

TRASMISSIONE DEL CALORE

Corso di Fisica Tecnica per Ingegneria Civile

Corso di Fisica Tecnica per Ingegneria per l'ambiente e il territorio

(si ringrazia per la concessione il Prof. Ezio Zandegiacomo dell'Università di Trieste)

Indice

1	INTRODUZIONE ALLA TRASMISSIONE DEL CALORE.....	1
1.1	L'IMPORTANZA DELLA TRASMISSIONE DEL CALORE.....	1
1.2	LA TRASMISSIONE DEL CALORE E LA TERMODINAMICA.	1
1.3	MODALITÀ DI SCAMBIO TERMICO.....	4
1.3.1	CONDUZIONE.....	4
1.3.2	CONVEZIONE.	7
1.3.3	IRRAGGIAMENTO.....	9
1.4	LA SUPERFICIE DI CONTROLLO.....	11
2	LA CONDUZIONE.....	13
2.1	LA LEGGE DI FOURIER PER MEZZI ISOTROPI.....	13
2.2	LA CONDUTTIVITÀ.	14
2.3	L'EQUAZIONE DI FOURIER.....	16
2.4	LE CONDIZIONI INIZIALI E QUELLE AL CONTOURNO.	22
2.5	CONDUZIONE IN REGIME STAZIONARIO.	23
2.5.1	INTRODUZIONE.	23
2.5.2	CONDUZIONE MONODIMENSIONALE SENZA GENERAZIONE DI CALORE IN PARETE PIANA.	23
2.5.3	L'ANALOGIA ELETTROTHERMICA.....	26
2.5.4	PARETE MULTISTRATO.....	27
2.5.5	COEFFICIENTE DI SCAMBIO TERMICO GLOBALE O TRASMITTANZA.	29
2.5.6	PARETI A GEOMETRIA CILINDRICA.	30
2.5.7	RAGGIO CRITICO.....	33
2.5.8	CENNI AL PROBLEMA DELLA CONDUZIONE STAZIONARIA MULTIDIMENSIONALE	36
2.5.9	CONDUZIONE MONODIMENSIONALE CON GENERAZIONE DI CALORE.	39
2.6	CONDUZIONE NON STAZIONARIA.	42
2.6.1	INTRODUZIONE.	42
2.6.2	IL METODO DELLE CAPACITÀ CONCENTRATE.....	43
2.6.3	ADIMENSIONALIZZAZIONE DELL'EQUAZIONE DELLA CONDUZIONE NON STAZIONARIA.	50
2.6.4	DIAGRAMMI DI HEISLER.....	52
2.6.4.1	Lastra piana monodimensionale.....	52
2.6.4.2	Sistemi radiali monodimensionali: cilindri lunghi e sfere con condizioni convettive al contorno. ..	56
2.6.4.3	Conduzione non stazionaria in corpi bi e tridimensionali.	62
3	LA CONVEZIONE.	65
3.1	INTRODUZIONE.....	65
3.2	IL NUMERO DI NUSSELT.	65
3.3	IL NUMERO DI REYNOLDS.	67
3.4	IL NUMERO DI PRANDTL.....	67
3.5	TEOREMA DI BUCKINGHAM	68
3.6	CONVEZIONE FORZATA IN MOTI ESTERNI.	71
3.6.1	INTRODUZIONE.	71
3.6.2	LASTRA PIANA CON DEFLUSSO PARALLELO.....	72
3.6.3	DEFLUSSO SU SUPERFICI CURVE E CILINDRICHE.....	74
3.6.4	BANCHI DI TUBI INVESTITI ORTOGONALMENTE	79

3.7 CONVEZIONE FORZATA IN MOTI INTERNI.	83
3.7.1 BILANCIO DI ENERGIA IN MOTO INTERNO COMPLETAMENTE SVILUPPATO.	84
3.7.1.1 Bilancio di energia.....	86
3.7.1.2 Flusso termico costante.....	87
3.7.1.3 Temperatura di parete costante.....	88
3.7.2 CORRELAZIONI PER IL MOTO INTERNO COMPLETAMENTE SVILUPPATO.	90
3.8 CONVEZIONE NATURALE.	91
3.8.1 INTRODUZIONE.	91
3.8.2 CORRELAZIONI PER LA CONVEZIONE NATURALE ESTERNA.	93
 <u>4 IRRAGGIAMENTO TERMICO.</u>	 <u>97</u>
4.1 INTRODUZIONE.....	97
4.2 PROPRIETÀ ENERGETICHE FONDAMENTALI.	98
4.2.1 INTENSITÀ DI RADIAZIONE.	98
4.2.2 POTERE EMISSIVO.....	100
4.2.3 IRRADIAZIONE	101
4.2.4 RADIOSITÀ	102
4.3 IL CORPO NERO.....	103
4.3.1 DEFINIZIONE DI CORPO NERO.....	103
4.3.2 LA LEGGE DI PLANCK.	104
4.3.3 LEGGE DI WIEN.	105
4.3.4 LEGGE DI STEFAN-BOLTZMANN.....	106
4.4 PROPRIETÀ DELLE SUPERFICI REALI.....	106
4.4.1 EMISSIONE DI UNA SUPERFICIE REALE.....	106
4.4.2 ASSORBIMENTO, RIFLESSIONE, TRASMISSIONE	109
4.4.3 LEGGE DI KIRCHHOFF.	111
4.5 SCAMBIO TERMICO TRA SUPERFICI.....	115
4.5.1 FATTORI DI VISTA.....	115
4.5.2 SCAMBIO TERMICO TRA SUPERFICI NERE.	121
4.5.3 SCAMBIO TERMICO TRA SUPERFICI GRIGIE DIFFUSE FORMANTI UNA CAVITÀ.....	122
4.5.3.1 Introduzione	122
4.5.3.2 Bilancio termico di una superficie	123
4.5.3.3 Scambio termico tra più superfici formanti una cavità	124
4.5.3.4 Scambio termico in una cavità formata da due superfici grigie.	125
4.5.3.5 Schermi alla radiazione.....	129
4.6 CENNI SULL'IRRAGGIAMENTO SOLARE	132
 <u>5 SCAMBIATORI DI CALORE.</u>	 <u>141</u>
5.1 INTRODUZIONE.....	141
5.2 IL COEFFICIENTE GLOBALE DI SCAMBIO TERMICO.....	144
5.3 PROGETTO DI UNO SCAMBIATORE CON IL METODO DELLA TEMPERATURA MEDIA LOGARITMICA.	145
5.4 METODO DELL'EFFICIENZA.....	156
 <u>APPENDICE : TABELLE DELLE PROPRIETÀ DEI FLUIDI</u>	 <u>161</u>
 <u>BIBLIOGRAFIA</u>	 <u>169</u>

1 Introduzione alla trasmissione del calore.

1.1 *L'importanza della trasmissione del calore.*

Nella prima parte del corso è stato definito il concetto di calore e abbiamo visto che interviene in tutti i campi legati alla nostra vita, dalle problematiche biologiche, al campo industriale, a quello ambientale. Abbiamo anche visto che per avere un trasferimento di energia sotto forma di calore è necessario un salto termico. Ma qui ci eravamo fermati. Non avevamo affrontato il problema forse più importante: come si trasferisce questa energia? Quali sono i meccanismi fisici che stanno alla base del problema? Come possiamo quantizzare questa energia?.

In questa parte del corso cercheremo di dare una risposta sia qualitativa, sia quantitativa (anche se limitata a modelli elementari) a queste domande.

Si cercherà sempre di legare il problema teorico al caso pratico. E in questo campo trovare degli esempi non è cosa certamente difficile.

Nel campo industriale abbiamo incontrato diversi esempi:

- La produzione e la conversione di energia termica tramite combustibili fossili o nucleari, la geotermia, l'energia solare.
- Le apparecchiature per la conversione dell'energia termica: motori alternativi, turbine, scambiatori di calore, generatori di vapore.
- Il riscaldamento, il condizionamento e la ventilazione degli edifici.
- I processi produttivi.

Inoltre esempi interessanti di scambio termico si trovano anche in settori che non abbiamo analizzato nella parte di termodinamica applicata, quali il campo ambientale e quello biologico.

In campo ambientale, per esempio, i fenomeni di scambio termico sono molto importanti in settori quali:

- L'inquinamento termico da scarichi industriali.
- L'inquinamento dell'aria e dell'acqua.
- Le variazioni climatiche sia su scala globale, che locale.

A livello biologico, per esempio, questi fenomeni sono importanti per:

- La regolazione della temperatura del corpo e quindi sono legati a quelle che sono definite le condizioni di benessere termo-igrometrico, dati di progetto per gli impianti di condizionamento.
- Le condizioni ottimali per la riproduzione delle specie animali e vegetali.

E si potrebbero trovare moltissimi altri esempi.

Nei prossimi capitoli cercheremo di approfondire la conoscenza di questi fenomeni.

1.2 *La trasmissione del calore e la termodinamica.*

Anche se storicamente questo settore si è sviluppato in maniera autonoma, in realtà fa parte della termodinamica.

Nel corso di termodinamica applicata non abbiamo mai considerato il tempo in cui avviene un determinato processo. Questo perché si considerano sempre stati di equilibrio come condizioni iniziali e finali; quindi, se la trasformazione è reversibile, il tempo diviene infinito, in quanto consideriamo delle trasformazioni almeno quasi statiche; se, invece, la trasformazione è irreversibile non abbiamo alcun strumento per valutare che cosa succede all'interno della trasformazione stessa. Nel corso di trasmissione del calore daremo degli strumenti per valutare la velocità con cui avviene questo trasferimento di energia. **Ci riferiremo, quindi, alla potenza termica e non all'energia.**

È evidente che le trasformazioni che considereremo saranno irreversibili, poiché avvengono a velocità finita e con salto termico finito.

Quanto appena detto sembra contraddire tutto quello fino ad ora studiato.

In realtà, quando considereremo lo scambio termico all'interno di un solido o di un fluido globalmente in quiete (definiremo questo meccanismo di scambio termico conduzione) saremo, sì, in condizioni di non equilibrio, ma almeno localmente saremo vicini all'equilibrio. Ciò significa che le variabili termodinamiche intensive come T , p , v diventano in questo caso funzione della posizione e del tempo:

$$\begin{aligned} T &= T(\vec{x}, t) \\ p &= p(\vec{x}, t) \\ v &= v(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (1-1)$$

Per giustificare l'attendibilità di questo modello bisognerebbe ricorrere alla teoria cinetica dove si potrebbe dimostrare che le fluttuazioni di una variabile termodinamica sono dell'ordine di $1/\sqrt{N}$,

dove N è il numero di particelle contenute nel volume di controllo. Essendo N molto grande, è lecito, quindi, parlare di valori ben definiti delle variabili termodinamiche nella stragrande maggioranza dei sistemi macroscopici.

Se il fluido è in movimento (in questo caso definiremo il meccanismo di scambio termico convezione) potremmo trovarci in condizioni turbolente e quindi lontani dallo stato di equilibrio. In questo caso definiremo un coefficiente empirico che chiameremo coefficiente convettivo.

L'approccio che impiegheremo per affrontare questi problemi sarà quello classico che abbiamo utilizzato in termodinamica (vedi Figura 1-1).

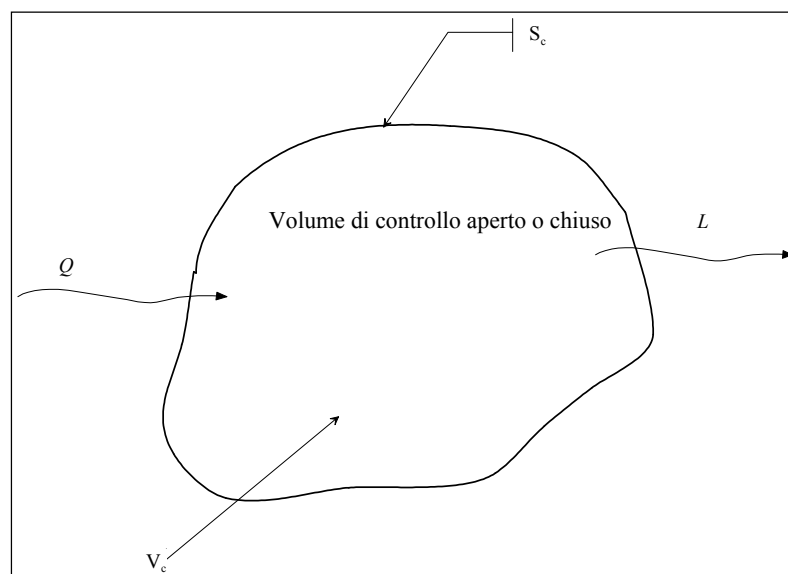


Figura 1-1: Volume di controllo.

- Definiremo un volume di controllo
- Applicheremo a questo volume di controllo le equazioni di conservazione della massa, dell'energia e l'equazione di stato.

L'equazione dell'energia per un sistema aperto può venir scritta come:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{V_c} e_{SA} \rho dV + \int_{S_c} (i + e_c + e_p) \rho \vec{w} \cdot \vec{n} dS = - \int_{S_c} \vec{q}'' \cdot \vec{n} dS + \int_{V_c} \dot{q}_g dV - \dot{L}_t \quad (1-2)$$

dove:

e_{SA} è l'energia per unità di volume del sistema aperto.

ρ è la densità.

i è l'entalpia specifica. Non l'abbiamo chiamata h perché utilizzeremo questa lettera per indicare il coefficiente convettivo.

e_c è l'energia cinetica specifica.

e_p è l'energia potenziale specifica.

$\vec{q}''$ è il flusso di calore che attraversa la superficie di controllo. È una grandezza vettoriale.

$\dot{q}_g$ è il calore generato per unità di volume all'interno del nostro volume di controllo.

$\dot{L}_t$ è la potenza tecnica.

Il significato della maggior parte dei termini l'abbiamo già visto. Soffermiamoci, quindi, sui termini nuovi.

$\vec{q}''$ rappresenta il flusso di calore, o meglio la potenza termica per unità di superficie. Come tutti i flussi è una grandezza vettoriale. Se noi vogliamo conoscere la potenza termica totale che è scambiata attraverso la superficie dobbiamo moltiplicare scalarmente il flusso per la superficie. Bisogna, infatti, ricordare che anche la superficie è un vettore orientato come la normale uscente dalla superficie stessa. Quindi, il prodotto scalare tra il flusso e la superficie che racchiude il volume di controllo è positivo se il flusso è uscente. Questo significa che per rispettare le convenzioni sui segni utilizzate in termodinamica (positivo il calore assorbito) abbiamo dovuto porre un segno meno davanti l'integrale.

Definiamo calore generato all'interno del volume di controllo quel calore che deriva dalla conversione di altre forme di energia in calore. Queste forme di energia sono quella chimica, l'elettrica, l'elettromagnetica e quella nucleare. Per fare un esempio noto a tutti, il calore generato per effetto Joule all'interno di un filo elettrico lo esprimeremo come un calore generato.

Se il sistema è chiuso si applica il primo principio per i sistemi chiusi e l'equazione diviene in termini integrali:

$$\frac{d}{d\tau} \int_{V_c} e_{SC} \rho dV = - \int_{S_c} \vec{q}'' \cdot \vec{n} dS + \int_{V_c} \dot{q}_g dV - \dot{L} \quad (1-3)$$

In questo caso molte volte è comodo esprimere il primo principio come:

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_g - \dot{L} = \dot{E}_{SC} \quad (1-4)$$

dove:

$\dot{E}_{in}$ è la potenza termica entrante.

$\dot{E}_{out}$ è la potenza termica uscente.

$\dot{E}_g$ è la potenza termica generata all'interno del sistema.

L è la potenza meccanica.

$\dot{E}_{sc}$ è la potenza termica immagazzinata nel sistema nell'unità di tempo.

Se il sistema è stazionario sparisce il termine legato all'energia del sistema.

Grazie alle osservazioni fatte in precedenza, per i solidi e per i fluidi incompressibili macroscopicamente in quiete e non in cambiamento di fase è possibile calcolare l'energia del sistema con la seguente relazione:

$$\dot{E}_{Sist} = mc \frac{dT}{d\tau} \quad (1-5)$$

dove:

$\dot{E}_{Sist}$ è l'energia immagazzinata nell'unità tempo dal sistema aperto o chiuso.

m è la massa del sistema.

c è il calore specifico.

Per i gas il calore specifico dipenderà dalla trasformazione.

1.3 **Modalità di scambio termico.**

Attraverso la superficie del volume di controllo si avrà scambio termico ogni qualvolta vi sia una differenza di temperatura tra l'ambiente e la superficie.

Le modalità fisiche con cui avviene questo trasferimento di energia sono diverse. In letteratura si trovano in genere tre modalità di scambio termico: conduzione, convezione ed irraggiamento.

In realtà i primi due meccanismi si basano su gli stessi principi e sono legati alla presenza di massa in movimento nel sistema. La differenza sta nel fatto che la conduzione è associata a moti atomici o molecolari, mentre la convezione è legata a moti macroscopici di massa.

L'irraggiamento, invece, è legato a fenomeni di propagazione di onde elettromagnetiche. Per questo motivo lo scambio termico radiativo può avvenire anche nel vuoto.

Analizziamo, ora, i singoli meccanismi.

1.3.1 **Conduzione.**

La conduzione è legata a processi che avvengono a livello atomico o molecolare.

Per spiegare il fenomeno consideriamo dapprima un gas macroscopicamente in quiete racchiuso in un recipiente in cui le due pareti poste orizzontalmente sono a temperatura diversa, con la parete superiore a temperatura maggiore, mentre le altre pareti sono adiabatiche (vedi Figura 1-2).

Le molecole vicino alla parete calda hanno una temperatura (e quindi un'energia cinetica) maggiore. Il loro moto avviene casualmente in tutte le direzioni; quindi prima o poi collideranno con le molecole a temperatura più bassa trasferendo a queste parte della loro energia. In tal modo vi è un trasferimento di energia dalla parete calda a quella fredda. Sperimentalmente si vede che il flusso termico è proporzionale al gradiente di temperatura e non alla differenza di temperatura.

Definiremo questo meccanismo una diffusione di energia.

Nei liquidi il meccanismo è analogo.

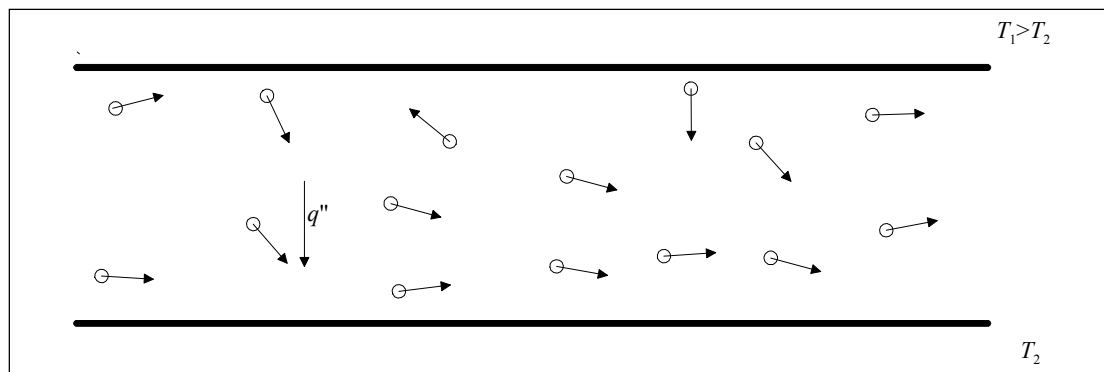


Figura 1-2: Conduzione in un fluido.

Nei solidi, invece, il meccanismo della conduzione dipende dal tipo di materiale:

- Nei materiali con struttura reticolare la trasmissione termica dipende dalle vibrazioni degli atomi costituenti il reticolo.
- Nei materiali conduttori, invece, la trasmissione termica dipende dal movimento degli elettroni liberi.

Dall'esperienza si è ricavata una legge fenomenologica, detta legge di Fourier.

La legge di Fourier in condizioni monodimensionali assume la forma:

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx} \quad (1-6)$$

dove:

q_x è la potenza termica trasmessa in direzione x (Mi scuso per il cambio di simbologia ma è quella utilizzata di solito nei testi di trasmissione del calore).

k è il coefficiente di conducibilità termica

A è l'area della superficie di scambio termico

Sulle ipotesi di monodimensionalità ritorneremo nel prosieguo del corso. Per ora accontentiamoci di questa formula che ci permette di cominciare ad analizzare il fenomeno fisico.

Il segno meno indica semplicemente che il calore viene trasferito in direzione opposta a quella del gradiente di temperatura.

La conducibilità termica è una proprietà termofisica del materiale. La sua unità di misura è $\left[\frac{W}{mK} \right]$.

Per i materiali di impiego comune il suo valore varia da un minimo di $0,03 \frac{W}{mK}$ per i materiali isolanti fino ad un massimo di $420 \frac{W}{mK}$ per l'argento.

Se consideriamo il caso di una parete piana di spessore L , monodimensionale (lo spessore della parete è molto più piccolo delle altre due dimensioni), in condizioni di stazionarietà e senza generazione interna di calore, applicando il primo principio all'intera parete, o a qualunque volume di controllo interno, possiamo scrivere che:

$$E_{in} = E_{out} \quad (1-7)$$

In altri termini vediamo che la potenza termica trasmessa rimane costante al variare di x .
 Inoltre, visto che l'area A è costante, anche il flusso q'' rimane costante.
 Dall'equazione (1-6) otteniamo per separazione di variabili:

$$\frac{q_x}{A} \int_0^L dx = - \int_{T_1}^{T_2} k dT \quad (1-8)$$

Supponendo k indipendente dalla temperatura ed integrando ottengo:

$$q_x = \frac{Ak}{L} (T_1 - T_2) \quad (1-9)$$

Vista, poi, l'arbitrarietà della scelta del limite superiore di integrazione nell'intervallo compreso tra T_1 e T_2 ricaviamo che l'andamento della temperatura è in questo caso lineare (vedi la Figura 1-3).

