Istituzioni di Analisi Matematica

Alcuni esercizi di riepilogo
Gli esercizi indicati come facoltativi sono difficili.

1. Sia
$$f(x) = \arctan \frac{e^x}{|e^x - 1|}.$$
   a) Studiare dominio, segno, continuità, punti di singolarità ed eventuali estensioni per continuità, asintoti, derivata, punti di non derivabilità, punti di massimo e minimo locale, massimo e minimo della funzione. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.
   b) (facoltativo) Dire se è finito l'integrale $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ (suggerimento: fare il cambio di variabile $y = e^x$ e ricondursi a un integrale $\int_0^1 ...$).

2. Sia
$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{(x^2 - 2)^3}}.$$
   a) Studiare dominio, segno, continuità, punti di singolarità ed eventuali estensioni per continuità, asintoti, derivabilità, punti di non derivabilità, punti di massimo e minimo locale, massimo e minimo della funzione. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.
   b) Calcolare, se possibile, $\int_2^{+\infty} f(x)dx$.
   c) Determinare per quali α è finito l'integrale
$$\int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2 - 2)^\alpha}} dx.$$

3. Sia
$$f(x) = \frac{\log x}{x^3}.$$
   a) Studiare dominio, segno, continuità, punti di singolarità ed eventuali estensioni per continuità, asintoti, derivata, punti di non derivabilità, punti di massimo e minimo locale, eventuale massimo e minimo della funzione, derivata seconda, e intervalli di convessità. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.
   b) Calcolare, se possibile, l'integrale di $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.
   c) Dire per quali α è finito l'integrale
$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} dx.$$

4. Sia
$$f(x) = \frac{3(1-\cos x)\sin^2 x}{x^\alpha \tan x}.$$
   a) Calcolare al variare di α il limite $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.
   b) Dire per quali α è finito l'integrale $\int_0^1 f(x)dx$.
   c) Calcolare l'integrale per $\alpha = 0$.

5. Sia
$$a_n = \frac{n^\alpha \left(\sin \frac{1}{n^2} - \tan \frac{1}{n^2}\right)}{4n - 2\arctan n}.$$
   a) Calcolare al variare di α il limite $\lim_{n\to+\infty} a_n$.
   b) Dire per quali α è convergente la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$.

6. Sia
$$f(x) = \frac{3\sin x}{4(1-\cos x)^\alpha}.$$
   a) Calcolare al variare di α, il limite $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.
   b) Dire per quali α è finito l'integrale $\int_0^1 f(x)dx$.
   c) Calcolare l'integrale precedente per $\alpha = \frac{1}{2}$.

7. Studiare al variare di x la convergenza semplice e assoluta della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n \left(\frac{x+2}{2}\right)^n \sin\frac{1}{n}.$$

8. Studiare al variare di α il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n\alpha}}{n!}.$$

9. Sia
$$f(x) = \frac{1}{x(2\log^2 x - \log x - 1)}.$$
   a) (facoltativo) Studiare dominio, segno, continuità, punti di singolarità ed eventuali estensioni per continuità, asintoti, derivata, punti di non derivabilità, punti di massimo e minimo locale, massimo e minimo della funzione. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.
   b) Dire se è finito e calcolare l'integrale $\int_{e^2}^{+\infty} f(x)dx$.

10. Sia
$$f(x) = xe^{-x^2}.$$

a) Studiare dominio, segno, continuità, asintoti, derivata prima e seconda, punti di massimo e minimo locale, massimo e minimo della funzione, intervalli di convessità. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

b) Calcolare se possibile
$$\int_0^{+\infty} f(x)dx.$$
Calcolare se possibile
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

c) Calcolare il valore del limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{xe^{-x^2} - 6\sin x + 5x}{\sinh x + \sin x - 2x}.$$

11. (facoltativo) Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione
$$e^x - \alpha x - 1 = 0.$$

12. Sia
$$f(x) = (x+1)\log\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

a) Studiare dominio, segno, continuità, punti di singolarità ed eventuali estensioni per continuità, asintoti. Calcolare la derivata di f, e determinare i punti in cui f è derivabile (ed eventuali punti di non derivabilità). Calcolare la derivata seconda di f, e determinare i punti in cui f è derivabile due volte. Determinare gli intervalli di convessità e concavità della funzione. **Senza studiare il segno della derivata** dire se f ha massimo e minimo. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

b) (facoltativo) Calcolare (per parti), una primitiva di f. Calcolare, se è finito, l'integrale generalizzato $\int_0^1 f(x)dx$.

13. Si consideri
$$f(x) = e^x + \frac{1}{x-1}.$$

a) Determinare la natura del punto $x = 0$ (punto di massimo locale, minimo locale, né di massimo né di minimo).

b) (facoltativo) Calcolare al variare di $\alpha > 0$
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + \frac{1}{x-1}}{1 - \cos(x^\alpha)}.$$