ISOLUZIONI FOGLIO SERIE (foglio 8)

Esercizio 1

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n \left(1-\frac{1}{n^{3/2}}\right)^{5/2}$

uso criterio della radice $\sqrt[n]{3^n\left(1-\frac{1}{n^{3/2}}\right)^{n^{5/2}}} = 3\cdot \underbrace{\left(1-\frac{1}{n^{3/2}}\right)^{n^{3/2}}}_{\downarrow\, e^{-1}}$

$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = 3\cdot e^{-1} = \frac{3}{e} > 1$ la serie diverge.

2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n2^n+5^n}{\alpha^n+3^n}$

se $\alpha>3$ $\frac{n2^n+5^n}{\alpha^n+3^n} = \frac{5^n}{\alpha^n}\,\frac{\left(\overset{\nearrow 1}{\frac{n2^n}{5^n}+1}\right)}{\left(\underset{\downarrow 1}{1+\frac{3^n}{\alpha^n}}\right)} \sim \left(\frac{5}{\alpha}\right)^n$

se $\alpha=5$ $\lim_n a_n = 1$ → la serie non converge quindi diverge

se $\left(\frac{5}{2}\right)>1$ $\quad 5>\alpha>3$ la serie è asintotica a serie geom
di termine $\frac{5}{\alpha}>1 \Rightarrow$ diverge

se $\frac{5}{\alpha}<1$ $\quad \boxed{\alpha>5}$ la serie è asintotica a serie geometrica di termine $0<\frac{5}{\alpha}<1$ quindi converge.

se $\alpha\le 3$

$$\frac{n2^n+5^n}{\alpha^n+3^n}=\frac{5^n\overbrace{\left(\frac{n2^n}{5^n}+1\right)}^{\to 1}}{3^n\underbrace{\left(\frac{\alpha^n}{3^n}+1\right)}_{\to \begin{cases}1 & \text{se } \alpha<3\\ 2 & \text{se } \alpha=3\end{cases}}}\sim\left(\frac{5}{3}\right)^n$$

se $\alpha\le 3$ la serie è asintotica a serie geometrica di termine $\left(\frac{5}{3}\right)>1 \Rightarrow$ diverge

In conclusione $\begin{cases}\alpha\le 5 & \text{la serie diverge}\\ \alpha>5 & \text{la serie converge}\end{cases}$

3) Notiamo che nel primo caso

$$\sum a_n \quad a_n = \left(1-\frac{1}{2n}\right)^{5n} \to e^{-5/2} \neq 0$$

la serie non converge (perché non è rispettata condizione necess.)

↓ LIMITE NOTEVOLE!

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^{bn} \to e^{b/a}$$

nel secondo caso invece

$$a_n = \left(1-\frac{1}{2n}\right)^{5n^2} \sim e^{-5/2\, n} \to 0$$

uso criterio radice $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{5n^2}} = \left(1-\frac{1}{2n}\right)^{5n} \to e^{-5/2} < 1$

la serie converge

4)

$$\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{\cancel{n^2}+1-\cancel{n^2}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)} = \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+n\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}\, n \cdot \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)} \sim \frac{1}{\sqrt{n}\cdot n} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

la serie è asintotica a serie armonica generalizzata con $\alpha = \frac{3}{2} > 1 \Longrightarrow$ converge.

Es 2

$$a_n = \frac{n! + 5 \cdot 3^n}{n+n^n} = \left(\begin{array}{c}\text{confronto}\\ \text{tra infiniti}\\ \text{(raccolgo quello di}\\ \text{ordine maggiore}\end{array}\right) = \frac{n! \overbrace{\left(1+\frac{5 3^n}{n!}\right)}^{\to 1}}{n^n \underbrace{\left(\frac{n}{n^n}+1\right)}_{\to 1}}$$

$$\frac{n!}{n^n} \to 0$$

a) $\lim_n a_n = 0$

b) la serie è asintotica a serie $\sum_n \frac{n!}{n^n}$.

$$b_n = \frac{n!}{n^n}$$

uso criterio del rapporto

$$b_n = \frac{n!}{n^n} \qquad b_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{\cancel{(n+1)}\, n!}{(n+1)^n \cancel{(n+1)}} = \frac{n!}{(n+1)^n}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = b_{n+1} \cdot \frac{1}{b_n} = \frac{\cancel{n!}}{(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}$$