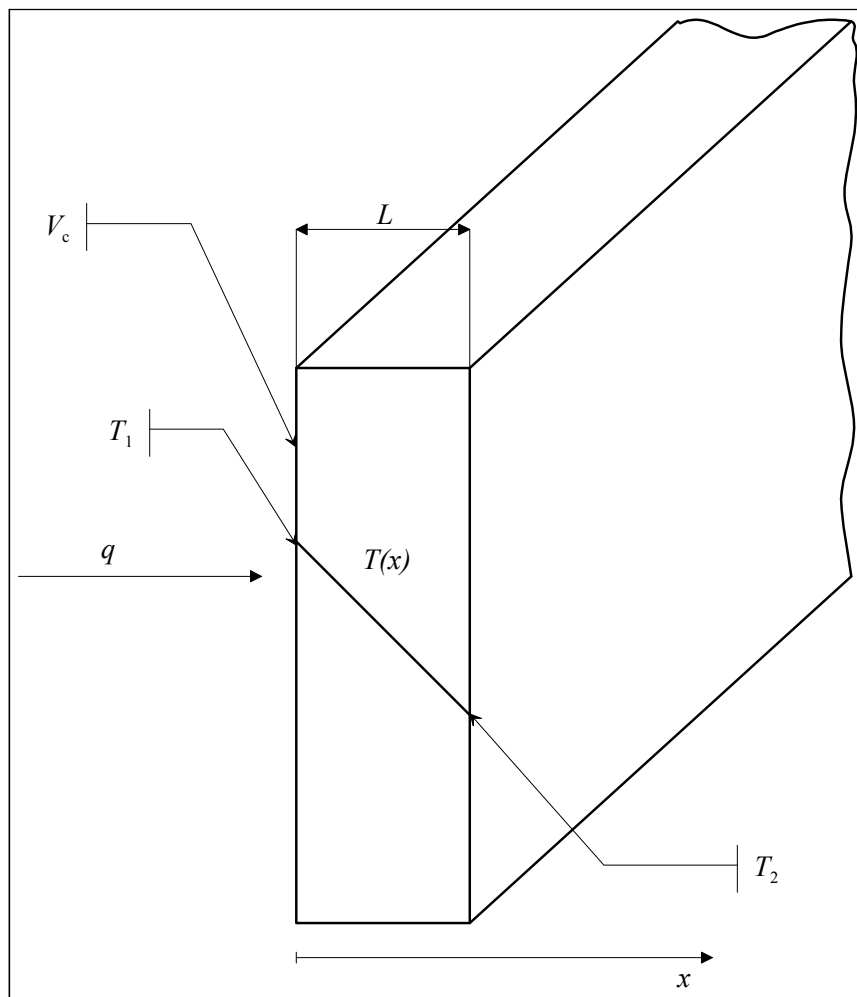


Figura 1-3: conduzione monodimensionale in parete piana.

Esempio 1-1

La parete di Figura 1-3 è fatta da una piastra di acciaio $\left(k = 45 \frac{W}{m K} \right)$ di spessore uguale a 5 mm .

Calcolare il flusso termico trasmesso nel caso in cui $T_1 = 50^\circ C$ e $T_2 = 20^\circ C$.

Svolgimento

Applicando la formula (1-9) si ricava che:

$$q_x'' = \frac{k}{L}(T_1 - T_2) = \frac{45}{5 \cdot 10^{-3}}(50 - 20) = 270000 \frac{W}{m^2} = 270 \frac{kW}{m^2}$$

1.3.2 Convezione.

La convezione è un fenomeno sicuramente più complesso rispetto alla conduzione. Modellizzandolo possiamo supporre che sia composto da due meccanismi che operano contemporaneamente:

- Trasferimento di energia per conduzione. Vi sarà sempre una diffusione di energia associata a moti molecolari.
- Trasferimento di energia causato dal moto macroscopico di fluido associato al movimento di un numero elevato di molecole.

Soprattutto il secondo meccanismo è causato dalla viscosità del fluido; pertanto, i suoi effetti si faranno sentire principalmente all'interno dello strato limite.

Dovremo, quindi, considerare non solo uno strato limite idrodinamico, (legato, cioè, alla velocità) ma anche uno strato limite termico (vedi Figura 1-4).

Analogamente allo strato limite idrodinamico, detta T_∞ la temperatura indisturbata a monte e T_s la temperatura di parete, definiremo strato limite termico la porzione di spazio in cui:

$$\frac{T(y) - T_s}{T_\infty - T_s} < 0,99$$

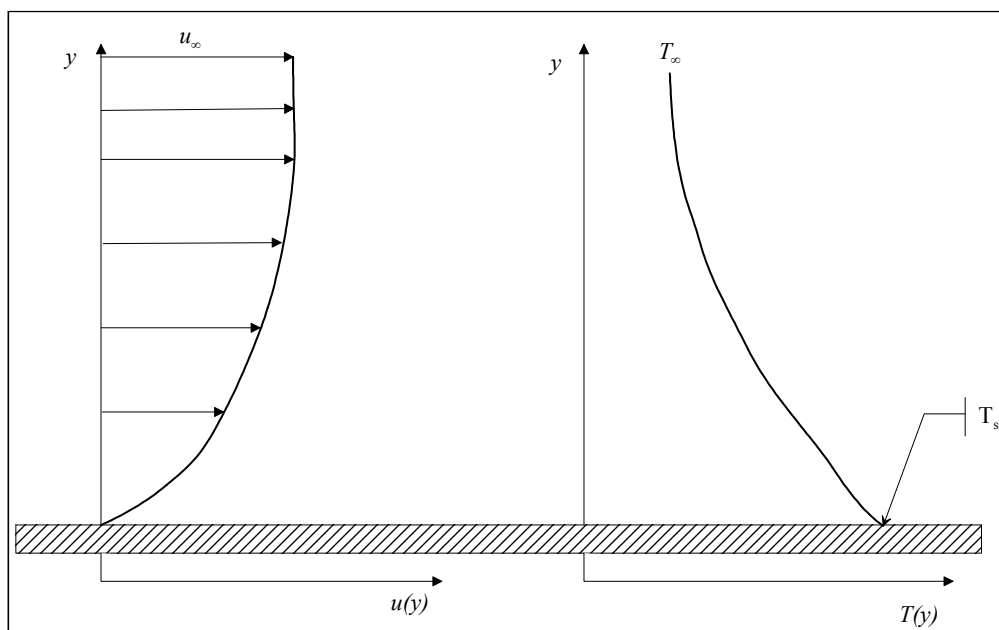


Figura 1-4: Strato limite idrodinamico e termico.

Lo spessore dello strato limite termico può essere maggiore, uguale o minore di quello dello strato limite idrodinamico.

Essendo legato allo strato limite, lo scambio termico dipenderà dal fluido, dalla forma del corpo, dal campo di moto, dalle condizioni al contorno.

La relazione che comunemente si utilizza è la cosiddetta legge di Newton:

$$q = hA(T_s - T_\infty) \quad (1-10)$$

dove:

h è il coefficiente convettivo (o coefficiente di convezione), espresso nel S.I. come $\left[\frac{W}{m^2 K} \right]$

Bisogna osservare che la (1-10) è, in realtà, la definizione di h .

Pertanto h andrà valutato di volta in volta utilizzando, di solito, formule sperimentali.

È bene precisare che, mentre il coefficiente conduttivo è una proprietà termofisica di un materiale, e, quindi, è esprimibile in funzione delle coordinate termodinamiche, il coefficiente convettivo è una nostra definizione di comodo.

È vantaggioso creare una classificazione della convezione in funzione del campo di moto.

Parleremo, quindi, di:

- Convezione forzata quando il moto del fluido è generato da azioni esterne, per esempio un ventilatore, una pompa, il vento.
- Convezione naturale (o libera) quando il moto è generato da forze di massa, quali le forze di galleggiamento (per intenderci il principio di Archimede) o forze centrifughe.

In tutti i due casi si potrà avere un moto:

- esterno, se il fluido investe la superficie esterna (moto su lastra piana, profilo aerodinamico, etc.).
- interno, se il campo di moto si sviluppa in una zona di spazio delimitata da superfici (moto in tubazioni, in canali, in cavità, etc.).

In tabella 1-1 sono riportati i valori tipici del coefficiente h .

Meccanismo	h $\left[\frac{W}{m^2 K} \right]$
Convezione naturale	5-25
Convezione forzata	
Gas	25-250
liquidi	50- 20000
Ebollizione e condensazione	2500- 100000

Tabella 1-1: valori tipici del coefficiente h .

Esempio 1-2

Calcolare il flusso termico scambiato per convezione all'interno di una stanza considerando la temperatura della parete T_p pari a $17^\circ C$ e quella interna dell'aria T_∞ uguale a $20^\circ C$. Si consideri

che il coefficiente convettivo è uguale a $h = 5 \frac{W}{m^2 K}$.

Svolgimento

Considerando l'equazione (1-10) si ottiene:

$$q'' = h(T_p - T_\infty) = 5 \cdot (17 - 20) = -15 \frac{W}{m^2}$$

Il segno meno è giustificato dal fatto che la stanza (il nostro sistema) cede calore.

1.3.3 Irraggiamento.

Il meccanismo di trasmissione termica che definiamo irraggiamento è totalmente differente dai due meccanismi appena visti.

L'irraggiamento è intrinsecamente legato allo stato della materia. L'emissione di energia è funzione dei cambiamenti che avvengono nella configurazione degli stati quantici degli atomi che costituiscono la materia. Pertanto l'emissione avviene non solo da corpi solidi ma anche da fluidi. Se il corpo è opaco, l'emissione è legata alla superficie del corpo, altrimenti è funzione del volume come avviene per esempio nelle nuvole.

L'energia del corpo radiante è trasportata da onde elettromagnetiche e, quindi, presenta le caratteristiche tipiche di ogni fenomeno ondulatorio. Sarà funzione non solo della temperatura, ma anche della lunghezza d'onda e della direzione di emissione. La trasmissione di energia, avvenendo tramite onde elettromagnetiche, non ha bisogno della presenza di un mezzo materiale; anzi nel vuoto avviene in modo più efficiente.

La massima potenza termica che una superficie può emettere in tutta la banda di frequenza è espressa tramite la legge di Stefan – Boltzmann:

$$q = A\sigma T_s^4 \quad (1-11)$$

dove:

T_s è la temperatura della superficie espressa in [K]

σ è la costante di Stefan – Boltzmann. Vale $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$

Questa relazione è valida solo per un corpo ideale, definito corpo nero. Nelle superfici reali la situazione è decisamente più complessa. Un modello che può venir applicato in molti casi è quello di corpo grigio. Definiremo, almeno in prima approssimazione, grigia una superficie che per ogni lunghezza d'onda emetta una frazione costante dell'energia che verrebbe emessa da un corpo nero la cui superficie si trova alla stessa temperatura di quella grigia. Definiremo questa frazione emissività della superficie e la indicheremo con ε . Ovviamente, per quanto detto, ε dovrà essere minore di 1.

Per le superfici reali grigie vale la relazione:

$$q = A\varepsilon\sigma T_s^4 \quad (1-12)$$

Lo scambio termico globale sarà dato dalla differenza tra l'energia che una superficie riceve dalle superfici che la “vedono” e quella emessa dalla superficie nello stesso intervallo di tempo.

Il problema è abbastanza complesso. Un caso semplice e molto comune nella tecnica è quello di una superficie grigia molto piccola all'interno di una superficie grande. Un esempio pratico potrebbe

essere quello di un uomo all'interno di una stanza. In questi casi, supponendo che il fluido non partecipi (vedi la Figura 1-5), la potenza termica scambiata vale:

$$q = \varepsilon A \sigma (T_2^4 - T_1^4) \quad (1-13)$$

dove:

ε è l'emissività della superficie "piccola"

A è l'area della superficie "piccola"

T_2 è la temperatura assoluta della superficie "grande"

T_1 è la temperatura assoluta della superficie "piccola"

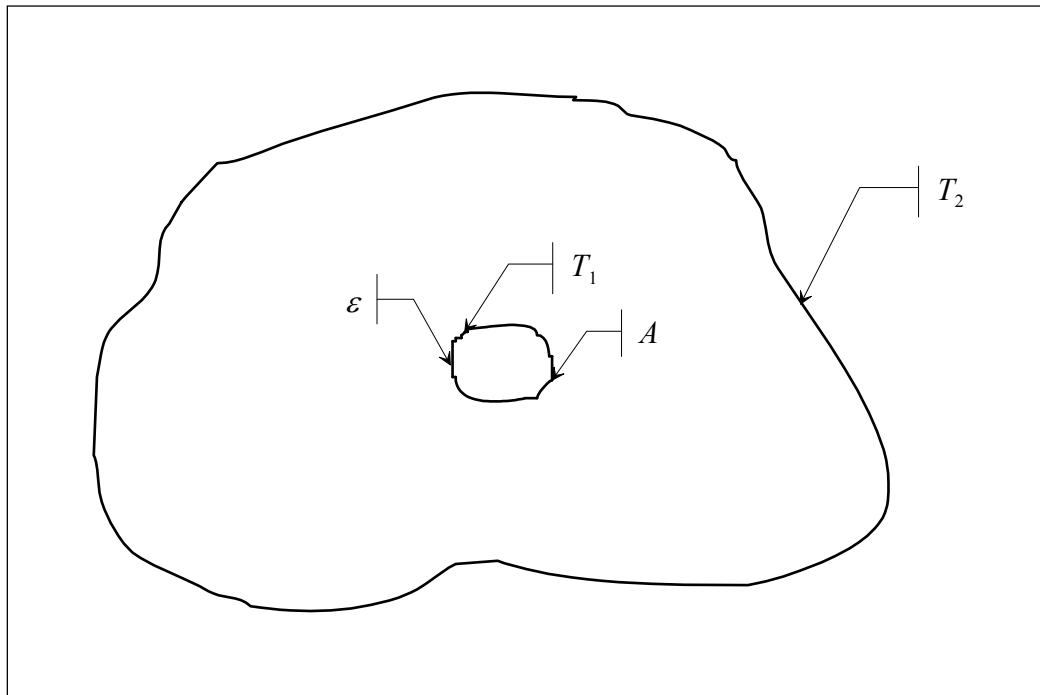


Figura 1-5: Scambio termico radiativo in cavità formata da 2 superfici, una "grande" e una "piccola".

Esempio 1-3

Consideriamo una piastra di 2 m^2 posta all'interno di un ambiente molto grande.

La piastra ha una temperatura superficiale uguale a $t_s = 220^\circ \text{C}$ e la sua emissività vale $\varepsilon = 0,9$, mentre la temperatura delle pareti dell'ambiente è uguale a $t_p = 20^\circ \text{C}$. Calcolare lo scambio termico radiativo.

Svolgimento.

Possiamo applicare l'equazione (1-13).

$$q = \varepsilon A \sigma (T_p^4 - T_s^4) = 0,9 \cdot 2 \cdot 5,64 \cdot 10^{-8} [(20 + 273,15)^4 - (220 + 273,15)^4] = -5255 \text{ W} = -5,25 \text{ kW}$$

1.4 La superficie di controllo.

Ora che abbiamo visto le modalità di scambio termico, dobbiamo ritornare un momento indietro e considerare un particolare volume di controllo.

Supponiamo di avere, come in Figura 1-6, una parete piana all'interno di una cavità in cui si muove un fluido con una certa velocità. Avremo quindi conduzione all'interno della parete, convezione tra la superficie esterna della parete e il fluido, irraggiamento tra la parete esterna e la cavità. Supponiamo per semplicità che il fluido non partecipi allo scambio radiativo.

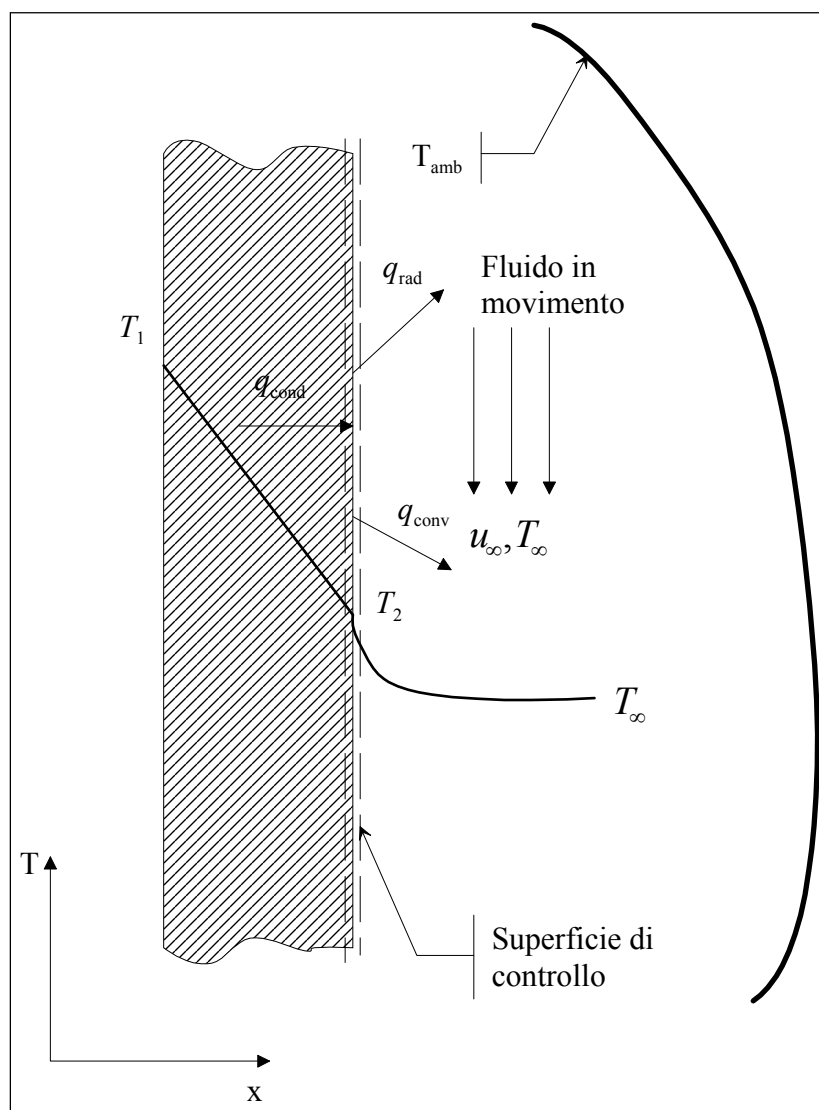


Figura 1-6: La superficie di controllo.

Dobbiamo a questo punto definire un volume di controllo. Potremmo far degenerare il nostro volume di controllo nella superficie esterna della parete. In questo caso, tutti i termini della (1-3) legati al volume si annullano. La (1-3), se supponiamo nullo il lavoro, si riduce a:

$$\int_{S_c} \vec{q}'' \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (1-14)$$

o in altri termini:

$$q_{\text{cond}} + q_{\text{rad}} + q_{\text{conv}} = 0 \quad (1-15)$$

È importante rilevare che la (1-14) vale, sia in condizioni stazionarie, sia non stazionarie.

2 La conduzione.

2.1 La legge di Fourier per mezzi isotropi.

Possiamo riscrivere la legge di Fourier (1-6) in termini di flusso.

$$q_x'' = \frac{q_x}{A} = -k \frac{dT}{dx} \quad (2-1)$$

Il flusso termico è un vettore orientato nella direzione normale alla superficie isoterma. In un sistema tridimensionale, considerando un sistema di riferimento cartesiano, potremo scrivere in termini generali che:

$$\vec{q}'' = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \right) = -k \nabla T \quad (2-2)$$

dove:

∇T è il gradiente della temperatura.

È da notare che il campo della temperatura $T = T(x, y, z)$ è un campo scalare.

Se conoscessimo a priori la giacitura della superficie isoterma, potremmo riscrivere la (2-2) come:

$$\vec{q}'' = -k \frac{\partial T}{\partial n} \quad (2-3)$$

dove:

n è la direzione normale alla superficie isoterma.

In figura 2-1 è schematizzato l'andamento del flusso termico rispetto alla superficie isoterma in un caso bidimensionale.

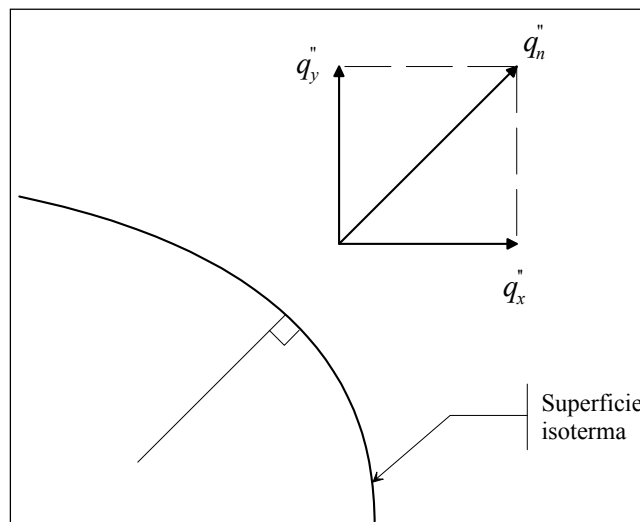


Figura 2-1: flusso termico normale all'isoterma.

2.2 La conduttività.

La conduttività termica è, come già detto nel paragrafo 1.3.1 una proprietà termofisica della materia.

Il suo valore è, quindi, strettamente legato alla struttura atomica del materiale. In termini generali si può affermare che il suo valore diminuisce passando dai solidi conduttori, alle leghe, ai liquidi e ai gas.

È bene ribadire, però, che i fluidi devono essere macroscopicamente fermi, altrimenti si innescano i meccanismi propri della convezione.

Nei solidi la conduttività dipende sia dal movimento degli elettroni liberi, sia dalle vibrazioni del reticolo cristallino. Il movimento degli elettroni liberi risulta essere inversamente proporzionale alla resistività elettrica del materiale. Nei materiali conduttori l'apporto alla conduttività degli elettroni liberi è preponderante rispetto alle vibrazioni del reticolo; nelle leghe i due apporti diventano comparabili.

Nei materiali non metallici l'apporto principale alla conduttività termica è dato dalle vibrazioni del reticolo; la sua regolarità favorisce la conduttività termica. Questo spiega perché il quarzo ha una conduttività termica ben più alta del vetro. Il diamante, per esempio, avendo una struttura reticolare molto ordinata presenta una conduttività termica molto alta, superiore anche ai migliori metalli puri. Nei materiali isolanti la conduttività dipende da numerosi fattori, legati sia al materiale, sia alla struttura. I principali fattori sono:

- La conduttività del materiale
- La densità apparente del materiale, espressa come rapporto tra la massa e il volume effettivo della struttura; questo parametro tiene conto in buona sostanza della presenza di aria all'interno della struttura, che ovviamente interviene anch'essa ad aumentare l'effetto di isolamento.
- Le proprietà radiative della superficie.

Per comprendere il comportamento dei gas bisogna rifarsi alla teoria cinetica.

Nel paragrafo 1.3.1 avevamo visto che la conduttività dipendeva dal trasferimento di energia tra le particelle “più calde” a quelle “più fredde”, che avveniva negli urti. Il numero degli urti e, quindi, la conduttività termica risulta essere proporzionale a:

$$k \propto n \bar{c} \lambda \quad (2-4)$$

dove:

n è il numero di particelle per unità di volume.

$\bar{c}$ è la velocità media molecolare.

λ è il cammino libero medio

Poiché la velocità media aumenta con la temperatura e diminuisce con la massa molecolare la conduttività termica avrà lo stesso comportamento.

D'altro canto, poiché n è proporzionale alla pressione del sistema, mentre il cammino medio è inversamente proporzionale ad essa, si ricava che la conduttività dipende molto poco dalla pressione.

