Istituzioni di Analisi Matematica
Esercizi sulle serie

Esercizio 1. Risolvere i seguenti esercizi su serie, facendo ricorso al confronto con la serie geometrica o ai criteri di convergenza del rapporto, della radice o del confronto asintotico (per serie a termini positivi).

1. Determinare il carattere della seguente serie:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n \left(1 - \frac{1}{n^{3/2}}\right)^{n^{5/2}}.$$
2. Dire per quali $\alpha \geq 0$ la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n2^n + 5^n}{\alpha^n + 3^n}$$
converge.
3. Si studi la convergenza delle serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{5n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{5n^2}.$$
4. Si studi la convergenza delle serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{\sqrt{n}}.$$

Esercizio 2. Si consideri la successione
$$a_n = \frac{n! + 5 \cdot 3^n}{n + n^n}.$$

(a) Calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

(b) Studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Esercizio 3. Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza semplice e assoluta della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n \sqrt[3]{n}} (1 + x^3)^n.$$

Esercizio 4. Determinare il carattere della seguente serie:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[9n^3 \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)\right]^n.$$

Esercizio 5. Determinare il carattere della seguente serie:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\cosh\frac{1}{n^3} - 1\right)}{\left|\sin\frac{1}{n^{4/3}} - \frac{1}{n^{4/3}}\right|}.$$

Esercizio 6. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \arctan\frac{3}{\sqrt{n}}.$$

Esercizio 7. Si consideri la successione

$$a_n = \frac{\left| \frac{a}{n^{3/2}} - 6\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) - \frac{2}{n^2} \right|}{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1}$$

(a) Calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty} a_n$ al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

(b) Discutere la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.