$\frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$ quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow$ converge anche la serie di partenza

Es 3 convergenza assoluta

$$|a_n| = \frac{1}{2^n \sqrt[3]{n}} \cdot |1+x^3|^n$$

uso criterio radice

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n \sqrt[3]{n}} |1+x^3|^n} = \frac{1}{2} \frac{|1+x^3|}{(\sqrt[3]{n})^{1/n}}$$

$$(\sqrt[3]{n})^{\frac{1}{n}} = (n^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{3n}} = e^{\frac{1}{3n}\log n} \to 1$$

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|1+x^3|}{2}$$

① se $\frac{|1+x^3|}{2} < 1 \Rightarrow |1+x^3| < 2 \Rightarrow \begin{cases} 1+x^3 < 2 \\ 1+x^3 > -2 \end{cases}$ $\begin{cases} x^3 < 1 \\ x^3 > -3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > -\sqrt[3]{3} \end{cases} \Rightarrow -\sqrt[3]{+3} < x < 1$ LA SERIE CONVERGE ASSOLUTAMENTE E ANCHE SEMPLICEMENTE

② se $\frac{|1+x^3|}{2} > 1 \Rightarrow |1+x^3| > 2 \Rightarrow x > 1$ oppure $x < -\sqrt[3]{3}$

la serie diverge assolutamente

inoltre

$$|a_n| = \frac{|1+x^3|^n}{2^n}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \underbrace{\left(\frac{|1+x^3|}{2}\right)^n}_{\text{esponenziale con base} > 1}\cdot\frac{1}{\underbrace{\sqrt[3]{n}}_{\text{polinomiale}}} \to +\infty$$

$|a_n| \to +\infty \Rightarrow a_n \not\to 0 \Rightarrow$ la serie non converge perché non è soddisfatta cond. necessaria

③ $x = 1$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+1)^n}{2^n\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

serie armonica generalizzata con $\alpha = \frac{1}{3} \leq 1$ DIVERGE.

4) $x = -\sqrt[3]{3}$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-3)^n}{2^n \sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n \sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \cancel{2^n}}{\cancel{2^n} \cdot \sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$$

serie a termini di segno alterno

$\left(\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} \right| = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \right.$ diverge (serie armonica gen. $\left. \alpha = \frac{1}{3} \leq 1 \right) \right)$

uso Leibniz $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ è decrescente e $a_n \to 0$

quindi la serie converge semplicemente

$-\sqrt[3]{3} < x < 1$ la serie converge assolutam. e semplicem.

$x = -\sqrt[3]{3}$ la serie converge SOLO semplicemente

$x \geq 1$, $x < -\sqrt[3]{+3}$ la serie non converge NÈ ASSOL. NÈ SEMPL

Es 4

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[9n^3\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)\right]^n$$

è serie a termini positivi. Uso criterio radice n-esima

$$\lim_n (a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_n \left[\left[9n^3\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)\right]^n\right]^{1/n} = \lim_n 9n^3\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right) =$$

$$\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n}-\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{6}\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$$

$$= \cancel{\frac{1}{n}}-\cancel{\frac{1}{n}}+\frac{1}{6}\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= \frac{1}{n^3}\left[\frac{1}{6}+o(1)\right]$$

$x \to 0$

$$\text{sen}\, x = x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

$$x=\frac{1}{n}$$

$$= \lim_n 9\cancel{n^3}\cdot\frac{1}{\cancel{n^3}}\cdot\left[\frac{1}{6}+o(1)\right] = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} > 1$$

LA SERIE DIVERGE

Es 5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh\left(\frac{1}{n^3}\right) - 1}{\left|\sin \frac{1}{n^{4/3}} - \frac{1}{n^{4/3}}\right|}$$

è una serie a termini positivi dato che

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \geq 1$$

Uso il criterio del confronto asintotico e sostituisco a $\cosh \frac{1}{n^3}$ e a $\sin\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)$ i loro polinomi di Taylor.