Nei liquidi la situazione è molto più complessa e non ancora ben compresa.

Nei diagrammi successivi è riportata la conduttività termica per alcuni solidi, liquidi e gas in funzione della temperatura.

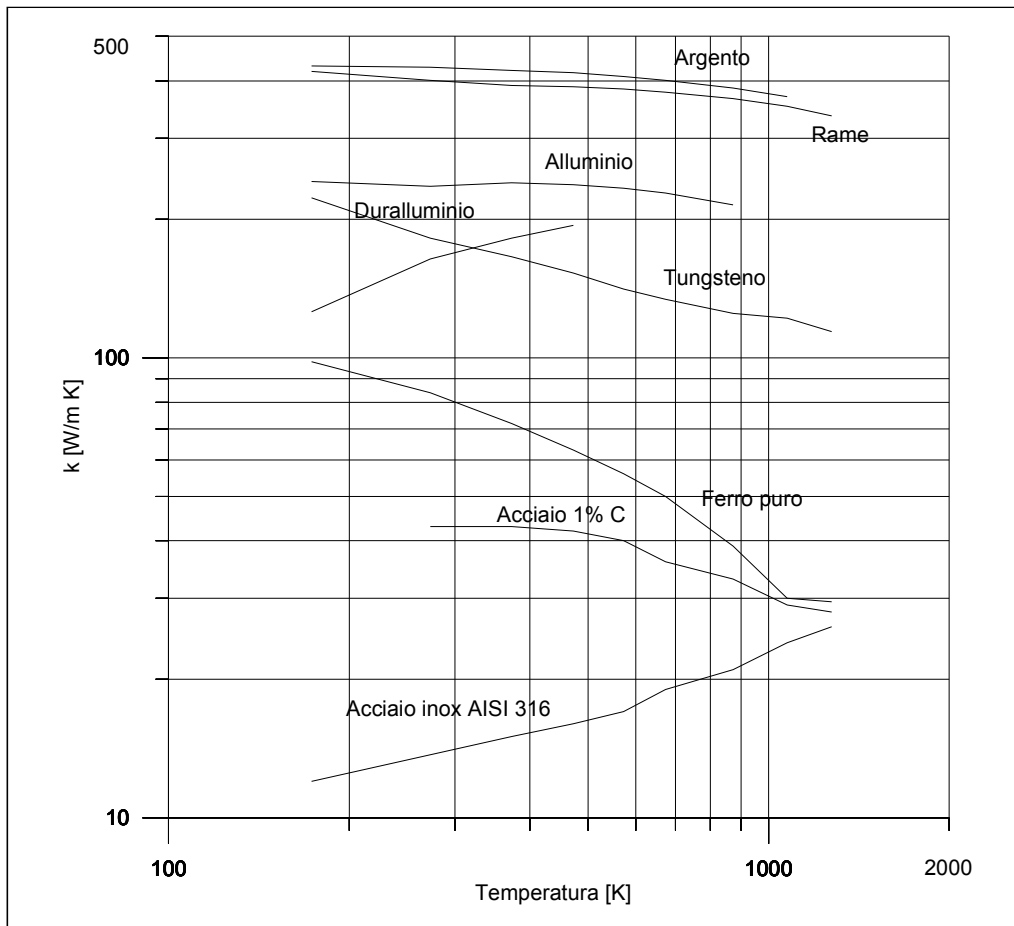


Figura 2-2: Conduttività termica, k , in funzione della temperatura in alcuni solidi.

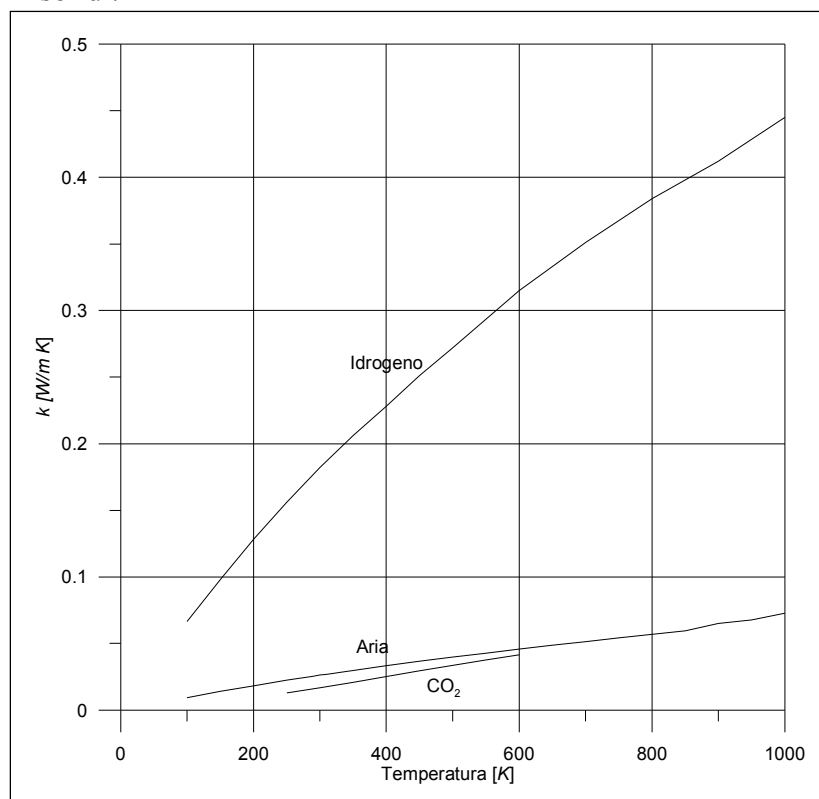


Figura 2-3: Conduttività termica, k , in funzione della temperatura di alcuni gas a pressione atmosferica.

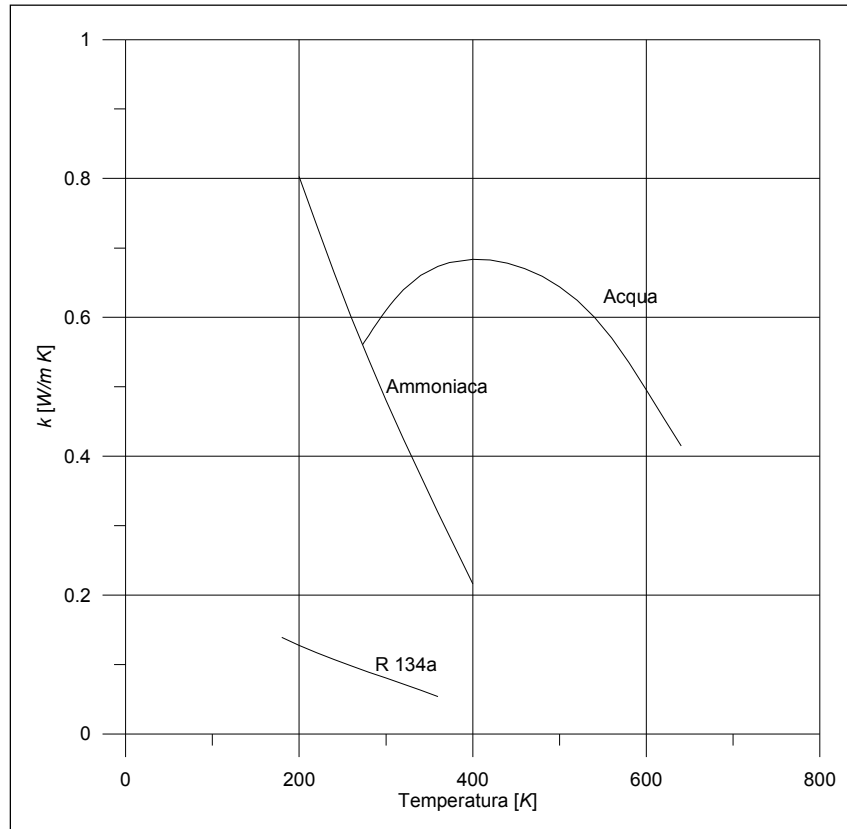


Figura 2-4: Conduttività termica, k , in funzione della temperatura di alcuni liquidi alla pressione di saturazione.

2.3 L'equazione di Fourier.

Se si desidera conoscere il campo di temperatura in un sistema, una via è quella di ricavare l'equazione dell'energia in termini differenziali e, poi, integrarla sull'intero sistema, ammesso che ciò sia possibile, tenendo conto delle condizioni iniziali e di quelle al contorno.

Una volta noto il campo di temperatura si può risalire alla potenza scambiata applicando la legge di Fourier.

Nel caso di pura conduzione l'equazione dell'energia espressa in termini differenziali prende il nome di equazione di Fourier o di equazione generale della conduzione.

Ricaveremo l'equazione di Fourier in coordinate cartesiane (ma solo perché è più semplice), sotto le seguenti ipotesi:

- Il sistema è isotropo
- Il sistema è indeformabile

Consideriamo come mostrato in figura 2-5 un volume di controllo infinitesimo posto all'interno del nostro sistema.

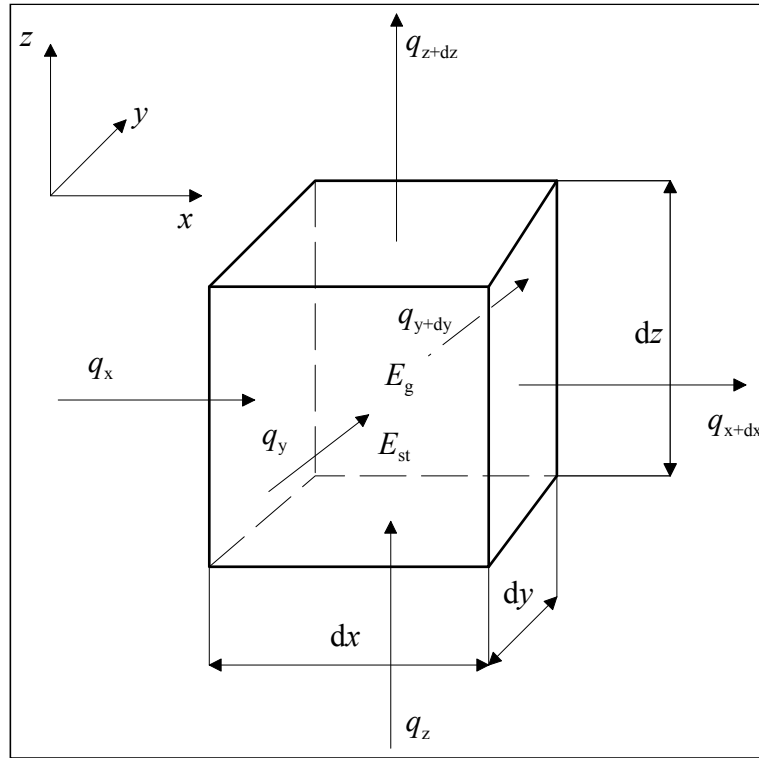


Figura 2-5: Volume di controllo infinitesimo.

Avremo scambi di calore attraverso le facce del volume di controllo, si potrà generare della potenza termica all'interno e avremo una variazione di energia del sistema. Avendo considerato il sistema indeformabile, il lavoro è nullo.

Sotto queste ipotesi si può scrivere che:

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_{out} + \dot{E}_g = \dot{E}_{st} \quad (2-5)$$

dove:

$\dot{E}_{in}$ è la potenza termica entrante nel volumetto per conduzione. La consideriamo positiva in base alle solite convenzioni utilizzate in termodinamica.

$\dot{E}_{out}$ è la potenza termica uscente dal volumetto per conduzione. La consideriamo negativa.

$\dot{E}_g$ è la potenza termica generata all'interno del sistema. Supporremo che la generazione sia uniforme nel volume.

$\dot{E}_{st}$ è la variazione nell'unità di tempo dell'energia del sistema

Riferendoci alla Figura 2-5 scriveremo:

$$\dot{E}_{in} = q_x + q_y + q_z \quad (2-6)$$

$$\dot{E}_{out} = -(q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz}) \quad (2-7)$$

Supponendo che la generazione di calore sia uniforme, si avrà che:

$$\dot{E}_g = \dot{q}_g dV = \dot{q}_g dx dy dz \quad (2-8)$$

dove:

$\dot{q}_g$ è l'energia generata per unità di tempo e di volume. È espressa in $\left[\frac{W}{m^3} \right]$

Per le ipotesi fatte nell'introduzione e avendo supposto il sistema a volume costante, si può affermare che:

$$\dot{E}_{st} = \rho dV c_v \frac{\partial T}{\partial \tau} = \rho c_v \frac{\partial T}{\partial \tau} dx dy dz \quad (2-9)$$

Introducendo la (2-6), la (2-7), la (2-8) e la (2-9) nella (2-5) si ottiene:

$$q_x + q_y + q_z - (q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz}) + \dot{q}_g dx dy dz = \rho c_v \frac{\partial T}{\partial \tau} dx dy dz \quad (2-10)$$

Bisogna, ora, esprimere le potenze termiche uscenti dal volume di controllo. Avendo considerato il sistema di controllo infinitesimo, le potenze termiche uscenti si possono esprimere in funzione di quelle entranti tramite una serie di Taylor, fermandosi al secondo termine in quanto gli altri termini sono infinitesimi di ordine superiore. Quindi:

$$\begin{aligned} q_{x+dx} &= q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \\ q_{y+dy} &= q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \\ q_{z+dz} &= q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (2-11)$$

sostituendo le (2-11) nella (2-10) e semplificando si ricava:

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz + \dot{q}_g dx dy dz = \rho c_v \frac{\partial T}{\partial \tau} dx dy dz \quad (2-12)$$

Ricordando la legge di Fourier possiamo scrivere che:

$$\begin{aligned} q_x &= -k dy dz \frac{\partial T}{\partial x} \\ q_y &= -k dx dz \frac{\partial T}{\partial y} \\ q_z &= -k dx dy \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned} \quad (2-13)$$

sostituendo le (2-13) nella (2-12) e semplificando dx dy dz si ricava infine:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q}_g = \rho c_v \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (2-14)$$

oppure, in notazione vettoriale:

$$\nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{q}_g = \rho c_v \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (2-15)$$

Se la conduttività termica oltre a non dipendere dalla direzione è anche costante, si può semplificare la (2-15) nella:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}_g}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (2-16)$$

o in forma vettoriale:

$$\nabla^2 T + \frac{\dot{q}_g}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (2-17)$$

dove:

α è la diffusività termica definita come: $\alpha = \frac{k}{\rho c}$

La diffusività è un parametro molto importante. È funzione di quanta energia viene trasferita rispetto a quanta ne viene immagazzinata nel sistema.

Aumentando α aumenta la velocità con la quale una variazione di temperatura sulla superficie del sistema si propaga al suo interno.

Nel campo edilizio in condizioni invernali, per esempio, la scelta di α dipende dall'utilizzo della casa. Infatti, se considero k costante, aumentando il termine ρc , che significa fondamentalmente utilizzare tamponature più pesanti, diminuisco α . In questo modo aumento il tempo del transitorio; aumento, cioè, il tempo che impiego per portare a regime la temperatura all'interno. Ma, così, rendo anche più lento il raffreddamento, favorendo il sistema di controllo dell'impianto di riscaldamento.

Se uso tamponature leggere avviene, ovviamente il contrario.

Pertanto, se l'abitazione è abitata saltuariamente, come avviene nelle case per le vacanze, conviene utilizzare tamponature leggere per ridurre il tempo necessario a portare in temperatura l'ambiente.

Nell'ipotesi di stazionarietà si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q}_g = 0 \quad (2-18)$$

e se k è costante:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}_g}{k} = 0 \quad (2-19)$$

o in termini vettoriali:

$$\nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{q}_g = 0 \quad (2-20)$$

$$\nabla^2 T + \frac{\dot{q}_g}{k} = 0 \quad (2-21)$$

Se poi non vi è neanche generazione di calore:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (2-22)$$

e se k è costante:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (2-23)$$

o in termini vettoriali:

$$\nabla \cdot (k \nabla T) = 0 \quad (2-24)$$

$$\nabla^2 T = 0 \quad (2-25)$$

Abbiamo ricavato, così, l'equazione di Fourier in coordinate cartesiane.

Cambiando il sistema di coordinate cambia la forma dell'equazione ma non il suo significato fisico. Non dimentichiamo che l'equazione di Fourier non è altro che un'applicazione del primo principio.

Le notazioni vettoriali rimangono ovviamente formalmente invariate.

Utilizzare altri sistemi di coordinate può risultare vantaggioso. Per esempio, se valutiamo la conduzione all'interno di un filo elettrico può risultare vantaggioso utilizzare delle coordinate cilindriche, che ci permetterebbero in alcuni casi di sfruttare delle condizioni di simmetria al fine di semplificare l'equazione. Se, invece, analizzassimo il trattamento termico di una sfera di cuscinetto converrebbe probabilmente utilizzare un sistema di coordinate sferiche.

Di seguito è riportata l'equazione di Fourier in coordinate cilindriche e sferiche. Il significato dei simboli è riportato in Figura 2-6 e Figura 2-7.

Coordinate cilindriche

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q}_g = \rho c_v \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (2-26)$$

Coordinate sferiche

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \dot{q}_g = \rho c_v \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (2-27)$$

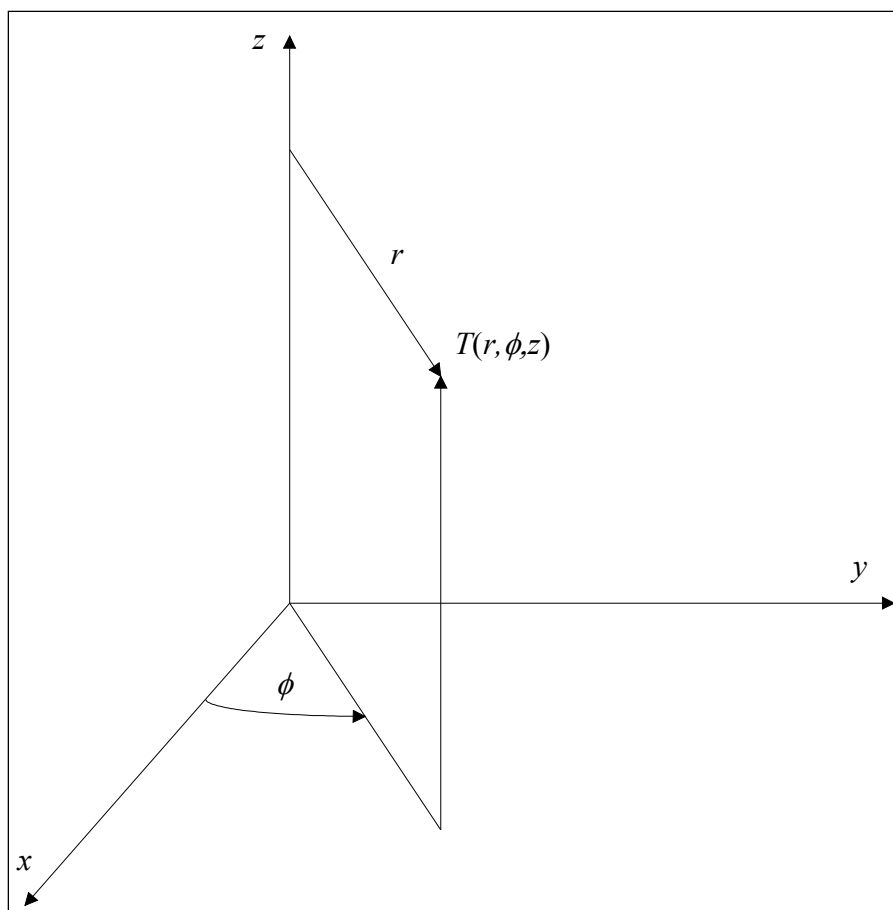


Figura 2-6: Coordinate cilindriche.

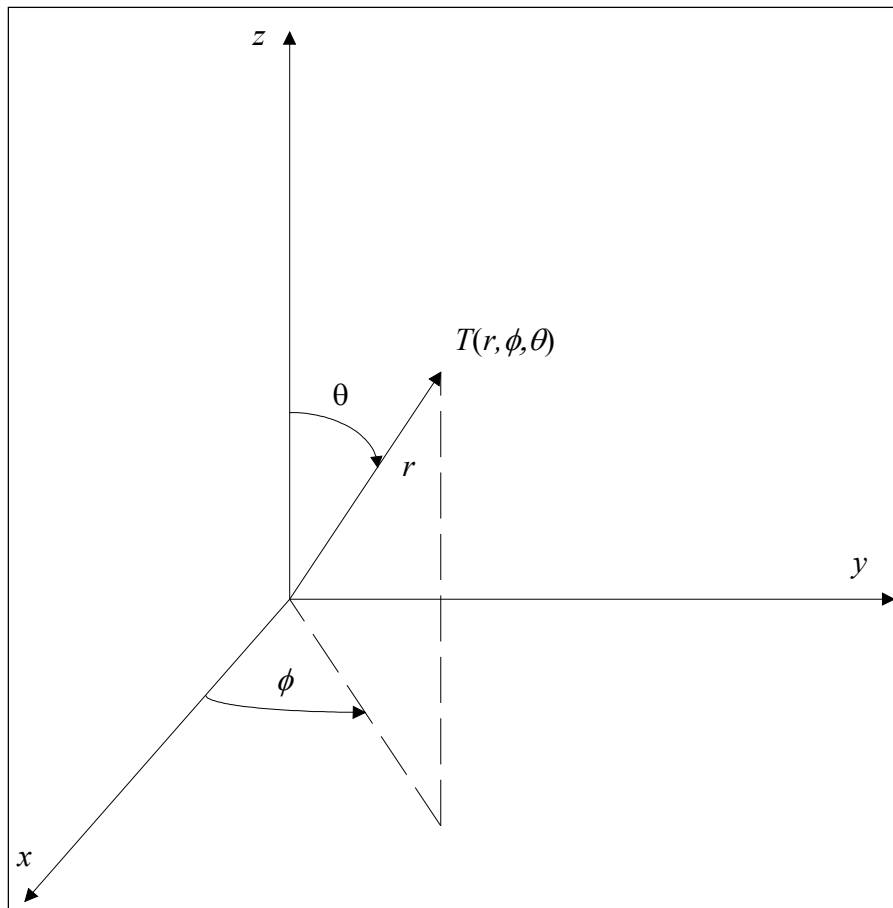


Figura 2-7: Coordinate sferiche.

2.4 Le condizioni iniziali e quelle al contorno.

La soluzione dell'equazione della conduzione applicata ad una determinata geometria porterebbe a infinite soluzioni. Per ottenere l'effettiva soluzione dobbiamo imporre, sia la temperatura del corpo all'istante iniziale τ_0 , sia le condizioni della superficie di controllo negli istanti successivi.

