[Fog]lio 1 Soluzioni

[Ese]rcizi

1) $E = \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n ,\ n \in \mathbb{N} \right\}$.

Dato che $0<\frac{1}{2}<1$ si ha che $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^m$ $\forall n>m$

Quindi $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $n \neq 0$

$1 = \sup E$ e inoltre $1 = \max E$ (corrisponde a $n=0$

Ora osserviamo che $\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$ $\forall n$, quindi 0 è un minorante. Voglio mostrare che NON ESISTONO MINORANTI MAGGIORI DI ZERO

Sia $x>0$. ~~Allora esiste~~ Mi chiedo se esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x > \left(\frac{1}{2}\right)^{n_0}$ (e in questo caso x non è un minorante di E)

$$x > \left(\frac{1}{2}\right)^{n_0} \iff \frac{1}{x} < 2^{n_0} \iff \lg\left(\frac{1}{x}\right) < \lg 2^{n_0} \iff$$

$$\lg\left(\frac{1}{x}\right) < n_0 \lg 2 \iff n_0 > \frac{\lg(1/x)}{\lg 2}.$$

Dunque ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > \frac{\lg 1/x}{\lg 2}$ soddisfa $x > \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\Rightarrow$ x non è minorante. $\Rightarrow$ 0 è il maggiore dei minoranti $0 = \inf E$. 0 non è min E.

2) $E = \left\{ 2 + (-1)^n \frac{1}{n+1} ,\ n \in \mathbb{N} \right\}$.

n pari $\Rightarrow$ $n = 2m$ $\exists m \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\cancel{2+(-1)^n \frac{1}{n+1} = 2 + \frac{1}{2m+1}}$

$$2 + (-1)^n \frac{1}{n+1} = 2 + (-1)^{2m} \frac{1}{2m+1} = 2 + \frac{1}{2m+1}$$

n dispari $\Rightarrow$ $n = 2m+1$ $\Rightarrow$ $2 + (-1)^n \frac{1}{n+1} = 2 + (-1)^{2m+1} \frac{1}{2m+1+1}$

$= 2 - 1$

Dunque

$$E = \left\{ 2 + \frac{1}{2m+1},\ m \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ 2 - \frac{1}{2m+2},\ m \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$2 < 2 + \frac{1}{2m+1} \leq \underbrace{2 + \frac{1}{1} = 3}_{\text{scelgo } m = 0} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\underbrace{2 - \frac{1}{2}}_{\text{scelgo } m=0} \leq 2 - \frac{1}{2m+2} < 2$$

Dunque $\sup E = 3 = \max E$ (corrispondente a $n = 0$)

$\inf E = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \min E$. (corrisp a $n = 1$)

3) $E = \{ n^2(\cos(n\pi) - 1),\ n \in \mathbb{N} \}$

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Dunque $n^2(\cos(n\pi) - 1) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -2n^2 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$

Ora $-2n^2 < 0 \ \forall n \neq 0$

Dunque $\sup E = 0 = \max E$

mentre $\inf E = -\infty$ (l'insieme NON è limitato inferiormente).

4) $E = \left\{ (-1)^n - \frac{1}{n+1} \right\}$

n pari $\Rightarrow n = 2m$ $\quad (-1)^n - \frac{1}{n+1} = (-1)^{2m} - \frac{1}{2m+1} =$

$$= 1 - \frac{1}{2m+1}$$

n dispari $\Rightarrow n = 2m+1$

$$(-1)^n - \frac{1}{n+1} = (-1)^{2m+1} - \frac{1}{2m+1+1} = -1 - \frac{1}{2m+2}$$

$$E = \left\{ 1 - \frac{1}{2m+1}, m \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ -1 - \frac{1}{2m+2}, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$0 \underset{\substack{\downarrow \\ \text{scelgo} \\ m=0}}{\leq} 1 - \frac{1}{2m+1} < 1 \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$-\frac{3}{2} = \underbrace{-1-\frac{1}{2} \leq}_{\text{scelgo } m=0} -1 - \frac{1}{2m+2} < -1 \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

Dunque $\underline{\inf E = -\frac{3}{2} = \min E}$ (corrisponde alla scelta $n=1$ $(-1)^1 - \frac{1}{1+1} = -\frac{3}{2}$)

Ora 1 è un maggiorante di E. Voglio mostrare che è il minore dei maggioranti.
Fisso $0 < x < 1$ e voglio mostrare che esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $1 - \frac{1}{2m+1} > x$ (allora x non è maggiorante).

$$1 - \frac{1}{2m+1} > x \iff 1 - x > \frac{1}{2m+1} \underset{(1-x)>0!}{\iff} \frac{1}{1-x} < 2m+1$$

$$\iff 2m > \frac{1}{1-x} - 1 \iff m > \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x} - 1\right].$$

se scelgo $m > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)$ allora $1 - \frac{1}{2m+1} > x \Rightarrow x$ non è un maggiorante!

Dunque $\sup E = 1$

1 non è il max E perché $1 - \frac{1}{2m+1} < 1 \ \forall m$