Soluzioni foglio 3 tris

3) $f(x) = \lg(e^{2x} - 4e^x + 4)$.

$D = (-\infty, \lg 2) \cup (\lg 2, +\infty)$

f è continua in D.

calcolo limiti in $\lg 2$, $+\infty$, $-\infty$.

$$\lim_{x \to \lg 2} \lg(\underbrace{e^{2x} - 4e^x + 4}_{\to 0^+}) = -\infty$$

infatti: $e^{2x} - 4e^x + 4 = (e^x - 2)^2$

$x \to \lg 2$

$e^x \to 2$

$(e^x - 2)^2 \to 0^+$

$$\lim_{x\to+\infty} \lg\left(e^{2x}-4e^{x}+4\right)$$

$+\infty-\infty$ f.i.!

$$\lim_{x\to+\infty} e^{2x}-4e^{x}+4 =$$

raccolgo l'infinito di ordine MAGGIORE tra e^{2x} e e^{x} è maggiore e^{2x}.

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{e^{2x}}_{\to +\infty}\underbrace{\left(1-\frac{4}{e^{x}}+\frac{4}{e^{2x}}\right)}_{\to 1}$$

NB $e^{2x}=e^{x}\cdot e^{x}$!

$e^{2x}=(e^{2})^{x} \overset{!}{=} e^{x}\cdot e^{x}$

$$= +\infty\cdot 1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \lg\left(e^{2x}-4e^{x}+4\right) = \lim_{y\to+\infty} \lg y = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \lg\Big(\underbrace{\underset{\downarrow}{e^{2x}} - \underset{\downarrow}{4e^{x}}}_{\substack{0 \quad\quad 0 \\ 0+0+4}} + 4\Big) = \lg 4$$

$\lg x$ è continuo!

4) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{|x+2|}{x}\right)$

$D = (-\infty, -1]$

oss f è continua in tutto il suo dominio e anche in -1 (continua a sinistra)

$$\lim_{x \to -1^-} \arcsin\left(\frac{|x+2|}{x}\right) = \arcsin\left(\frac{|1|}{-1}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Calcolo limite a $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \arcsin\left(\frac{|x+2|}{x}\right)$$

$x \to -\infty$

$x+2 < 0$

$|x+2| = -x-2$

$$= \lim_{x \to -\infty} \arcsin\left(\frac{-x-2}{x}\right)$$

f. indet!

$\frac{+\infty}{-\infty}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-x-2}{x} =$$

(raccolgo infinito di ordine maggiore)

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x}\left(-1-\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}} = \lim_{x \to -\infty} -1 - \frac{2}{x} = -1$$

$\frac{2}{x} \to 0$

$$\lim_{x\to-\infty} \arcsin \frac{|x+2|}{x} = \lim_{y\to-1} \arcsin y = \arcsin(-1)$$
$$= -\frac{\pi}{2}$$

ES 5 $\quad f(x) = \dfrac{1}{|x+1|-2}$ $\qquad D: \ x \neq 1, -3$

$D = (-\infty, -3) \cup (-3, 1) \cup (1, +\infty)$

f è continua in D

calcoliamo i limiti a $\pm\infty$.

Noto che se $x \to +\infty \quad |x+1|-2 \to +\infty$

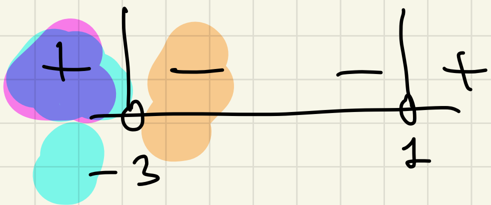
se $x \to -\infty \quad |x+1|-2 \to +\infty$

dunque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{|x+1|-2} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{|x+1|-2}$

ora calcoliamo i limiti in $x=1$ e $x=-3$

se $x \to 1$ $\quad |x+1|-2 \to 0$ $\qquad$ se $x \to -3$ $\quad |x+1|-2 \to 0$

Ricordiamo anche che $|x+1|-2>0 \iff x>1$ oppure $x<-3$



quindi se $x \to 1^+$ $\quad |x+1|-2 \to 0$ e $|x+1|-2>0$

mentre se $x \to 1^-$ $\quad |x+1|-2 \to 0$ e $|x+1|-2<0$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{|x+1|-2} = +\infty \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{|x+1|-2} = -\infty$$

Analogam.

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{1}{|x+1|-2} = +\infty \qquad \lim_{x \to -3^+} \frac{1}{|x+1|-2} = -\infty$$

11) $f(x) = 2x - \sqrt{|x^2-4x+3|}$

$D = \mathbb{R}.$

Calcolo limiti a $+\infty$, $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \underbrace{2x}_{-\infty} - \sqrt{\underbrace{|x^2-4x+3|}_{+\infty}} = -\infty - \infty$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} 2x - \sqrt{|x^2-4x+3|} =$$ f. indet! $+\infty - \infty$.

NB $x \to +\infty$ $|x^2-4x+3| = x^2-4x+3$

TOLGO IL MODULO.

per risolvere f. indet. applico trucco della razionalizzazione

$$\left(2x - \sqrt{x^2-4x+3}\right) \cdot \frac{2x+\sqrt{x^2-4x+3}}{2x+\sqrt{x^2-4x+3}} =$$

$$= \frac{4x^2 - (x^2-4x+3)}{2x+\sqrt{x^2-4x+3}} =$$

$$= \frac{4x^2-x^2+4x-3}{2x+\sqrt{x^2-4x+3}} = \frac{3x^2+4x-3}{2x+\sqrt{x^2-4x+3}}$$

NUMERATORE

$$3x^2+4x-3 = \underbrace{x^2}_{\to +\infty}\underbrace{\left(3+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}_{\to 3}$$

$\frac{4}{x} \to 0$, $\frac{3}{x^2} \to 0$

DENOMINATORE

$\sqrt{x^2}=x$

$x>0!$

$$2x+\sqrt{x^2-4x+3} = 2x+\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)} =$$

$$= 2x+x\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} = \underbrace{x}_{\to +\infty}\underbrace{\left(2+\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}_{\to 2+1=3}$$

$\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2} \to 0$

torno al limite

$$\lim_{x\to+\infty} 2x-\sqrt{|x^2-4x+3|} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\cancel{2}}\overbrace{\left(3+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}^{\to 3}}{\cancel{x}\left(\underbrace{2+\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}_{\to 3}\right)} = +\infty$$