La condizione iniziale sarà:

$$T = T(x, y, z, \tau_0) \quad (2-28)$$

Le condizioni al contorno sono di solito di tre tipi:

1) Condizione di primo tipo, o di Dirichlet: è nota la temperatura sulla superficie di controllo.

$$T_s = T(x, y, z, \tau) \quad (2-29)$$

Se la temperatura è uniforme e costante nel tempo la (2-29) si semplifica nella:

$$T_s = \text{cost} \quad (2-30)$$

2) Condizione di secondo tipo, o di Neumann: si conosce sulla superficie di controllo in ogni istante la derivata della temperatura in direzione normale. Questo, da un punto di vista fisico, equivale per la legge di Fourier a conoscere in ogni punto ed in ogni istante il flusso termico.

$$q_s'' = -k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s \quad (2-31)$$

Il caso più semplice è quello di flusso costante nello spazio e nel tempo; per cui la (2-31) si semplifica in:

$$q_s'' = \text{cost} \quad (2-32)$$

Una condizione particolare della (2-32) è quella di adiabaticità della superficie di controllo per la quale $q_s'' = 0$.

3) Condizione di terzo tipo. La derivata della temperatura in direzione normale alla superficie di controllo è proporzionale alla temperatura della superficie stessa. Fisicamente significa imporre una condizione di scambio convettivo sulla superficie di controllo.

$$q_s'' = -k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = h(T_s - T_\infty) \quad (2-33)$$

2.5 **Condizione in regime stazionario.**

2.5.1 Introduzione.

La conduzione in regime stazionario è un caso molto comune nella tecnica, in quanto i transitori sono spesso di breve durata. Anche quando i transitori hanno una certa rilevanza, come ad esempio nel riscaldamento o condizionamento degli edifici, si preferisce affrontare il problema come stazionario, vista la semplicità del modello, utilizzando, poi, dei coefficienti correttivi per tener conto della non stazionarietà del fenomeno.

Nel paragrafo 2.3 abbiamo già visto che forma assume l'equazione di Fourier nel caso di stazionarietà.

Nei paragrafi successivi affronteremo il problema caso per caso.

2.5.2 Conduzione monodimensionale senza generazione di calore in parete piana.

Nel paragrafo 1.3 avevamo già visto, applicando considerazioni energetiche, che l'andamento della temperatura in questo caso è lineare.

Vediamo, ora, di riaffrontare il problema partendo dall'equazione di Fourier.

Per i simboli ci riferiamo alla Figura 2-8.

Se supponiamo il coefficiente conduttivo costante, l'equazione (2-23) si semplifica nella:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad (2-34)$$

Integrando ottengo:

$$\frac{dT}{dx} = C_1 \quad (2-35)$$

ed integrando di nuovo ottengo infine:

$$T(x) = C_1x + C_2 \quad (2-36)$$

Per ricavare la soluzione devo imporre due condizioni al contorno.

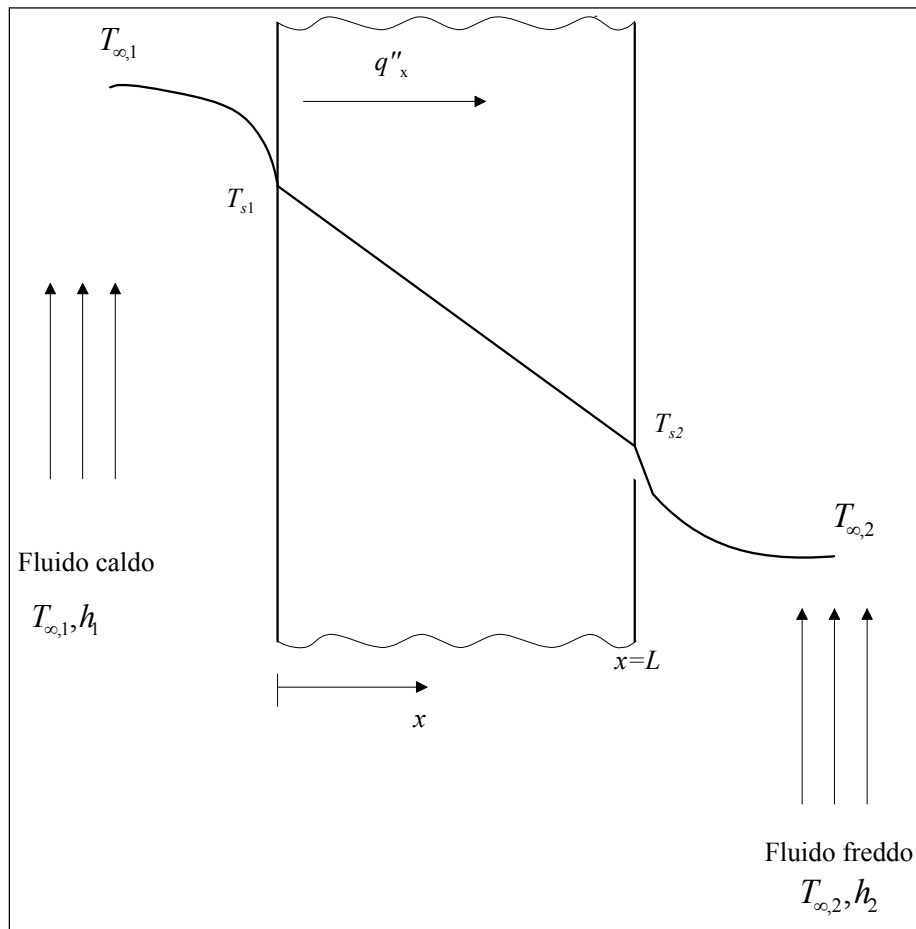


Figura 2-8: Conduzione in parete piana.

a) Assumiamo note le temperature a parete T_{s1} e T_{s2} .

Per cui le condizioni al contorno sono:

- $T = T_{s1}$ per $x = 0$
- $T = T_{s2}$ per $x = L$

Sostituendo le condizioni al contorno nella (2-36) ottengo il sistema

$$\begin{cases} T_{s1} &= C_2 \\ T_{s2} &= C_1 L + C_2 \end{cases} \quad (2-37)$$

Risolvendolo in C_1 e C_2 e sostituendo le costanti ottenute nella (2-36), ricavo che:

$$T(x) = (T_{s2} - T_{s1}) \frac{x}{L} + T_{s1} \quad (2-38)$$

Applicando la legge di Fourier si ottiene, infine:

$$q_x = kA \frac{T_{s1} - T_{s2}}{L} \quad (2-39)$$

$$q_x'' = k \frac{T_{s1} - T_{s2}}{L} \quad (2-40)$$

Come si può notare né la potenza termica, né il flusso termico dipendono dalla posizione.

- b) Consideriamo condizioni al contorno convettive (condizioni di terzo tipo). Nella pratica sono le condizioni al contorno più usate. Dalla (2-35) si ricava che:

$$q_x'' = -k \frac{dT}{dx} = -kC_1 \quad (2-41)$$

Imponendo le condizioni al contorno convettive, ottengo il sistema:

$$\begin{cases} -kC_1 = h_1(T_{\infty,1} - T_{s1}) \\ -kC_1 = h_2(T_{s2} - T_{\infty,2}) \end{cases} \quad (2-42)$$

che risolto in T_{s1} e T_{s2} fornisce la soluzione:

$$\begin{aligned} T_{s1} &= \frac{k}{h_1} C_1 + T_{\infty,1} \\ T_{s2} &= T_{\infty,2} - \frac{k}{h_2} C_1 \end{aligned} \quad (2-43)$$

Ricordando il sistema (2-37) e sostituendovi le (2-43), si ottiene il sistema nelle incognite C_1 e C_2 :

$$\begin{cases} C_2 &= \frac{k}{h_1} C_1 + T_{\infty,1} \\ C_1 L + C_2 &= T_{\infty,2} - \frac{k}{h_2} C_1 \end{cases} \quad (2-44)$$

Risolvendo il sistema (2-44), si ricava, infine:

$$T(x) = \left(\frac{T_{\infty,2} - T_{\infty,1}}{\frac{1}{h_1} + \frac{L}{k} + \frac{1}{h_2}} \right) \left(\frac{x}{k} + \frac{1}{h_1} \right) + T_{\infty,1} \quad (2-45)$$

$$q_x'' = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,2}}{\frac{1}{h_1} + \frac{L}{k} + \frac{1}{h_2}} \quad (2-46)$$

Come abbiamo appena visto il procedimento è molto lungo. Nel prossimo paragrafo vedremo un metodo per semplificare la risoluzione di questo tipo di problemi.

2.5.3 L'analogia elettrotermica.

Il metodo dell'analogia è molto usato nella fisica. Si basa sull'osservazione che molti fenomeni fisici, pur essendo completamente diversi, presentano delle equazioni formalmente uguali.

Se noi consideriamo l'equazione (2-39) riscritta nella seguente forma:

$$q_x = \frac{kA}{L} (T_{s1} - T_{s2}) = \frac{kA}{L} \Delta T$$

potremmo vedere una analogia con la legge di Ohm

Infatti se alla potenza sostituiamo l'intensità di corrente, alle temperature i potenziali e al termine $\frac{L}{kA}$ la resistenza elettrica otteniamo:

$$i = \frac{1}{R} \Delta V$$

Che rappresenta effettivamente la legge di Ohm.

Possiamo quindi definire una resistenza termica R_t come:

$$R_t = \frac{L}{kA} \quad (2-47)$$

In tabella 2-1 è riportata l'analogia tra le grandezze termiche e quelle elettriche.

Grandezza termica	Grandezza elettrica
Salto termico ΔT	Differenza di potenziale ΔV
Potenza termica q	Intensità di corrente i
Area A	Area A
Lunghezza L	Lunghezza L
Coefficiente di conduzione k	Conducibilità elettrica σ
Capacità termica $\rho c V$	Capacità elettrica

Tabella 2-1: Analogia tra grandezze termiche ed elettriche.

Ovviamente il concetto di analogia può venir esteso anche allo scambio termico convettivo. In questo caso la resistenza termica vale:

$$R_t = \frac{1}{hA} \quad (2-48)$$

Focalizziamo, ora, l'attenzione al problema dello scambio termico in parete piana con condizioni al contorno convettive.

Da considerazioni di primo principio, per esempio considerando un volume di controllo che degenera nella superficie calda, ricaviamo che il flusso convettivo è uguale a quello conduttivo. Dal punto di vista dell'analogia elettrotermica avere la stessa intensità che attraversa delle resistenze equivale a ritenere che queste siano in serie.

Il nostro problema si riduce quindi a risolvere una serie di resistenze come riportato in Figura 2-9.

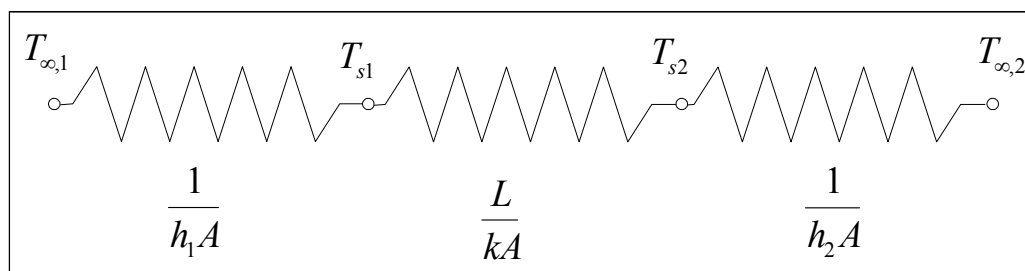


Figura 2-9: Serie di resistenze termiche.

La resistenza totale sarà uguale a:

$$R_{tot} = R_{conv1} + R_{cond} + R_{conv2} = \frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{kA} + \frac{1}{h_2 A} \quad (2-49)$$

e quindi:

$$q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,2}}{R_{tot}} = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,2}}{\frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{kA} + \frac{1}{h_2 A}} \quad (2-50)$$

o

$$q_x'' = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,2}}{\frac{1}{h_1} + \frac{L}{k} + \frac{1}{h_2}}$$

come avevamo già ricavato per altra via.

Si vede, quindi, che con l'analogia elettrotermica si risolvono molti problemi termici in modo più agevole.

2.5.4 Parete multistrato.

È un caso molto comune. Per esempio con questo modello potrei schematizzare le pareti di un forno, o quelle di un abitazione. Nella realtà il problema non sarebbe monodimensionale, in quanto vicino a gli spigoli delle pareti la temperatura risente delle pareti vicine. Se, però, le dimensioni trasversali della parete sono molto più grandi dello spessore complessivo, il problema si può

considerare con buona approssimazione monodimensionale. Della presenza dei bordi si tiene eventualmente conto con formule correttive.

In Figura 2-10 è riportato lo schema di una parete multistrato.

Anche in questo caso è molto conveniente applicare l'analogia elettrotermica.

$$R_{tot} = \frac{1}{h_1 A} + \frac{L_1}{k_1 A} + \frac{L_2}{k_2 A} + \frac{L_3}{k_3 A} + \frac{1}{h_2 A} \quad (2-51)$$

E la potenza termica trasmessa diventa:

$$q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,2}}{R_{tot}} = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,2}}{\frac{1}{h_1 A} + \frac{L_1}{k_1 A} + \frac{L_2}{k_2 A} + \frac{L_3}{k_3 A} + \frac{1}{h_2 A}} \quad (2-52)$$

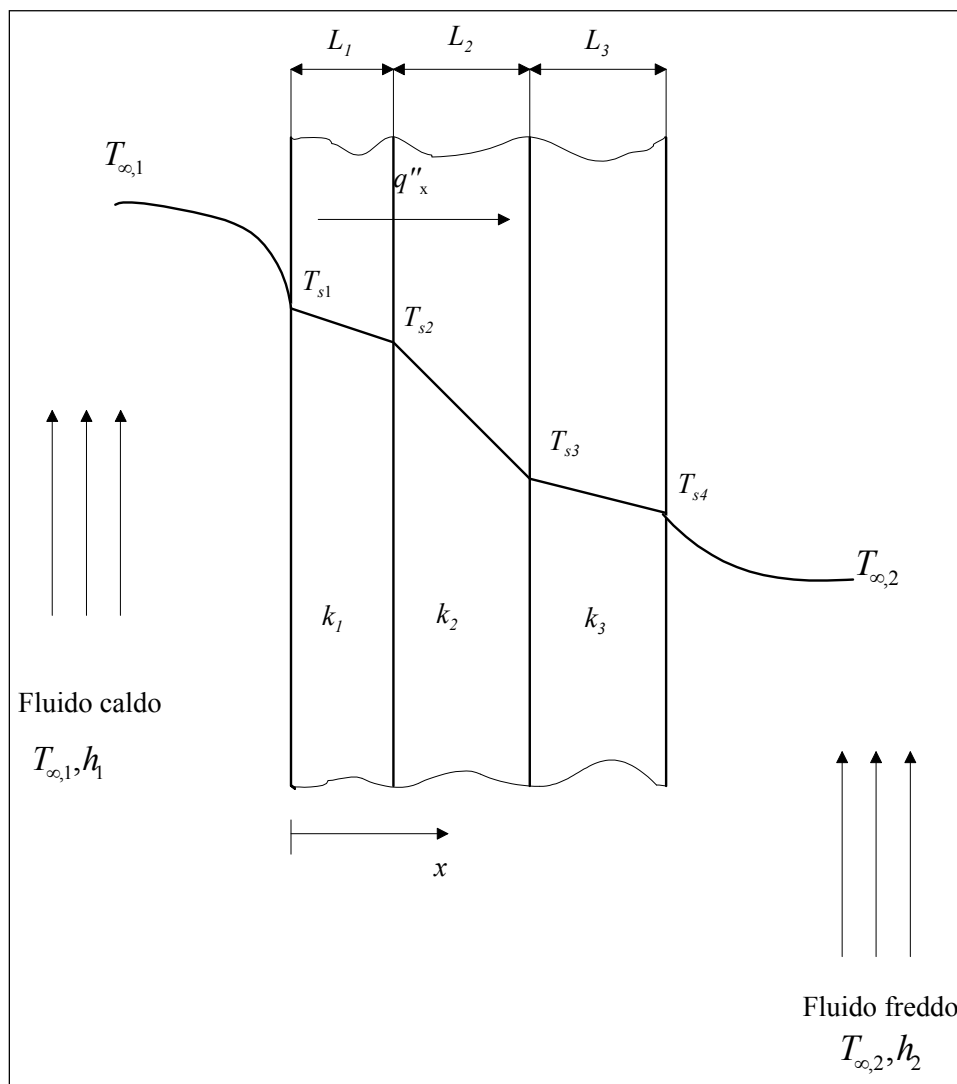


Figura 2-10: Parete piana multistrato.

Una volta nota la potenza termica, per ricavare qualunque temperatura basta considerare una rete di resistenze termiche che va da una temperatura nota fino alla temperatura incognita, e risolvere l'equazione.

Esempio 2-1

Consideriamo la parete multistrato della Figura 2-10. È composta da:

Struttura	Spessore [mm]	k $\left[\frac{W}{mK}\right]$
1) Intonaco di calce	10	0,700
2) Muratura in laterizio	250	0,713
3) Intonaco di calce e cemento	10	0,900

Il coefficiente convettivo interno si considera uguale a $h_1 = 5 \frac{W}{m^2 K}$, mentre l'esterno vale $h_2 = 25 \frac{W}{m^2 K}$. La parete si trova a Trieste e, quindi, in base alla legge 10/91 si considera una $t_1 = 20^\circ C$ e una $t_2 = -5^\circ C$. Calcolare il flusso termico.

Svolgimento

Dalla (2-52) si ricava:

$$q_x'' = \frac{20 - (-5)}{\frac{1}{5} + \frac{10 \cdot 10^{-3}}{0,700} + \frac{250 \cdot 10^{-3}}{0,713} + \frac{10 \cdot 10^{-3}}{0,900} + \frac{1}{25}} = 40,6 \frac{W}{m^2}$$

2.5.5 Coefficiente di scambio termico globale o trasmittanza.

Per i sistemi composti è molto comune utilizzare al posto della resistenza totale un coefficiente di scambio termico globale, o trasmittanza, U , espresso in $\left[\frac{W}{m^2 K}\right]$, che viene definito tramite un'espressione analoga alla legge di Newton:

$$q_x = UA(T_{\infty,1} - T_{\infty,2}) = UA\Delta T \quad (2-53)$$

Risulta quindi che:

$$UA = \frac{1}{R_{tot}} \quad (2-54)$$

La trasmittanza è comoda perché in molte situazioni, per esempio quando si considerano pareti costruite con mattoni forati o mattoni "POROTON", non siamo in condizioni di isotropia o di monodimensionalità. In questi casi la trasmittanza viene valutata in modo sperimentale, fissando un'area di riferimento; poi, tramite la (2-54) si può valutare la resistenza termica.

Bisogna notare che, mentre la resistenza termica dipende dal sistema in modo univoco, la trasmittanza dipende dalla scelta dell'area di riferimento.

2.5.6 Pareti a geometria cilindrica.

L'esempio più comune è quello di una tubazione le cui superfici interne ed esterne sono lambite da fluidi a temperatura diversa. Affinché il problema si possa considerare monodimensionale, supponiamo che la temperatura della superficie interna e di quella esterna siano costanti; sotto questa ipotesi la temperatura della parete della tubazione dipende solo dal raggio. In altri termini ci troviamo in condizioni di simmetria assiale. Il problema è schematizzato in Figura 2-11.

Se utilizzassi delle coordinate cartesiane non potrei sfruttare la simmetria assiale. Utilizzando, invece, le coordinate cilindriche, dato che per ipotesi T dipende solo dal raggio, la (2-26) si riduce a:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(kr \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (2-55)$$

Integrando ottengo:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{kr} \quad (2-56)$$

che integrata di nuovo fornisce l'equazione:

$$T(r) = \frac{C_1}{k} \ln r + C_2 \quad (2-57)$$

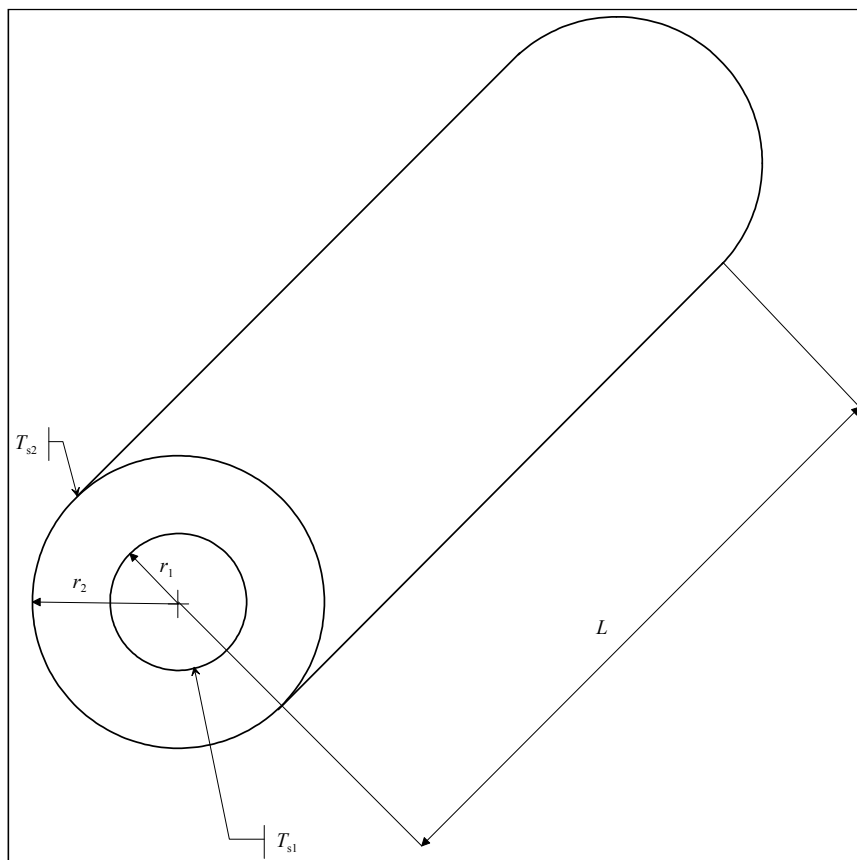


Figura 2-11: Tubazione con temperature uniformi sulla parete interna ed esterna.

