \ \forall (x,y)$ e $f(x,y)=0 \iff x^2+4y^2=1$ ecco che tutti i pti critici che soddisfano $x^2+4y^2=1$ sono pti di <u>minimo assoluto</u>

$(0,0)$ è pto di massimo locale non assoluto.

4) $f(x,y) = \left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{y}{2}\right) \qquad D = \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{y}{2}\right) = 0 \\ f'_y(x,y) = \left(1+\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$(-2,2)$ è l'unico pto critico

$f''_{xx}(x,y) = 0$

$f''_{xy}(x,y) = \frac{1}{4}$

$f''_{\cancel{xx}\,yy}(x,y) = 0$

$$Hf(-2,-2) = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

determinante NEGATIVO

$\downarrow$

autovalori $+,-$

$(-2,-2)$ è pto di SELLA

5) $f(x,y) = -x^3 + y^3 - 3xy \qquad D = \mathbb{R}^2$

$f'_x(x,y) = -3x^2 - 3y \qquad f'_y(x,y) = 3y^2 - 3x$

cerco i pti critici $\begin{cases} -3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x^2 \\ (-x^2)^2 - x = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -x^2 \\ x^4 - x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x^2 \\ x(x^3-1) = 0 \end{cases}$ $\begin{array}{l} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = 1 \rightarrow y = -1 \end{array}$

pti critici sono $(0,0) \quad (1,-1)$

$f''_{xx}(x,y) = -6x \qquad f''_{xy}(x,y) = -3 \qquad f''_{yy} = 6y$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ determinante negativo → autovalori $\pm$

→ $(0,0)$ pto di sella.

$$Hf(1,-1) = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$$

determinante $=$

$36-9>0$

traccia $-12<0$

autovalori sono <u>negativi</u>

$(1,-1)$ pto di MASSIMO LOCALE

6) $f(x,y) = e^{-x}(2x-y^2)$ $\quad D=\mathbb{R}^2$

$$f'_x(x,y) = -e^{-x}(2x-y^2) + e^{-x}\cdot 2 = e^{-x}\left[-2x+y^2+2\right]$$

$$f'_y(x,y) = e^{-x}(-2y) = -2ye^{-x}$$

pti critici $\begin{cases} e^{-x}(-2x+y^2+2)=0 \\ -2ye^{-x}=0 \end{cases}$ $\begin{cases} -2x+2=0 \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ $(1,0)$

$$f''_{xx}(x,y) = -e^{-x}(-2x+y^2+2) + e^{-x}(-2) = e^{-x}(2x-y^2-4)$$

$$f''_{xy}(x,y) = e^{-x}\, 2y$$

$$f''_{yy}(x,y) = -e^{-x}\, 2$$

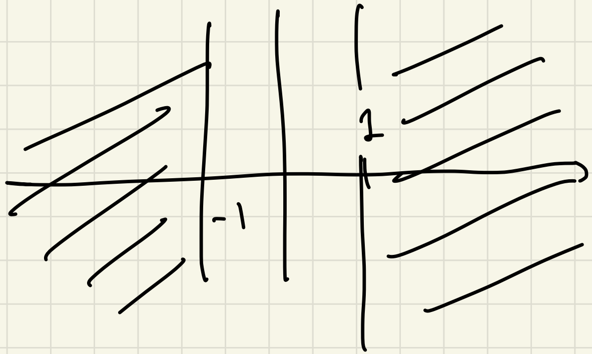
$$Hf(1,0) = \begin{pmatrix} e^{-1}(2-4) & e^{-1}\cdot 0 \\ e^{-1}\cdot 0 & -e^{-1}\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -2e^{-1} \end{pmatrix}$$

autovalori negativi $\rightarrow$

$(1,0)$ pto di massimo locale

7) $f(x,y) = \log(x^2-1) + y^2 + xy$

D: $\{x^2-1>0\} = \{(x,y) \;/\; x^2-1>0 \Rightarrow x>1$ oppure $x<-1\}$



$$f'_x(x,y) = \frac{2x}{x^2-1} + y \qquad\qquad f'_y(x,y) = 2y + x$$

pti critici:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = \dfrac{2x}{x^2-1} + y = 0 \\ f'_y(x,y) = 2y + x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{2x}{x^2-1} - \dfrac{x}{2} = 0 \to \dfrac{4x - x^3 + x}{2(x^2-1)} = 0 \\ y = -\dfrac{x}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5x - x^3}{2(x^2-1)} = 0 \\ y = -\frac{x}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x(5-x^2) = 0 \\ y = -\frac{x}{2} \end{cases}$$

$x = 0 \rightarrow y = 0$

$x = +\sqrt{5} \rightarrow y = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

$x = -\sqrt{5} \quad y = +\frac{\sqrt{5}}{2}$

$(0,0) \notin D \qquad \left(\sqrt{5}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \in D$ e $\left(-\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \in D$

i pti critici sono $\left(\sqrt{5}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \quad \left(-\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{2(x^2-1) - 2x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^2 - 2 - 4x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-2-2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$$

$f''_{xy}(x,y) = 1$

$f''_{yy}(x,y) = 2$

$$Hf\left(\sqrt{5}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = Hf\left(-\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{-2 \cdot 6}{4^2} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

determinante negativo

$\rightarrow$ autovalori $\pm$

$\Rightarrow (\sqrt{5}, -\sqrt{5}/2)$ e $\left(-\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ pti di SELLA.