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\cosh \frac{1}{n^3} - 1 = \cancel{1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^3}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^3}\right)^2 \cancel{-1} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

$$= \frac{1}{n^6}\left(\frac{1}{2} + o(1)\right)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad x = \frac{1}{n^{4/3}}$$

$$\left|\sin \frac{1}{n^{4/3}} - \frac{1}{n^{4/3}}\right| = \left|\cancel{\frac{1}{n^{4/3}}} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)^3 + o\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)^3 \cancel{-\frac{1}{n^{4/3}}}\right| =$$

$$= \left|-\frac{1}{6}\,\frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right| = \frac{1}{n^4}\left(\frac{1}{6} + o(1)\right)$$

$$\frac{\cos \frac{1}{n^3} - 1}{\left|\sin \frac{1}{n^{4/3}} - \frac{1}{n^{4/3}}\right|} = \frac{1/n^6\left(\frac{1}{2} + o(1)\right)}{1/n^4\left(1/6 + o(1)\right)} = \frac{n^{-6}}{n^{-4}}\,\frac{\left(\frac{1}{2} + o(1)\right)}{\left(\frac{1}{6} + o(1)\right)} \sim \frac{1}{n^2}$$

SERIE
CONVERGE

Es 6 Uso criterio confronto asintotico (è serie a termini positivi)

$$\operatorname{arctg} x = x + o(x) \qquad x = \frac{3}{\sqrt{n}}$$

$$\operatorname{arctg} \frac{3}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\frac{1}{n^\alpha} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{n^\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\alpha + 1/2}}$$

converge per $\alpha + \frac{1}{2} > 1$

$\alpha > \frac{1}{2}$

diverge per $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

Es 7 $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$

$$\sin \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^5 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^5 = \frac{1}{n^{1/2}} - \frac{1}{6}\frac{1}{n^{3/2}} + \frac{1}{120}\frac{1}{n^{5/2}}$$

$$+ o\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)$$

$$\frac{a}{n^{3/2}} - 6\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) - \frac{2}{n^2} = \frac{a}{n^{3/2}} - 6\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{6}\frac{1}{n^{3/2}} +\right.$$

$$\left. - \frac{1}{120}\frac{1}{n^{5/2}}\right) - \frac{2}{n^2} = \frac{a}{n^{7/2}} - \cancel{6}\frac{1}{\cancel{6}}\frac{1}{n^{3/2}} + 6\frac{1}{120}\frac{1}{n^{5/2}} - \frac{2}{n^{2}} =$$

$$= (a-1)\frac{1}{n^{3/2}} + \frac{1}{20}\frac{1}{n^{5/2}} - \frac{2}{n^2} =$$

Se

$a=1$ $$\frac{1}{20}\frac{1}{n^{5/2}} - \frac{2}{n^2} = \frac{1}{n^2}\left(-2 + \frac{1}{20}\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{n^2}\left(-2 + o(1)\right)$$

& $a \neq 1$ $$\frac{1}{n^{3/2}}\left(a-1+o(1)\right)$$

Dunque $$\left|\frac{a}{n^{3/2}} - 6\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \frac{2}{n^2}\right| = \begin{cases} a=1 & \frac{1}{n^2}\left(2+o(1)\right) \\ a\neq 1 & 1/n^{3/2}\left(|a-1| + o(1)\right) \end{cases}$$

$$e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + o(1)\right)$$

a) se $a = 1$ $\quad a_n = \dfrac{\frac{1}{n^2}\left(2 + o(1)\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + o(1)\right)} = \dfrac{n^{-2}}{n^{-1/2}} \dfrac{(2 + o(1))}{(1 + o(1))} = \dfrac{1}{n^{3/2}} \dfrac{(2+o(1))}{(1+o(1))}$

se $a = 1$ $\quad \lim_n a_n = 0 \quad$ e $\quad a_n \sim \dfrac{1}{n^{3/2}}$ serie convergente

$\frac{3}{2} > 1$ (confronto as. con serie armonica)

b) se $a \neq 1$ $\quad a_n = \dfrac{\frac{1}{n^{3/2}}\left(|a-1| + o(1)\right)}{\frac{1}{n^{1/2}}\left(1 + o(1)\right)} = \dfrac{n^{-3/2}}{n^{-1/2}} \dfrac{|a-1| + o(1)}{1 + o(1)} = \dfrac{1}{n} \dfrac{(|a-1| + o(1))}{1 + o(1)}$

$\lim_n a_n = 0 \qquad a_n \sim \dfrac{1}{n} \Rightarrow$ serie DIVERGE