Se impongono le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} T(r_1) &= T_{s1} \\ T(r_2) &= T_{s2} \end{aligned} \quad (2-58)$$

ottengo il sistema:

$$\begin{cases} T_{s1} = \frac{C_1}{k} \ln r_1 + C_2 \\ T_{s2} = \frac{C_1}{k} \ln r_2 + C_2 \end{cases} \quad (2-59)$$

che risolto in C_1 e C_2 fornisce la soluzione:

$$\begin{aligned} C_1 &= k \frac{T_{s1} - T_{s2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \\ C_2 &= T_{s2} - \frac{T_{s1} - T_{s2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \ln r_2 \end{aligned} \quad (2-60)$$

Sostituendo le (2-60) nella (2-57) si ottiene infine:

$$T(r) = \frac{T_{s1} - T_{s2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \ln \frac{r}{r_2} + T_{s2} \quad (2-61)$$

Dalla (2-56) si ricava:

$$q_r = -kA \frac{dT}{dr} = -k(2\pi rL) \frac{C_1}{kr} \quad (2-62)$$

e sostituendo la prima delle (2-60) nella (2-62), si ottiene che la potenza termica vale:

$$q_r = \frac{2\pi Lk}{\ln \frac{r_2}{r_1}} (T_{s1} - T_{s2}) \quad (2-63)$$

Osservando la (2-62) si vede che la potenza termica non dipende dalla posizione, mentre il flusso sì. D'altro canto a questa conclusione si poteva arrivare anche con considerazioni basate sul primo principio. Non avendo generazione interna di calore ed essendo il sistema stazionario, si ricava che l'energia entrante è uguale all'uscente; pertanto la potenza termica è costante. Dato che il flusso è pari alla potenza termica diviso l'area, si vede immediatamente che il flusso è inversamente proporzionale al raggio.

Da queste considerazioni avrei potuto ottenere per altra via la (2-63). Infatti, applicando la legge di Fourier, si ricava che:

$$q_r = -k2\pi rL \frac{dT}{dr}$$

Separando le variabili ed integrando si ottiene:

$$T_{s1} - T_{s2} = \frac{q_r}{k2\pi L} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

da cui si ricava la (2-63).

Sempre dalla (2-63) si vede che per la geometria cilindrica la resistenza termica vale:

$$R_t = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi Lk} \quad (2-64)$$

Anche in geometria cilindrica ritroviamo pareti multistrato. Un esempio è il caso comunissimo di tubazioni coibentate.

In Figura 2-12 è riportato lo schema di una parete multistrato.

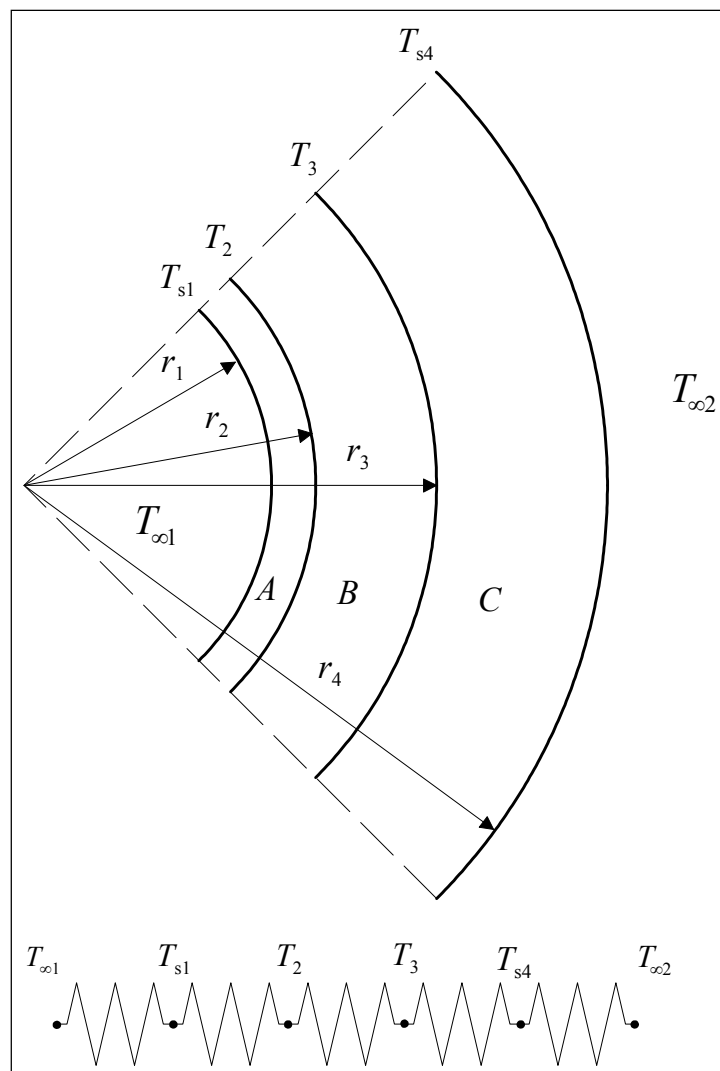


Figura 2-12: parete multistrato in geometria cilindrica.

Applicando l'analogia elettrotermica si giunge a scrivere che:

$$q_r = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{2\pi r_1 L h_1} + \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi k_A L} + \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{2\pi k_B L} + \frac{\ln \frac{r_4}{r_3}}{2\pi k_C L} + \frac{1}{2\pi r_4 L h_2}} \quad (2-65)$$

In questo caso è evidente che la scelta dell'area di riferimento mi fa cambiare il valore della trasmittanza. Se scelgo, per esempio, l'area interna A_1 avrò che:

$$U_1 = \frac{1}{A_1 R_{tot}} = \frac{1}{2\pi r_1 L R_{tot}} \quad (2-66)$$

e pertanto:

$$U_1 = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{r_1}{k_A} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1}{k_B} \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{r_1}{k_C} \ln \frac{r_4}{r_3} + \frac{r_1}{r_4} \frac{1}{h_4}} \quad (2-67)$$

Esempio 2-2

Calcolare la dispersione termica per metro di lunghezza di una tubazione in acciaio da 1'' in cui all'interno scorre acqua alla temperatura di 80 °C, mentre all'esterno vi è aria calma alla temperatura di 20°C. Si consideri $h_i = 6323 \frac{W}{m^2 K}$ e $h_e = 7,19 \frac{W}{m^2 K}$

Svolgimento

Dalle tabelle UNI si ricavano i diametri della tubazione: $D_e = 33,7 \text{ mm}$ e $D_i = 27,9 \text{ mm}$.

Il coefficiente conduttivo dell'acciaio vale $k = 45 \frac{W}{mK}$

La potenza termica trasmessa per unità di lunghezza vale:

$$\frac{q}{L} = \frac{T_{\infty i} - T_{\infty e}}{\frac{1}{\pi D_i h_i} + \frac{\ln \frac{D_e}{D_i}}{2\pi k} + \frac{1}{\pi D_e h_e}} = \frac{80 - 20}{\frac{1}{\pi \cdot 27,9 \cdot 10^{-3} \cdot 6323} + \frac{\ln \frac{33,7}{27,9}}{2 \cdot \pi \cdot 45} + \frac{1}{\pi \cdot 33,7 \cdot 10^{-3} \cdot 7,19}} = 45.59 \frac{W}{m}$$

2.5.7 Raggio critico.

Consideriamo un filo elettrico di diametro esterno 10 mm che viene ricoperto con un isolante elettrico, avente un coefficiente conduttivo pari a $k = 0,20 \frac{W}{m K}$. Il filo è posto in aria calma ed è

stato calcolato un coefficiente convettivo medio $\bar{h}_e = 10 \frac{W}{m^2 K}$.

Se si aumenta lo spessore di isolante, aumenta la resistenza conduttiva con legge logaritmica, mentre la resistenza convettiva cala con legge iperbolica, in quanto l'area di scambio termico aumenta linearmente con il raggio.

In Figura 2-13 è rappresentato l'andamento della resistenza, conduttiva, di quella convettiva e di quella totale. Come si può osservare, partendo dal filo nudo la resistenza totale tende a diminuire (e quindi all'aumentare dello spessore di isolante, aumenta la potenza termica scambiata) fino a raggiungere un valore minimo per un determinato raggio, chiamato raggio critico. Superato il raggio critico la potenza scambiata tende a diminuire.

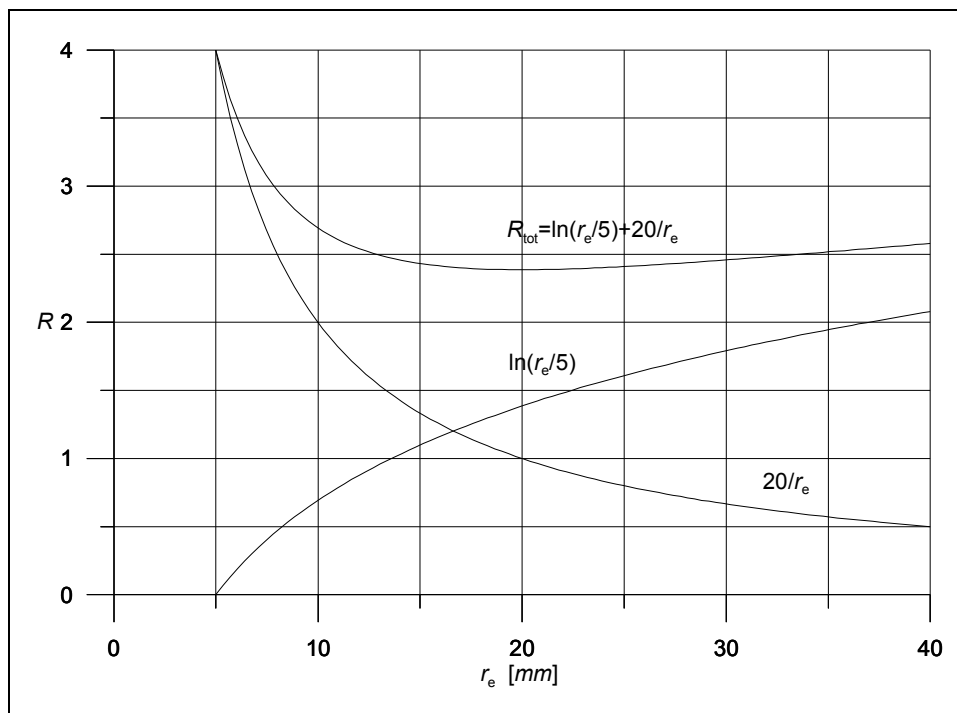


Figura 2-13: Andamento della resistenza termica in funzione del raggio esterno in un filo coibentato

Non è, quindi, detto che ricoprendo un tubo o un filo con del materiale isolante lo scambio termico effettivamente diminuisca. Perché ciò sicuramente accada, il diametro esterno del sistema, valutato senza l'isolante, deve essere maggiore del raggio critico.

Per calcolare il valore del raggio critico bisogna ricavare il valore del raggio esterno che massimizza la funzione.

La potenza termica è uguale a:

$$q = \frac{T_i - T_e}{\frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{2\pi k L} + \frac{1}{2\pi r_e L h_e}} = \frac{2\pi k L (T_i - T_e)}{\ln \frac{r_e}{r_i} + \frac{k}{r_e h_e}}$$

Dove:

T_i è la temperatura interna dell'isolante.

T_e è la temperatura esterna dell'isolante.

r_e è il raggio esterno.

r_i è il raggio interno.

L è la lunghezza del sistema

La derivata prima vale:

$$\frac{dq}{dr} = \frac{-2\pi kL(T_i - T_e) \left(\frac{1}{r_e} - \frac{k}{hr_e^2} \right)}{\left(\ln \frac{r_e}{r_i} + \frac{k}{hr_e} \right)^2} = 0$$

che si annulla per il raggio critico, r_{cr} :

$$r_{cr} = \frac{k}{h}$$

Poiché i fili elettrici di solito hanno un diametro inferiore a quello critico, l'isolamento elettrico svolge anche l'azione favorevole di aumentare lo smaltimento del calore prodotto per effetto Joule dal passaggio della corrente.

Le tubazioni utilizzate normalmente in campo industriale possiedono di solito un diametro esterno maggiore di quello critico, per cui l'utilizzo di materiale isolante diminuisce sempre lo scambio termico. Bisogna, invece, porre attenzione negli impianti frigoriferi o di condizionamento, nei quali si utilizzano anche tubi di piccolo diametro. In questo caso è bene calcolare il valore del diametro critico.

Esempio 2-3

Consideriamo un tubo utilizzato in un impianto di condizionamento di diametro esterno 10 mm, posto in aria calma. Il coefficiente convettivo medio, $\bar{h}$, è pari a $5 \frac{W}{m^2 K}$.

Il tubo viene coibentato con della lana di vetro, avente un coefficiente conduttivo, k , pari a $0,034 \frac{W}{mK}$.

Valutare per quale spessore di isolante la resistenza termica per unità di lunghezza della tubazione è superiore a quella del tubo nudo.

Svolgimento

Per prima cosa valutiamo il diametro critico.

$$D_{cr} = 2 \frac{k}{h} = 2 \cdot \frac{0,034}{5} = 13,6 \cdot 10^{-3} m = 13,6 mm$$

Quindi, il tubo ha un diametro esterno minore di quello critico.

La resistenza termica per unità di lunghezza del tubo nudo, R' , è uguale a:

$$R' = \frac{1}{\bar{h} \pi D_e} = \frac{1}{5 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 10^{-3}} = 6,37 \frac{mK}{W}$$

Se coibento la resistenza totale per metro di lunghezza vale:

$$R' = \frac{1}{h\pi D_e} + \frac{\ln \frac{D_e}{D_i}}{2\pi k}$$

Da cui si ottiene:

$$R' = \frac{1}{5 \cdot \pi \cdot D_e} + \frac{\ln \frac{D_e}{10}}{2 \cdot \pi \cdot 0,034} = 6,37$$

Risolvendo per tentativi l'equazione si ricava che il diametro esterno deve raggiungere il valore di 20 mm per ottenere la stessa resistenza termica del tubo nudo; il che significa che bisogna utilizzare uno spessore di isolante di almeno 5 mm.

2.5.8 Cenni al problema della conduzione stazionaria multidimensionale

Non sempre, purtroppo, è possibile utilizzare il modello monodimensionale.

Per esempio vicino agli spigoli o ai vertici che si formano quando due o tre pareti piane si intersecano, il modello monodimensionale non è più valido e il suo utilizzo porterebbe a commettere degli errori inaccettabili.

Altri casi tipici di conduzione multidimensionale sono la conduzione di calore in cilindri corti, la dispersione termica di una tubazione o di un serbatoio interrato o quella di un camino.

Vi sono molti modi per risolvere questi problemi.

Il più logico sembrerebbe essere quello di risolvere analiticamente l'equazione di Laplace:

$$\nabla^2 T = 0$$

e poi introdurre le condizioni al contorno.

Purtroppo questo metodo permette di ottenere soluzioni solo per geometrie semplici. In letteratura, comunque, sono riportate soluzioni per numerosi casi tecnicamente importanti.

Un altro tipo di approccio è quello dei metodi numerici.

Con l'evolvere dei calcolatori numerici, soprattutto dei PC, questi metodi vengono sempre più utilizzati, grazie alla possibilità di risolvere problemi geometricamente complessi in tempi accettabili.

Nel caso della conduzione multidimensionale sono molto utilizzati il metodo degli elementi finiti (FEM), quello delle differenze finite (FD) e il metodo dei volumi finiti (FV).

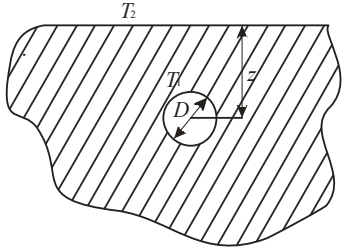
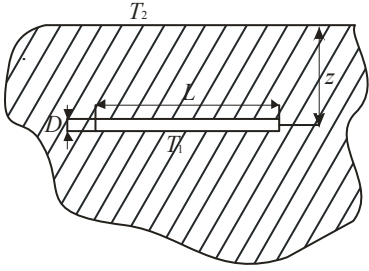
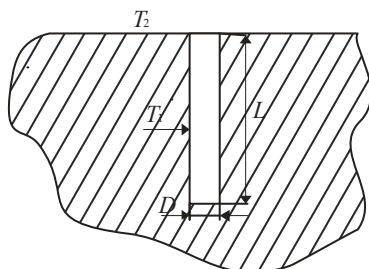
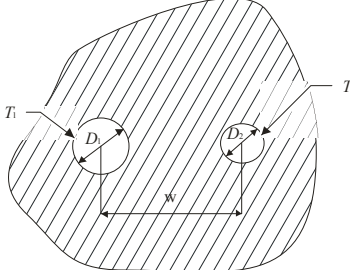
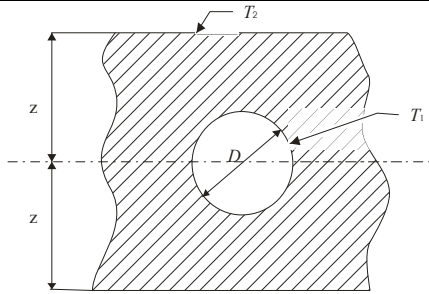
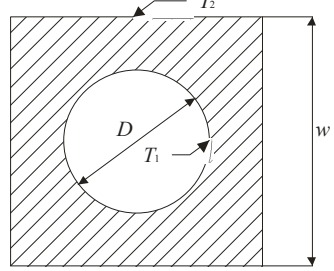
Prima dell'avvento dei metodi numerici per i sistemi bidimensionali vennero utilizzati dei metodi grafici.

Disegnata la geometria si cercava di tracciare a mano le linee di flusso termico e le isoterme, rispettando la perpendicolarità tra queste due famiglie di curve. Il flusso termico, poi, doveva rispettare la legge di Fourier. Tale tipo di soluzione è stato, ormai, completamente soppiantato dai metodi numerici.

L'ultimo metodo che si considera è quello dei Fattori di forma. In realtà questo metodo rientra tra quelli grafici. La potenza termica trasmessa vale:

$$q = Sk(T_1 - T_2)$$

Dove S è un fattore di forma che dipende dalla geometria del sistema. I valori di S sono stati calcolati per diverse geometrie di rilevante importanza tecnica. In Tabella 2-2 sono riportati alcuni importanti fattori di forma.

Sfera isoterma, interrata alla profondità z in un mezzo semi infinito di conducibilità termica k		$\frac{2\pi D}{1 - \frac{D}{4z}}$ $z > \frac{D}{2}$
Cilindro isoterma di lunghezza L , interrato alla profondità z in un mezzo semi infinito di conducibilità termica k		$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{2z}{D}\right)} \quad L \gg D$ $\frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{4z}{D}\right)} \quad L \gg D \quad z > \frac{3D}{2}$
Cilindro isoterma verticale di lunghezza L interrato in un mezzo semi infinito di conducibilità termica k		$\frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{4L}{D}\right)}$ $L \gg D$
Conduzione tra due cilindri isoterma interrati in un mezzo infinito di conducibilità termica k		$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{4w^2 - D_1^2 - D_2^2}{2D_1D_2}\right)}$ $L \gg D_1, D_2, w$
Cilindro orizzontale di lunghezza L , interrato tra piani paralleli di uguale lunghezza e profondità infinita		$\frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{8z}{\pi D}\right)}$ $z > \frac{D}{2}$
Cilindro isoterma di lunghezza L in un solido di pinta quadrata di uguale lunghezza		$\frac{2\pi L}{\ln\left(1,08 \frac{w}{D}\right)}$ $w > D$

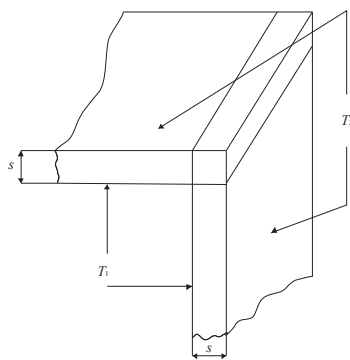
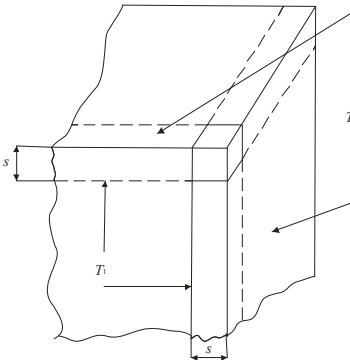
Conduzione attraverso lo spigolo generato dall'intersezione di due pareti piane di conducibilità termica k con temperature interna ed esterna uniforme		$0,5L$ $L > \frac{s}{5}$
Conduzione nel vertice generato dall'intersezione di tre pareti piane di conducibilità termica k con temperature interna ed esterna uniforme		$0,15s$ $s \ll \text{lunghezza ed altezza delle pareti}$

Tabella 2-2 : Fattori di forma per alcune geometrie significative

2.5.9 Conduzione monodimensionale con generazione di calore.

Il problema della conduzione con generazione di calore è un problema tecnicamente molto importante. Il calore potrebbe essere generato per effetto Joule, oppure per reazioni chimiche esotermiche all'interno del mezzo, o come risultato della decelerazione e dell'assorbimento di neutroni in un reattore nucleare.

Come esempio ci occuperemo di quello che accade all'interno di un filo elettrico percorso da corrente (vedi Figura 2-13).

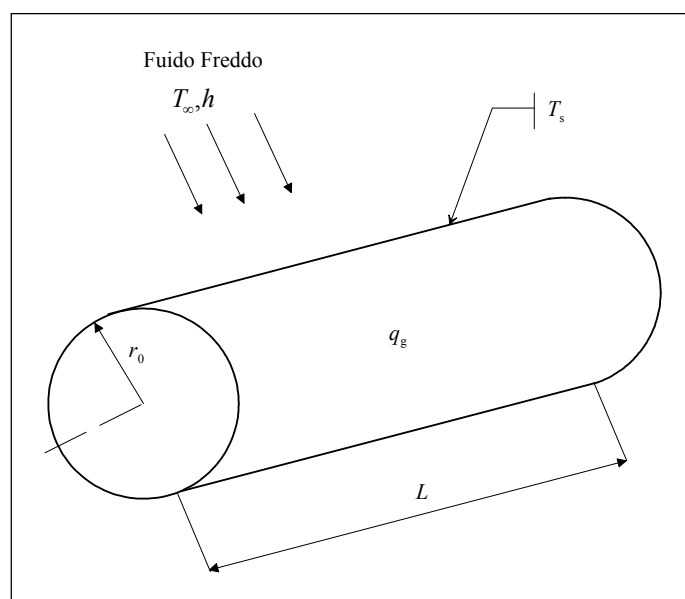


Figura 2-13: Conduzione con generazione di calore in un filo elettrico

Se la frequenza della corrente non è alta, si può supporre che la generazione di calore sia uniforme nel filo.

La potenza termica generata $\dot{E}_g$, sarà pari a:

$$\dot{E}_g = I^2 R \quad (2-68)$$

dove:

$\dot{E}_g$ è la potenza termica generata, espressa in $[W]$.

I è la corrente elettrica che attraversa il conduttore, espressa in $[A]$.

R è la resistenza elettrica espressa in $[\Omega]$

La potenza termica per unità di volume è uguale a:

$$\dot{q}_g = \frac{\dot{E}_g}{V} = \frac{I^2 R}{V} \quad (2-69)$$

Anche in questo caso conviene utilizzare l'equazione generale della conduzione in coordinate cilindriche. Se supponiamo che la conduttività termica k e la temperatura di parete T_s siano costanti, possiamo riscrivere la (2-26) come:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{q}_g}{k} = 0 \quad (2-70)$$

Integrando la (2-70) una volta si ottiene:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}_g}{2k} r + \frac{C_1}{r} \quad (2-71)$$

Integrando di nuovo si ricava:

$$T(r) = -\frac{\dot{q}_g}{4k} r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad (2-72)$$

Per ottenere le due costanti di integrazione C_1 e C_2 , bisogna imporre due condizioni al contorno.

La prima è evidente:

$$T(r_0) = T_s \quad (2-73)$$

Per ricavare la seconda, visto che non conosciamo un'altra temperatura, dobbiamo osservare che la funzione della temperatura è simmetrica rispetto all'asse del filo grazie al fatto che la temperatura è costante sulla superficie esterna. Questo significa che la temperatura avrà il suo massimo sull'asse del filo. Pertanto:

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (2-74)$$

Applicando la (2-74) alla (2-71) si ottiene:

$$C_1=0 \quad (2-75)$$

E dalle (2-72), (2-73), (2-75) si ricava che:

$$C_2 = T_s + \frac{\dot{q}_g r_0^2}{4k} \quad (2-76)$$

Sostituendo le (2-75) e (2-76) nelle (2-71) e (2-72) si ottiene, infine:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}_g}{2k} r \quad (2-77)$$

$$T(r) = \frac{\dot{q}_g r_0^2}{4k} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) + T_s \quad (2-78)$$

La temperatura massima T_0 sull'asse vale:

$$T_0 = \frac{\dot{q}_g r_0^2}{4k} + T_s \quad (2-79)$$

Rimane sempre il problema di conoscere T_s , in quanto di solito si conosce la temperatura del fluido T_∞ . È possibile, però, calcolare il coefficiente convettivo h .

Se applichiamo il primo principio, scegliendo come volume di controllo l'intero filo, possiamo affermare che, essendo il problema stazionario, il calore generato sarà uguale al calore uscente dal filo per convezione; cioè:

$$\dot{q}_g (\pi r_0^2 L) = h (2\pi r_0 L) (T_s - T_\infty)$$

da cui si ricava:

$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{q}_g r_0}{2h} \quad (2-80)$$

Esempio 2-4

La resistenza elettrica di un riscaldatore è costruita con un materiale avente una conduttività termica di $k = 19 \frac{W}{mK}$ e una resistività elettrica uguale a $\rho = 8 \cdot 10^{-7} \Omega m$.

Il suo diametro è uguale a $D_0 = 1$ mm. Se, in condizioni stazionarie, il filo è percorso da una corrente elettrica pari a 100 A, calcolare il salto termico tra il centro del filo e la superficie esterna.

Svolgimento

Per prima cosa bisogna calcolare la resistenza elettrica

$$R = \rho \frac{L}{A} = \rho \frac{4L}{\pi D_0^2}$$

Dall'equazione (2-69) si ricava che

$$\dot{q}_g = 4 \frac{I^2 R}{\pi D_0^2 L} = 16 \rho \frac{I^2}{\pi^2 D_0^4} = 1,297 \cdot 10^{10} \frac{W}{m^3}$$

Applicando la (2-79) si ottiene:

$$T_0 - T_s = \frac{\dot{q}_g D_0^2}{16k} = \frac{1,297 \cdot 10^{10} \cdot (1 \cdot 10^{-3})^2}{16 \cdot 19} = 42,66 \text{ } ^\circ C$$

2.6 Conduzione non stazionaria.

2.6.1 Introduzione.

La conduzione in condizioni di non stazionarietà è, in verità, il modello più vicino alla realtà. Nel paragrafo 2.5.1, avevamo osservato che in moltissimi casi i transitori potevano venir trascurati senza commettere errori rilevanti. Vi sono, però, casi in cui non è assolutamente possibile trascurare il termine di non stazionarietà. Per esempio, se consideriamo il trattamento termico di una sfera di cuscinetto, la velocità di raffreddamento diventa la variabile più importante da controllare. Un altro esempio in cui la conduzione non stazionaria è importante è il caso degli edifici. Se in fase di riscaldamento il problema della variazione delle condizioni esterne non è importantissimo in quanto la potenza della caldaia è valutata per delle condizioni abbastanza estreme per la zona climatica considerata, il transitorio diventa fondamentale nella progettazione degli impianti di condizionamento. Vediamo di giustificare, almeno qualitativamente, questa affermazione.

Il massimo dell'irraggiamento termico si verifica attorno alle ore 13 (12 solari). L'aumento di temperatura che si verifica sulle superfici opache impiegherà un certo tempo per far sentire il suo influsso all'interno dell'ambiente e questo tempo sarà funzione della diffusività delle pareti. È mio interesse ritardare il più possibile l'aumento di temperatura all'interno dell'ambiente in modo da farne sentire l'influsso verso sera, quando la temperatura dell'aria è diminuita; in tal modo posso diminuire la potenza massima dell'impianto di condizionamento.

Il transitorio è anche importante nella progettazione di motori in cui devo tener conto dei giochi, per esempio tra cilindro e pistone; per aumentare il tempo medio tra due manutenzioni è mio interesse, in questo caso, ridurre i tempi del transitorio.

Per valutare il transitorio devo risolvere l'equazione di Fourier. Esistono tre metodi:

- Metodi analitici: Si risolve in maniera analitica l'equazione di Fourier. Purtroppo le soluzioni analitiche sono difficili da ottenere ed esistono solo per geometrie semplici.
- Metodi grafici: Esistono per geometrie semplici dei grafici generati in funzione di numeri adimensionali che permettono di valutare in funzione del tempo la distribuzione della temperatura e il calore scambiato. Sono chiamate Heisler charts.
- Metodi numerici: Ormai sono molto diffusi data l'aumentata potenza dei computers. Hanno il grande pregio di poter trattare problemi di notevole complessità geometrica, con proprietà termofisiche variabili e condizioni al contorno arbitrarie.

Esiste, inoltre, un metodo che non si basa sulla risoluzione dell'equazione di Fourier: Il metodo delle capacità concentrate, applicabile solo sotto determinate condizioni.

2.6.2 Il metodo delle capacità concentrate.

Consideriamo un modello in cui si suppone che la temperatura all'interno del volume di controllo sia in ogni istante spazialmente uniforme. Ovviamente questa ipotesi non ha alcun senso fisico poiché se non ho un gradiente di temperatura non posso avere trasmissione termica. Utilizzerò questo modello quando i gradienti termici all'interno del corpo sono sufficientemente piccoli.

Bisogna, però, quantizzare cosa significa gradiente piccolo.

Immaginiamo un corpo immerso in un fluido. Se lo scambio termico convettivo è molto meno efficiente di quello conduttivo, gran parte del salto di temperatura che si otterrà tra il centro del corpo e il fluido indisturbato, si svilupperà nello strato limite.

Il rapporto tra la resistenza conduttiva e quella convettiva, a cui diamo il nome di numero di Biot, dà la misura dell'importanza relativa tra lo scambio termico conduttivo e quello convettivo. Il numero di Biot vale:

$$Bi = \frac{R_{cond}}{R_{conv}} = \frac{hL_c}{k} \quad (2-81)$$

dove:

h è il coefficiente convettivo.

k è la conduttività termica del materiale.

L_c è una grandezza caratteristica del sistema.

La lunghezza caratteristica si valuta come:

$$L_c = \frac{V}{A} \quad (2-82)$$

dove:

V è il volume del corpo

A è l'area di scambio termico

Se il numero di Biot è molto minore di 1, si può ritenere che la resistenza conduttiva sia trascurabile rispetto a quella convettiva; quindi, la temperatura all'interno del corpo si può ritenere costante.

In definitiva, se $Bi < 0,1$ è possibile applicare il metodo dei parametri concentrati, commettendo un errore di modellizzazione accettabile (minore del 5%).

Come esempio consideriamo un pezzo meccanico in acciaio che dopo la forgiatura presenta una temperatura uniforme T_i . Il pezzo viene raffreddato per immersione in una vasca di liquido a temperatura più bassa T_∞ . Supponiamo che la capacità termica del liquido sia molto grande in modo da ritenere che la T_∞ rimanga costante durante il raffreddamento del pezzo.

Il problema è schematizzato in figura 2-14.

Applicando il primo principio al nostro pezzo meccanico, supponendo valide le ipotesi di temperatura uniforme, possiamo scrivere che la variazione dell'energia del sistema eguaglierà la potenza termica uscente; cioè:

$$-\dot{E}_{out} = \dot{E}_{st} \quad (2-83)$$

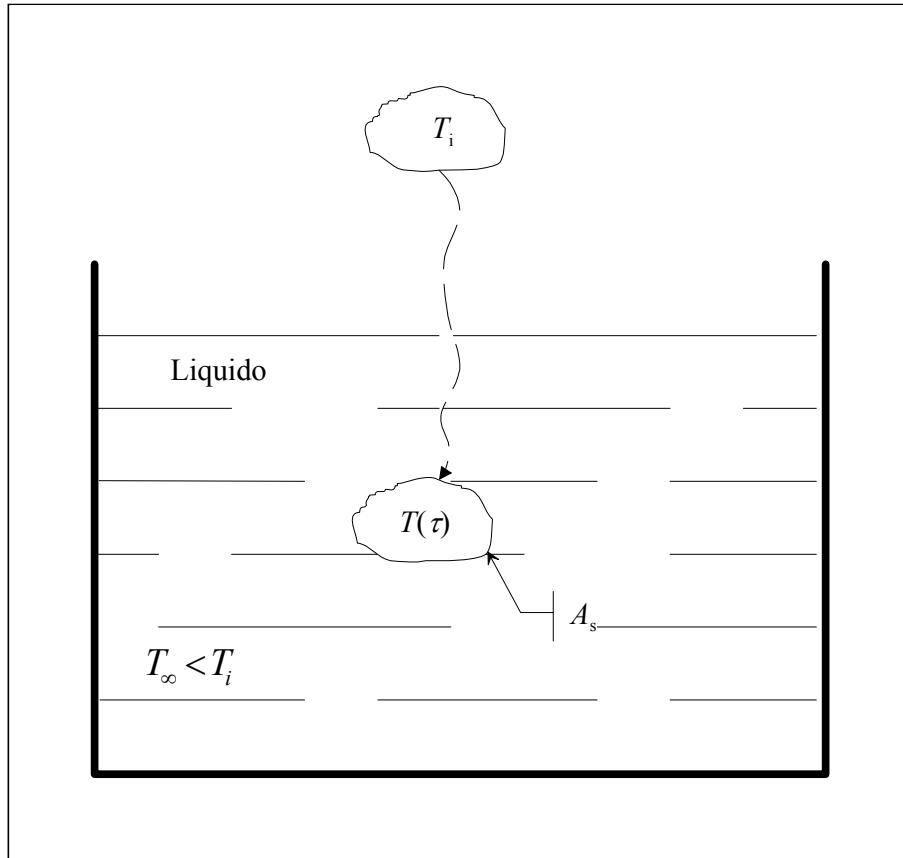


Figura 2-14: raffreddamento di un pezzo meccanico

Ricordando che la potenza termica uscente è dovuta a fenomeni convettivi, possiamo scrivere la (2-83) come:

$$-hA_s(T - T_\infty) = \rho V c \frac{dT}{d\tau} \quad (2-84)$$

Per semplificare la soluzione applichiamo un cambiamento di variabile.

$$\theta = T - T_\infty \quad (2-85)$$

e ricordando che:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{dT}{d\tau} \quad (2-86)$$

possiamo riscrivere la (2-84):

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{hA_s}{\rho V c} \theta \quad (2-87)$$

È possibile risolvere la (2-87) per separazione di variabili integrando, poi, dalle condizioni iniziali $\tau = 0$ e $\theta(0) = \theta_i = T_i - T_\infty$ a delle condizioni generiche τ e θ :

$$\int_{\theta_i}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} = -\frac{hA_s}{\rho Vc} \int_0^{\tau} d\tau \quad (2-88)$$

Risolvendo si ottiene:

$$\ln \frac{\theta}{\theta_i} = -\frac{hA_s}{\rho Vc} \tau \quad (2-89)$$

o, esplicitando le temperature:

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = e^{\left[-\frac{hA_s}{\rho Vc} \tau \right]} \quad (2-90)$$

La temperatura del pezzo tende in modo esponenziale alla temperatura del serbatoio.

Si può osservare che il termine $\frac{\rho Vc}{hA_s}$ ha le dimensioni di un tempo e viene definito costante di tempo τ_i del sistema. Corrisponde al tempo necessario affinché il valore di θ diminuisca fino a raggiungere il 36,8% di θ_i . La costante di tempo ci indica la capacità di un sistema a rispondere ad una brusca variazione di temperatura. Più la costante di tempo è piccola, più rapidamente un sistema si porterà in condizioni di regime. Si può ritenere che il sistema raggiunga le condizioni di regime dopo circa 4 – 5 costanti di tempo. Per esempio, se volessi misurare una temperatura dovrei valutare la costante di tempo del termometro ed eseguire la misura per un tempo pari ad almeno 4 τ_i .

La costante di tempo può venir espressa anche come:

$$\tau_i = \left(\frac{1}{hA_s} \right) (\rho Vc) = R_t C_t \quad (2-91)$$

dove:

R_t è la resistenza termica convettiva.

C_t è la capacità termica globale del solido.

Dal punto di vista dell'analogia elettrotermica il comportamento è analogo a quello di un circuito elettrico RC .

Per valutare il calore scambiato in un certo tempo dal nostro sistema, basta ricordare che la potenza scambiata è pari alla potenza convettiva. Pertanto, integrando nel tempo questa ultima, ottengo il calore scambiato, Q .

$$Q = hA_s \int_0^{\tau} \theta d\tau \quad (2-92)$$

Ricavando θ dalla (2-90), sostituendo nella (2-92) ed integrando, si ottiene:

$$Q = \rho Vc \theta_i \left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_i}} \right) \quad (2-93)$$

Consideriamo ancora un momento l'esponente della (2-90). Ricordando che $L_c = \frac{V}{A}$ ottengo:

$$\frac{hA_s}{\rho V c} \tau = \frac{h}{\rho V L_c} \tau \quad (2-94)$$

Moltiplicando il numeratore e il denominatore per k e L_c si ottiene:

$$\left(\frac{hL_c}{k} \right) \left(\frac{k}{\rho c} \frac{\tau}{L_c^2} \right) = \left(\frac{hL_c}{k} \right) \left(\frac{\alpha \tau}{L_c^2} \right) \quad (2-95)$$

Il termine $\left(\frac{hL_c}{k} \right)$ è il numero di Biot che abbiamo già visto, mentre il secondo termine rappresenta un tempo adimensionalizzato, a cui diamo il nome di numero di Fourier.

$$Fo = \frac{\alpha \tau}{L_c^2} \quad (2-96)$$

Pertanto la (2-90) si può riscrivere come:

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{[-Bi Fo]} \quad (2-97)$$

Supponiamo, ora, che il nostro sistema sia ricoperto da uno strato di isolante che abbia una capacità termica trascurabile.

Questo problema è risolvibile con l'equazione (2-90), dove si sostituisce il coefficiente convettivo, h , con la trasmittanza del sistema, U ; per cui:

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{\left[-\frac{UA_s}{\rho V c} \tau \right]}$$

Dove:

$$UA_s = \frac{1}{R_{conv.} + R_{isolante}}$$

Ben più complesso è il caso in cui la capacità termica dell'isolante non sia trascurabile.

Supponiamo che il sistema sia costituito da un fluido contenuto in un recipiente di capacità termica non trascurabile e che sia soggetto ad uno scambio convettivo, h_e . Lo schema è rappresentato in Figura 2-15.

Si supponga che le condizioni iniziali siano

$$T_1 = T_2 = T_i.$$

Questo significa anche che

$$\frac{dT_1}{d\tau} = 0 \quad \text{per } \tau = 0$$

in quanto, essendo il sistema isotermo, non vi può essere trasmissione di calore.

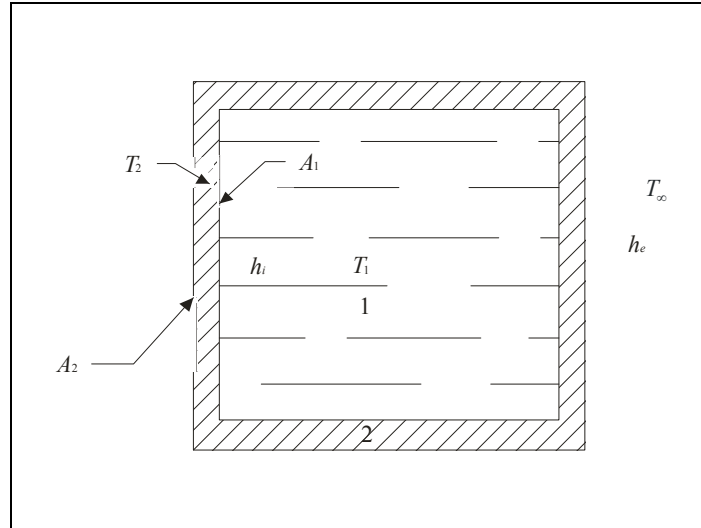


Figura 2-15: Recipiente di capacità termica non trascurabile contenente un fluido e soggetto a scambio convettivo esterno

Supponendo che sia utilizzabile il metodo dei parametri concentrati, si può applicare il primo principio, sia al sistema fluido, sia al sistema recipiente e si ottengono le seguenti equazioni differenziali:

$$h_i A_1 (T_1 - T_2) = -\rho_1 V_1 c_1 \frac{dT_1}{d\tau} \quad (2-98)$$

$$h_e A_2 (T_2 - T_\infty) + h_i A_1 (T_2 - T_1) = -\rho_2 V_2 c_2 \frac{dT_2}{d\tau} \quad (2-99)$$

Per ottenere l'andamento della temperatura nel fluido e nel recipiente bisogna risolvere il sistema rappresentato dalle (2-98) e (2-99)

Dalla (2-98) si ricava T_2 :

$$T_2 = T_1 + \frac{\rho_1 V_1 c_1}{h_i A_1} \frac{dT_1}{d\tau} \quad (2-100)$$

Sostituendo la (2-100) nella (2-99) si ottiene:

$$h_e A_2 \left(T_1 + \frac{\rho_1 V_1 c_1}{h_i A_1} \frac{dT_1}{d\tau} - T_\infty \right) + h_i A_1 \left(T_1 + \frac{\rho_1 V_1 c_1}{h_i A_1} \frac{dT_1}{d\tau} - T_1 \right) = -\rho_2 V_2 c_2 \frac{d}{d\tau} \left(T_1 + \frac{\rho_1 V_1 c_1}{h_i A_1} \frac{dT_1}{d\tau} \right)$$

Che riordinata diviene:

$$\frac{d^2 T_1}{d\tau^2} + C_1 \frac{dT_1}{d\tau} + C_2 T_1 = C_2 T_\infty \quad (2-101)$$

Dove:

$$C_1 = \frac{h_e A_2}{\rho_2 V_2 c_2} + \frac{h_i A_1}{\rho_2 V_2 c_2} + \frac{h_i A_1}{\rho_1 V_1 c_1}$$

$$C_2 = \frac{h_i A_1}{\rho_1 V_1 c_1} \cdot \frac{h_e A_2}{\rho_2 V_2 c_2}$$

L'integrale particolare della (2-101), che corrisponde alla temperatura che il sistema raggiunge nelle condizioni stazionarie, è uguale, ovviamente, a:

$$T_1 = T_\infty$$

La soluzione dell'equazione omogenea, che corrisponde alla soluzione transitoria, è uguale a:

$$T_1 = Ae^{m_1 \tau} + Be^{m_2 \tau}$$

Dove m_1 e m_2 sono le soluzioni dell'equazione caratteristica:

$$z^2 + C_1 z + C_2 = 0$$

Per cui:

$$m_1 = \frac{-C_1 + \sqrt{C_1^2 - 4C_2}}{2}$$

$$m_2 = \frac{-C_1 - \sqrt{C_1^2 - 4C_2}}{2}$$

La soluzione generale è, quindi:

$$T_1 = T_\infty + Ae^{m_1 \tau} + Be^{m_2 \tau} \quad (2-102)$$

Dove le costanti arbitrarie A e B si determinano applicando le condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} T_1 &= T_i & \text{per } \tau &= 0 \\ \frac{dT_1}{d\tau} &= 0 & \text{per } \tau &= 0 \end{aligned} \quad (2-103)$$

Imponendo le condizioni iniziali ottengo il sistema:

$$\begin{cases} T_1 = T_\infty + A + B \\ 0 = m_1 A + m_2 B \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene:

$$A = \frac{m_2}{m_2 - m_1} (T_1 - T_\infty)$$

$$B = -\frac{m_1}{m_2 - m_1} (T_1 - T_\infty)$$

Sostituendo le costanti nella (2-102) si ricava, infine, che:

$$\frac{(T_1 - T_\infty)}{(T_i - T_\infty)} = \frac{m_2}{m_2 - m_1} e^{m_1 \tau} - \frac{m_1}{m_2 - m_1} e^{m_2 \tau} \quad (2-104)$$

La T_2 si ottiene sostituendo la (2-104) nella (2-98).

Esempio 2-5

Una termocoppia rame – costantana a forma di sfera di diametro $D = 0,125 \text{ mm}$, ha una temperatura iniziale pari a $t_i = 20^\circ\text{C}$. Viene immersa in una corrente d'aria a $t_\infty = 10^\circ\text{C}$.

Sapendo che il coefficiente convettivo medio vale $h = 50 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$:

- Dimostrare che è possibile applicare il metodo dei parametri concentrati
- Ricavare il tempo necessario affinché la termocoppia raggiunga la temperatura $t = 10,5^\circ\text{C}$.

Le proprietà termofisiche della lega sono:

$$k = 204,2 \frac{\text{W}}{\text{mK}} \quad c = 399,5 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \quad \rho = 8930 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Svolgimento

Valutiamo il numero di Biot. Per poterlo fare dobbiamo prima trovare la lunghezza caratteristica.

$$L_c = \frac{V}{A} = \frac{\frac{4}{3} \pi r^3}{4 \pi r^2} = \frac{r}{3} = \frac{D}{6} = \frac{0,125}{6} = 0,0208 \text{ mm} = 2,08 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$Bi = \frac{h L_c}{k} = \frac{50 \cdot 2,08 \cdot 10^{-5}}{204,2} = 5,09 \cdot 10^{-6}$$

Quindi, visto che il numero di Biot è ben inferiore a 0,1, si può applicare il metodo dei parametri concentrati.

La costante di tempo vale:

$$\tau_i = \frac{\rho L_c c}{h} = \frac{8930 \cdot 2,08 \cdot 10^{-5} \cdot 399,5}{50} = 1,484 \text{ s}$$

Manipolando l'equazione (2-90) si ottiene infine:

$$\tau = -\tau_i \ln \frac{t - t_\infty}{t_i - t_\infty} = -1,484 \cdot \ln \frac{10,5 - 10}{20 - 10} = 4,445 \text{ s}$$

Quindi dopo circa 3 costanti di tempo commettiamo un errore di misura di $0,5^\circ\text{C}$.

2.6.3 Adimensionalizzazione dell'equazione della conduzione non stazionaria.

Alla fine del paragrafo precedente abbiamo visto che l'equazione per il metodo dei parametri concentrati poteva venir scritta in termini adimensionali. Posso fare la stessa cosa con l'equazione di Fourier.

Per comodità suppongo che il problema dipenda da una sola coordinata spaziale.

Supponiamo una lastra piana in assenza di generazione di calore e con conduttività costante. Il problema è rappresentato in Figura 2-16. L'equazione di Fourier diventa, allora:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (2-105)$$

In questo caso le condizioni iniziali sono:

$$T(x, 0) = T_i \quad (2-106)$$

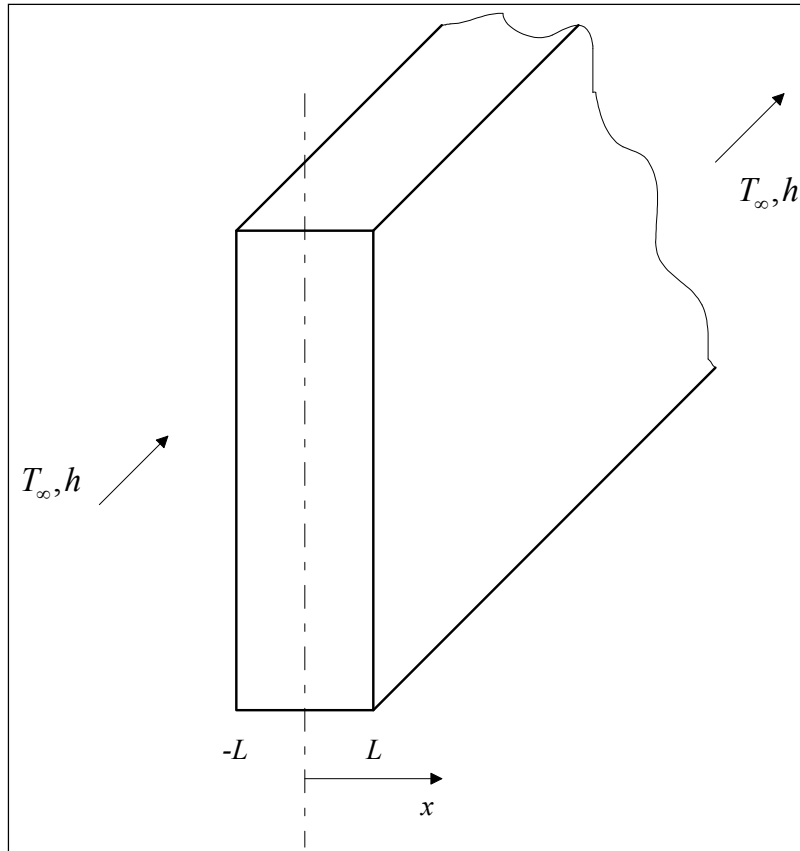


Figura 2-16: Conduzione non stazionaria su lastra piana.

e le condizioni al contorno sono:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (2-107)$$

e

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = h[T(L, \tau) - T_\infty] \quad (2-108)$$

Dalle equazioni appena scritte risulta che la distribuzione di temperatura è funzione di:

$$T = T(x, \tau, T_i, T_\infty, L, k, \alpha, h) \quad (2-109)$$

In definitiva è funzione di otto variabili.

Ora adimensionalizzeremo queste equazioni, combinando le variabili in opportuni gruppi adimensionali. Risulterà evidente alla fine il vantaggio di questa operazione.

Le equazioni (2-105), (2-106) (2-107) (2-108) e (2-109) le possiamo riscrivere in funzione della variabile θ .

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad (2-110)$$

$$\theta(x, 0) = \theta_i \quad (2-111)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (2-112)$$

$$-k \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=L} = h\theta(L, \tau) \quad (2-113)$$

Quindi la (2-109) diviene:

$$\theta = \theta(x, \tau, \theta_i, L, k, \alpha, h) \quad (2-114)$$

Da cui si vede che θ è funzione di 7 variabili.

Definiamo ora due variabili adimensionali.

La temperatura adimensionale:

$$\theta^* = \frac{\theta}{\theta_i} \quad (2-115)$$

con

$$\theta_i = T_i - T_\infty$$

e una lunghezza adimensionale

$$x^* = \frac{x}{L} \quad (2-116)$$

Dividendo la (2-105) per θ_i e moltiplicando per L^2 ottengo:

$$\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}} = \frac{L^2}{\alpha} \frac{\partial \theta^*}{\partial \tau} \quad (2-117)$$

Ricordando l'espressione del numero di Fourier si ottiene:

$$\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}} = \frac{\partial \theta^*}{\partial Fo} \quad (2-118)$$

e le condizioni iniziale e al contorno diventano:

$$\theta^*(x^*, 0) = 1 \quad (2-119)$$

$$\left. \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \right|_{x^*=0} = 0 \quad (2-120)$$

$$\left. \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \right|_{x^*=1} = -Bi \theta^*(1, Fo) \quad (2-121)$$

Perciò la relazione (2-114) diviene:

$$\theta^* = \theta^*(x^*, Fo, Bi) \quad (2-122)$$

Il vantaggio è evidente: abbiamo da considerare solo 3 variabili. Se ricavassimo la funzione con metodi sperimentali dovremmo tener sotto controllo un numero decisamente più basso di variabili. Inoltre l'eventuale relazione che viene ricavata ha una validità generale; vale, cioè, per tutti i sistemi geometricamente simili.

È per questi motivi che si cerca sempre di utilizzare delle variabili adimensionali.

2.6.4 Diagrammi di Heisler

Come è stato detto nel paragrafo 2.6.1 la soluzione dell'equazione di Fourier, anche in un caso monodimensionale, non è agevole.

Heisler riportò in forma grafica la soluzione dell'equazione di Fourier non stazionaria per alcuni casi geometricamente semplici: lastra piana monodimensionale, cilindro lungo, sfera.

2.6.4.1 Lastra piana monodimensionale

Consideriamo una lastra piana di area infinita di spessore $2L$.

La piastra si trova inizialmente alla temperatura iniziale T_i . All'istante $\tau = 0$ viene immersa in un fluido a temperatura T_∞ , che si suppone rimanga costante durante tutto il processo. Tra la piastra e il fluido vi sarà una trasmissione di calore convettiva con coefficiente convettivo medio $\bar{h}$.

In Figura 2-17 è riportato l'andamento della temperatura adimensionale $\frac{T(0, \tau) - T_\infty}{T_i - T_\infty}$ in funzione del numero di Fourier, $\frac{\alpha \tau}{L^2}$ (che rappresenta un tempo adimensionale) e del reciproco del numero di Biot, $\frac{k}{\bar{h} L}$.

In Figura 2-18 è, invece, riportato l'andamento della temperatura adimensionale di un punto qualunque della piastra, $\frac{x}{L}$, in funzione del reciproco del numero di Biot. La temperatura viene

adimensionalizzata in funzione della temperatura dell'asse della piastra, $\frac{T(x, \tau) - T_\infty}{T(0, \tau) - T_\infty}$.

Tramite questi due diagrammi è possibile calcolare l'andamento in funzione del tempo della temperatura di un qualunque punto della piastra.

Con il diagramma di Figura 2-17 si ricava la temperatura del asse della piastra ad un certo tempo e poi con questo valore è possibile, entrando nel diagramma di Figura 2-18, ricavare la temperatura in un qualunque altro punto in quel istante.

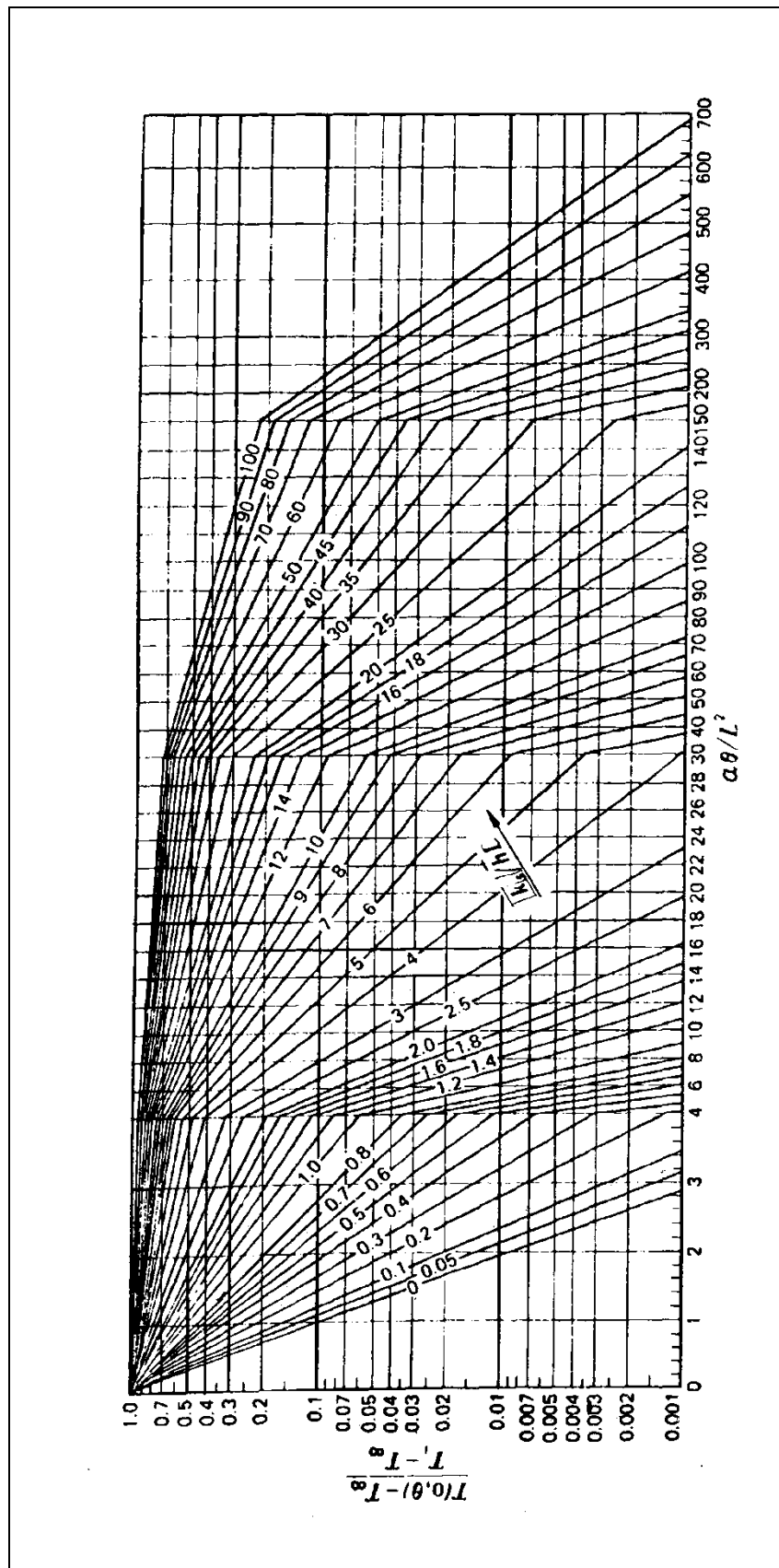


Figura 2-17: Temperatura dell'asse di una piastra piana di area infinita e di spessore $2L$ (da M. P. Heisler, *Trans. ASME*, 69, p. 227, 1947)

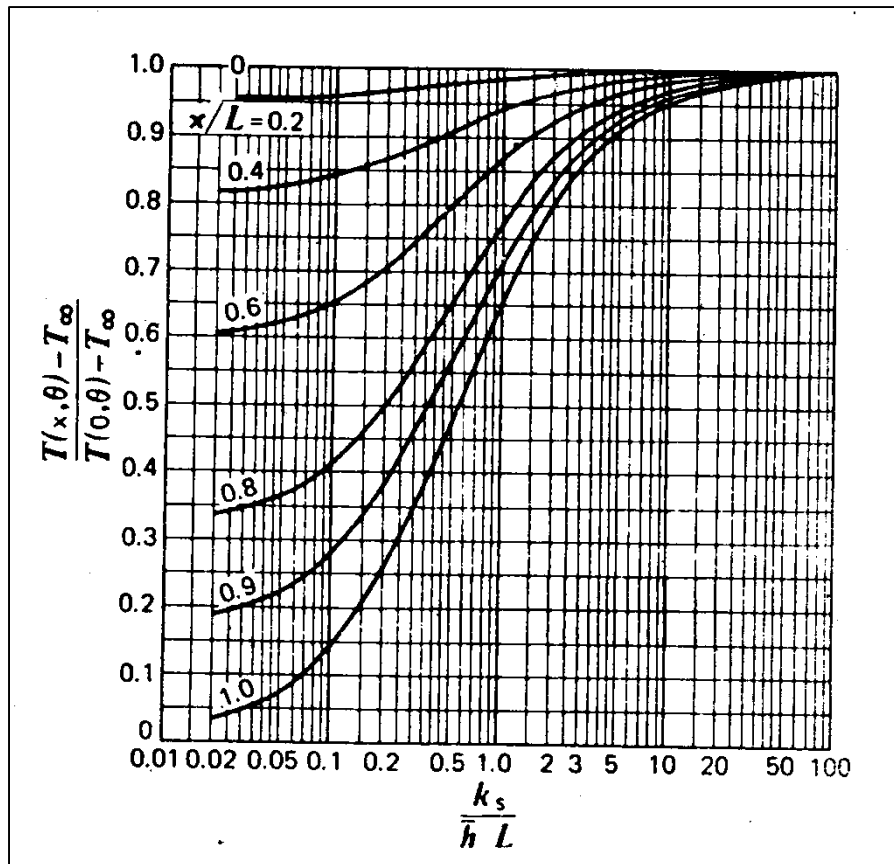


Figura 2-18: Temperatura all'interno di una piastra piana di area infinita e di spessore $2L$ in funzione della temperatura dell'asse (da M. P. Heisler, *Trans. ASME*, 69, p. 227, 1947)

Per calcolare, invece, il calore scambiato dalla piastra in un certo tempo (calore che corrisponde, per il primo principio, alla variazione dell'energia interna della piastra) si ricorre al diagramma di Figura 2-19, dovuto al Gröber. In questo diagramma è riportato il calore per unità di superficie adimensionalizzato, $\frac{Q}{Q_i}$, dove Q_i corrisponde all'energia interna iniziale per unità di superficie, in

funzione del termine adimensionale $Bi^2 Fo = \frac{\bar{h} \alpha \tau}{k^2}$ per diversi valori del numero di Bi .

Q_i è uguale a:

$$Q_i = \rho L c (T_i - T_\infty)$$

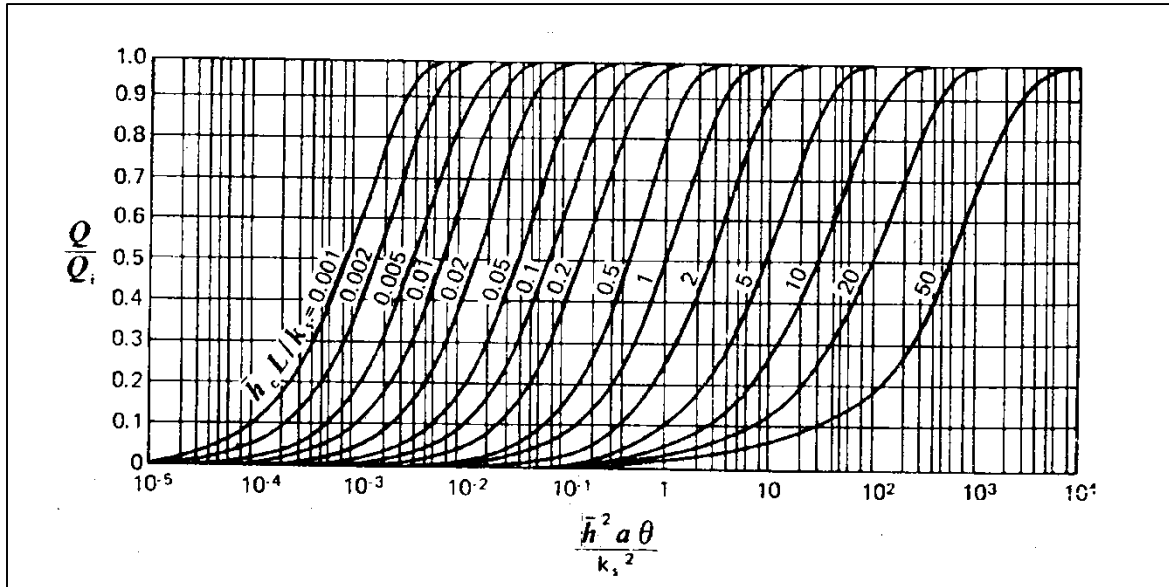


Figura 2-19: Calore scambiato da una piastra piana di area infinita e di spessore $2L$ (da Gröber Berlino 1955)

2.6.4.2 Sistemi radiali monodimensionali: cilindri lunghi e sfere con condizioni convettive al contorno.

In Figura 2-20, 2-21, 2-22 sono riportati gli analoghi diagrammi visti per le lastre piane riferiti ai cilindri e in Figura 2-23, 2-24, 2-25 quelli riferiti alle sfere.

Bisogna fare attenzione che i numeri di Biot e di Fourier utilizzano come lunghezza caratteristica il raggio e non, come visto nel metodo dei parametri concentrati, $\frac{r_e}{2}$ per il cilindro e $\frac{r_e}{3}$ per la sfera.

Per il cilindro Q_i è uguale a:

$$Q_i = \rho \pi r_e^2 c (T_i - T_\infty)$$

Il calore scambiato è, quindi, valutato per unità di lunghezza.

Per la sfera Q_i è pari a:

$$Q_i = \rho \frac{4}{3} \pi r_e^3 c (T_i - T_\infty)$$

In questo caso il diagramma permette di calcolare l'effettivo calore scambiato in un certo tempo.

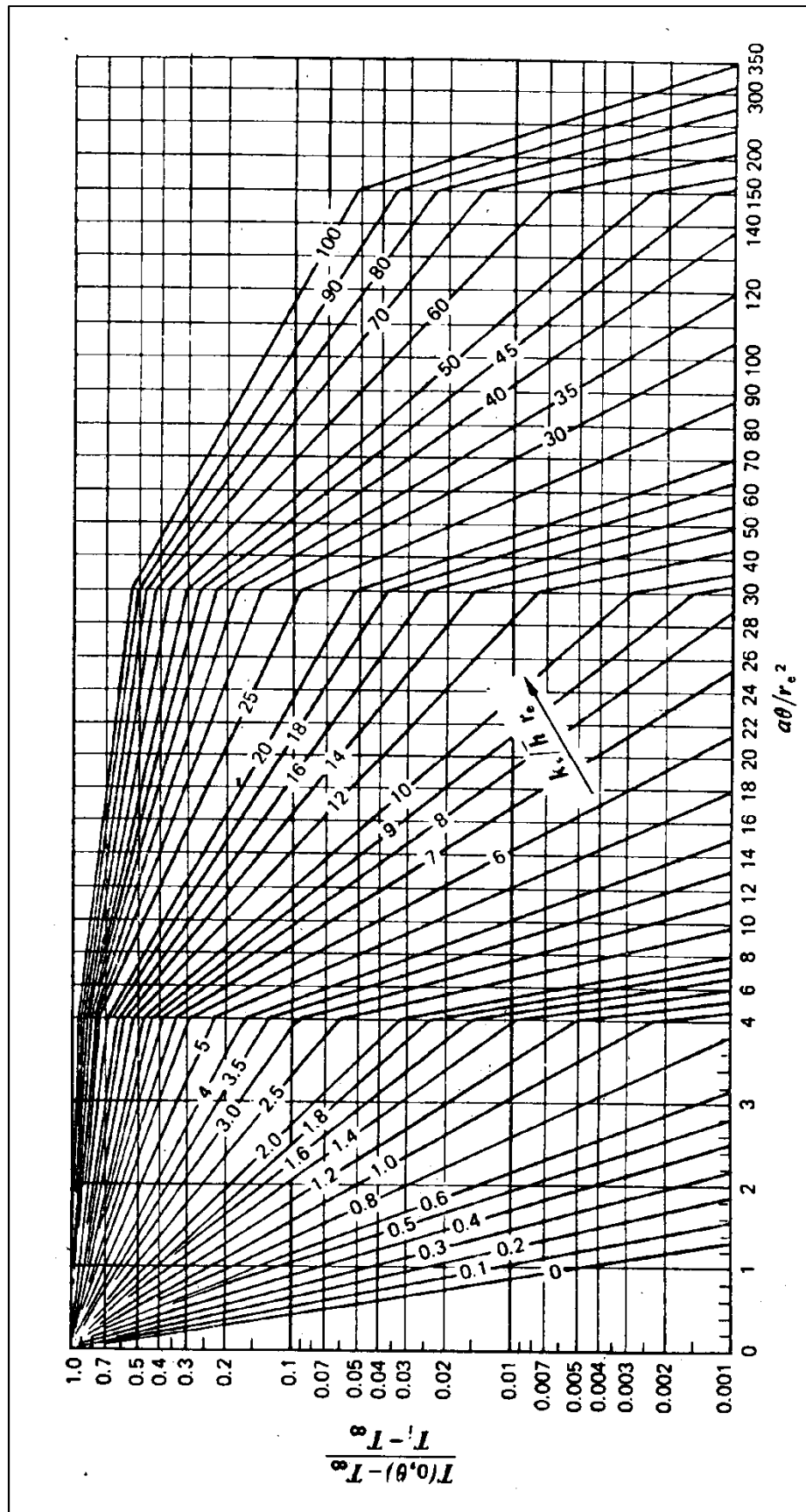


Figura 2-20: Temperatura dell'asse di un cilindro di lunghezza infinita e raggio esterno r_e (da M. P. Heisler, *Trans. ASME*, 69, p. 227, 1947)

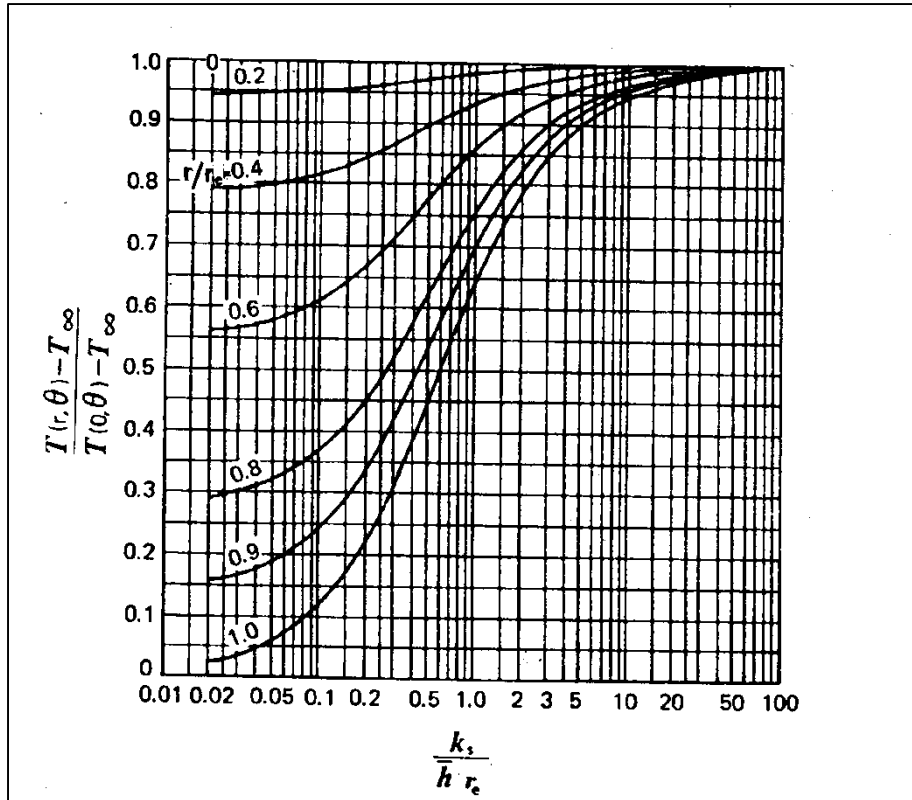


Figura 2-21: Temperatura all'interno di un cilindro di lunghezza infinita e raggio esterno r_e in funzione della temperatura dell'asse (da M. P. Heisler, *Trans. ASME*, 69, p. 227, 1947)

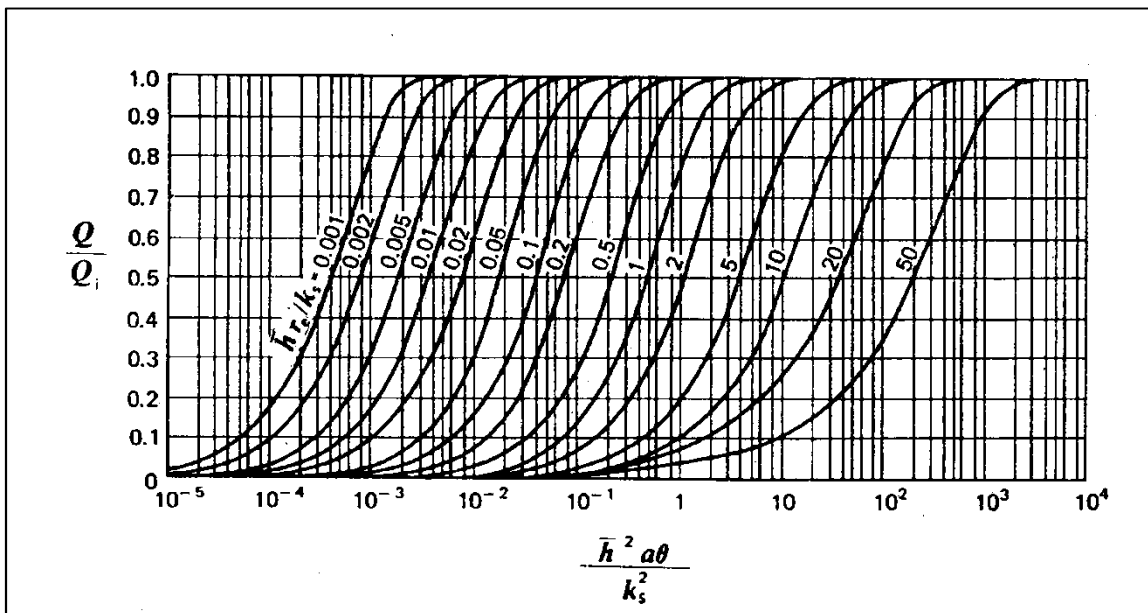


Figura 2-22: Calore scambiato da un cilindro di lunghezza infinita e raggio esterno r_e (da Gröber Berlino 1955)

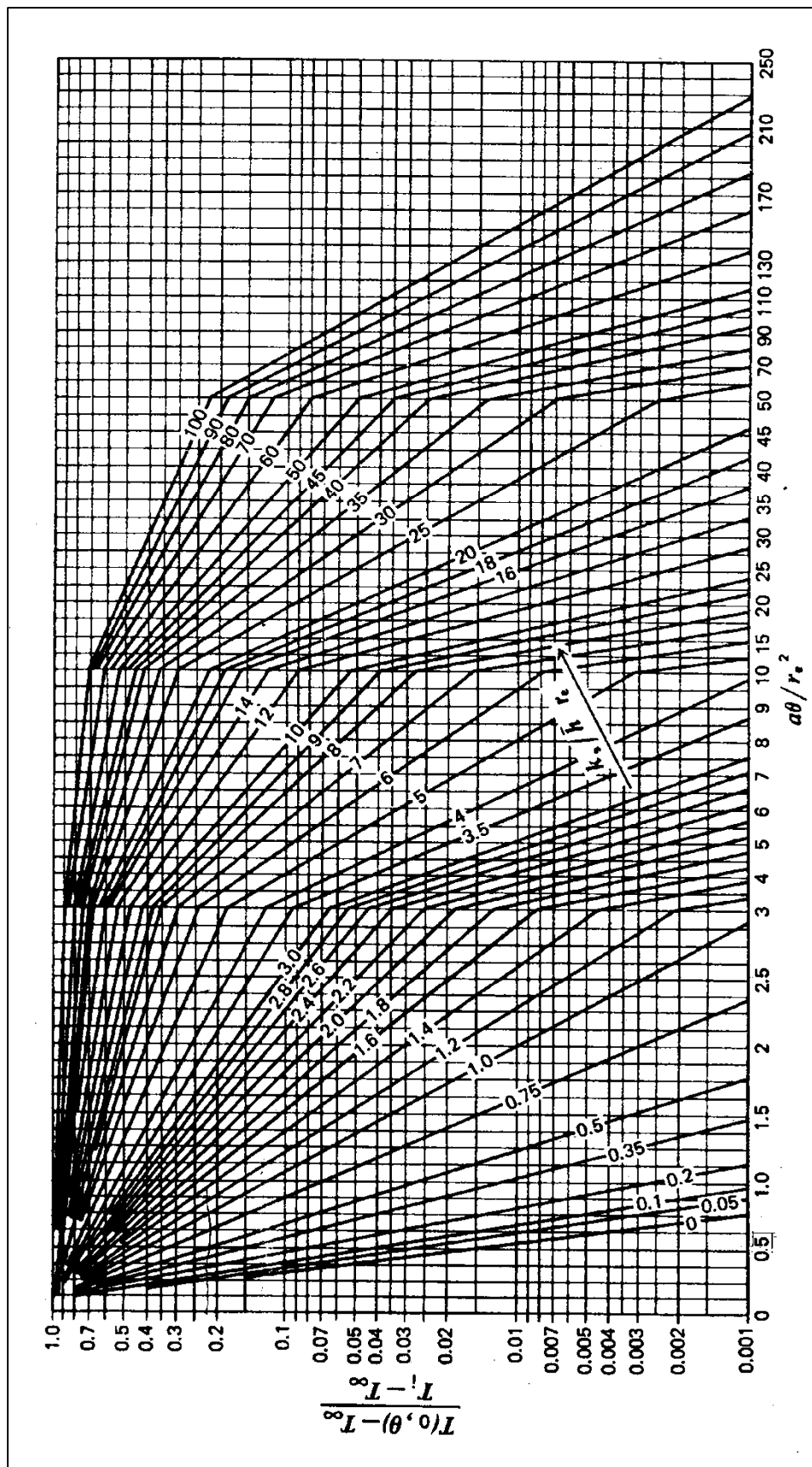


Figura 2-23: Temperatura al centro di una sfera di raggio esterno r_e (da M. P. Heisler, *Trans. ASME*, 69, p. 227, 1947)

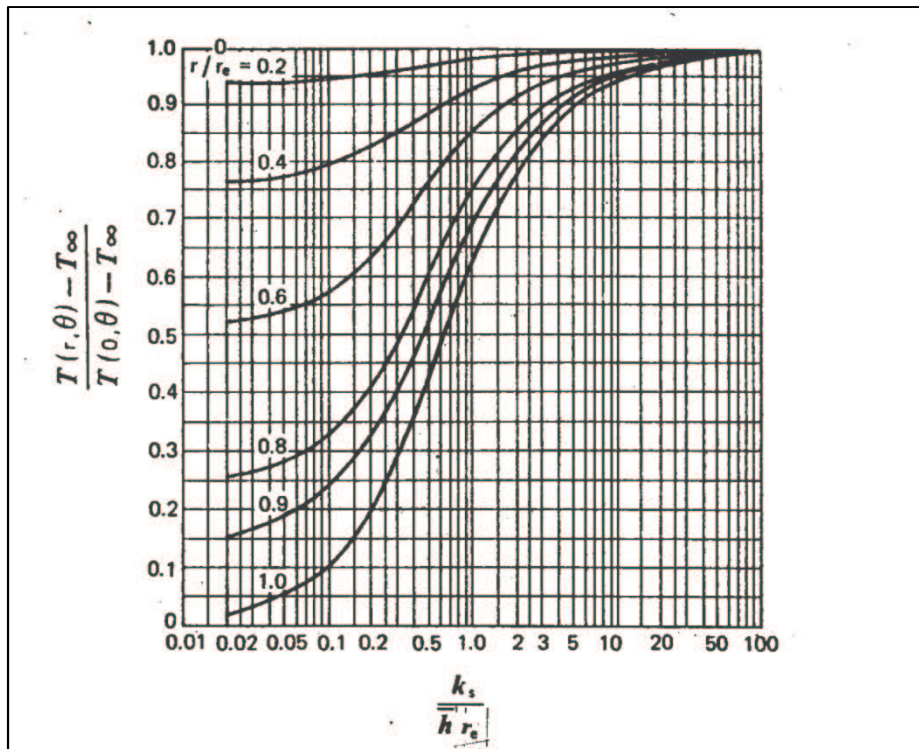


Figura 2-24: Temperatura all'interno di una sfera di raggio esterno r_e in funzione della temperatura del centro (da M. P. Heisler, *Trans. ASME*, 69, p. 227, 1947)

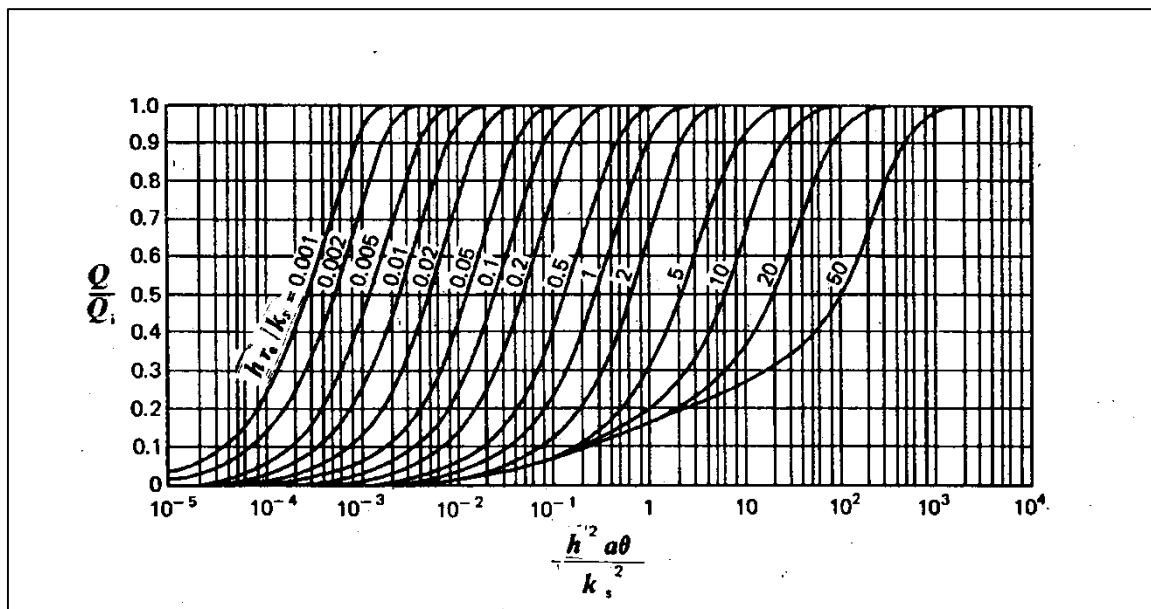


Figura 2-25: Calore scambiato da una sfera di raggio esterno r_e (da Gröber Berlino 1955)

Esempio 2-6

Un pompelmo di diametro 10 cm ha una temperatura $T_i = 25^\circ\text{C}$. Viene posto in una cella frigorifera, avente la temperatura $T_\infty = 4^\circ\text{C}$. Sapendo che il coefficiente convettivo medio vale $\bar{h} = 10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$ e

supponendo che le caratteristiche termofisiche siano assimilabili a quelle dell'acqua, stimare il tempo necessario affinché il centro del frutto si porti ad una temperatura $T(0, \tau) = 5^\circ C$.

Svolgimento.

Per prima cosa conviene valutare il numero di Biot per verificare se è applicabile il metodo dei parametri concentrati.

Per calcolare il numero di Biot bisogna conoscere le proprietà termofisiche che verranno valutate alla temperatura media

$$T_m = \frac{T_i + T(0, \tau)}{2} = \frac{25 + 5}{2} = 15^\circ C$$

A questa temperatura le proprietà termofisiche valgono:

$$\alpha = 1,40 \cdot 10^{-7} \frac{m^2}{s} \quad k = 0,595 \frac{W}{mK}$$

La lunghezza caratteristica è uguale a:

$$L_c = \frac{D}{6} = 1,67 \cdot 10^{-2} m$$

Per cui il numero di Biot vale:

$$Bi = \frac{\bar{h} L_c}{k} = 0,28$$

Quindi non si può applicare il metodo dei parametri concentrati.
Useremo i diagrammi di Heisler

$$\frac{1}{Bi^*} = \frac{k}{\bar{h} r_e} = \frac{0,595}{10 \cdot 5 \cdot 10^{-2}} = 1,19 \approx 1,2$$

$$\frac{T(0, \tau) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{5 - 4}{25 - 4} = 0,048$$

Entrando con questi due valori in Figura 2-23 si ottiene:

$$Fo = 1,55$$

Per cui:

$$\tau = \frac{Fo r_e^2}{\alpha} = \frac{1,55 \cdot (0,5 \cdot 10^{-2})^2}{1,40 \cdot 10^{-7}} = 27678 s \approx 7,7h$$

Se avessimo applicato il metodo delle capacità concentrate avremmo ottenuto:

$$\tau = -\frac{\rho c L_c}{h} \ln \frac{T(0, \tau) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = -\frac{1000 \cdot 4186 \cdot 1,67 \cdot 10^{-2}}{10} \ln 0,048 = 21227 \text{ s}$$

Con un errore in difetto di circa il 23%.

2.6.4.3 Conduzione non stazionaria in corpi bi e tridimensionali.

Nel paragrafo precedente si era considerato il problema della conduzione non stazionaria in corpi monodimensionali. Purtroppo, benché questo modello si possa applicare in molti casi, nella pratica molto spesso l'ipotesi di monodimensionalità non è accettabile.

Alcuni casi bi o tridimensionali, sono comunque risolvibili con i diagrammi di Heisler.

Come primo esempio consideriamo una trave lunga avente una sezione di dimensioni $2a \times 2b$, soggetta a condizioni convettive. La soluzione di questo problema, per esempio, si adatterebbe al caso pratico di valutare quanto tempo potrebbe resistere una trave di legno sottoposta ad incendio, prima di collassare.

Si può dimostrare che la temperatura adimensionalizzata di un punto qualsiasi della trave è data dal prodotto delle soluzioni ottenute per le piastre di dimensioni $2a$ e $2b$.

$$\left(\frac{T(x, y, \tau) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{trave} = \left(\frac{T(x, \tau) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{piastra_{2a}} \left(\frac{T(y, \tau) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{piastra_{2b}} \quad (2-123)$$

Con un metodo analogo si potrebbe valutare la distribuzione di temperatura nel tempo di una struttura avente la forma di un parallelepipedo di dimensioni $2a \times 2b \times 2c$.

$$\left(\frac{T(x, y, z, \tau) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{parallelepip.} = \left(\frac{T(x, \tau) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{piastra_{2a}} \left(\frac{T(y, \tau) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{piastra_{2b}} \left(\frac{T(z, \tau) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{piastra_{2c}} \quad (2-124)$$

Nello stesso modo è possibile valutare la storia temperatura – tempo in un cilindro corto di lunghezza $2L$.

$$\left(\frac{T(r, z, \tau) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{cilind. corto} = \left(\frac{T(r, \tau) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{cilind. infinito} \left(\frac{T(z, \tau) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{piastra_{2L}} \quad (2-125)$$

Esempio 2-7

Un perno in acciaio dolce di diametro $D = 50 \text{ mm}$ e lunghezza $2L = 70 \text{ mm}$ si trova alla temperatura uniforme, T_i , di 650°C . Il perno viene immerso in un bagno d'olio avente una temperatura $T_\infty = 20^\circ\text{C}$, che si suppone rimanga costante nel tempo. Sapendo che il coefficiente convettivo medio, $\bar{h}$, vale $850 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$, determinare la temperatura del pezzo sull'asse a metà della lunghezza dopo 3 minuti di immersione.

Svolgimento

Per prima cosa bisogna ricavare le proprietà termofisiche. Le valuteremo alla temperatura media tra quella iniziale e quella del bagno.

$$T_m = \frac{650 + 20}{2} = 335^\circ C$$

$$\rho = 7854 \frac{kg}{m^3} \quad k = 48 \frac{W}{mK} \quad c_p = 559 \frac{J}{kg K} \quad \alpha = 1,09 \frac{m^2}{s}$$

Valutiamo il numero di Biot

Per prima cosa bisogna calcolare la lunghezza caratteristica:

$$L_c = \frac{V}{A_s} = \frac{\frac{\pi D^2}{4} 2L}{\pi D 2L + 2 \frac{\pi D^2}{4}} = 9,2 \cdot 10^{-3} m$$

$$Bi = \frac{\bar{h} L_c}{k} = \frac{850 \cdot 9,2 \cdot 10^{-3}}{48} = 0,16$$

Quindi non si può utilizzare il metodo dei parametri concentrati.

Utilizzeremo i diagrammi di Heisler.

Considereremo l'intersezione di un cilindro di lunghezza infinita con una piastra di spessore $2L$.

$$\left(\frac{T(0,0,3 min) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{\substack{cylind. \\ corto}} = \left(\frac{T(0,3 min) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{\substack{cylind. \\ infinito}} \left(\frac{T(0,3 min) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{\substack{piastra \\ 2L}}$$

Per la piastra:

$$Bi^{-1} = \frac{k}{\bar{h} L} = \frac{48}{850 \cdot 35 \cdot 10^{-3}} = 1,6$$

$$Fo = \frac{\alpha \tau}{L^2} = \frac{1,09 \cdot 10^{-5} \cdot 180}{(35 \cdot 10^{-3})^2} = 1,60$$

Dal diagramma di Figura 2-17 si ricava:

$$\left(\frac{T(0,3 min) - T_\infty}{T_i - T_\infty} \right)_{\substack{piastra \\ 2L}} = 0,45$$

Per il cilindro si ricava, invece:

$$Bi^{-1} = \frac{k}{\bar{h} r_e} = \frac{48}{850 \cdot 25 \cdot 10^{-3}} = 2,25$$

$$Fo = \frac{\alpha \tau}{r_e^2} = \frac{1,09 \cdot 10^{-5} \cdot 180}{(25 \cdot 10^{-3})^2} = 3,14$$

Dal diagramma di Figura 2-20 si ottiene:

$$\left(\frac{T(0,3 \text{ min}) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{\substack{\text{cilind.} \\ \text{infinito}}} = 0,08$$

Per cui:

$$\left(\frac{T(0,0,3 \text{ min}) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{\substack{\text{cilind.} \\ \text{corto}}} = 0,45 \cdot 0,08 = 0,036$$

$$T(0,0,3 \text{ min}) = 0,036 \cdot (650 - 20) + 20 = 43^{\circ}C$$

3 La convezione.

3.1 Introduzione.

La convezione termica si riferisce allo studio dello scambio termico che avviene tra una superficie solida ed un fluido a contatto con la superficie.

Come già rilevato nel paragrafo 1.3.2, la convezione è un fenomeno più complesso della conduzione, in quanto, oltre a dipendere dalle proprietà termofisiche del fluido e dalle condizioni al contorno imposte sulla superficie del solido, dipende fondamentalmente dalle caratteristiche del moto. In altri termini dipende dalla geometria del sistema, dal tipo di moto (laminare o turbolento), da come è generata la velocità del fluido (convezione forzata o naturale).

Questo significa che, oltre all'equazione dell'energia, bisogna risolvere anche l'equazione di continuità e quella della quantità di moto.

La risoluzione analitica di queste equazioni è molto complessa e spesso impossibile. Si ricorre, allora, a metodi che utilizzano l'analisi dimensionale (numeri adimensionali) e le leggi di similitudine, associati a dati ottenuti sperimentalmente o numericamente.

Un metodo per ottenere i numeri adimensionali significativi per un certo problema è quello di adimensionalizzare le equazioni che reggono il fenomeno, come avevamo visto nel caso della conduzione non stazionaria.

Focalizziamo, per il momento, la nostra attenzione al caso della convezione forzata.

Adimensionalizzando le equazioni della quantità di moto, di continuità e dell'energia si ricava che il numero di Nusselt locale vale:

$$Nu_x = f(x^*, Re_x, Pr) \quad (3-1)$$

E che quello medio, riferito, cioè, a tutto il sistema, assume l'espressione:

$$Nu = \varphi(Re, Pr) \quad (3-2)$$

dove:

Nu è il numero di Nusselt.

x^* è la posizione adimensionalizzata

Re è il numero di Reynolds

Pr è il numero di Prandtl.

Le funzioni sono ricavate per ogni geometria, o per via sperimentale, o per via numerica.

Nei prossimi paragrafi vedremo il significato fisico di questi numeri adimensionali.

3.2 Il numero di Nusselt.

Consideriamo come esempio un moto esterno dove un corpo qualunque è investito da un fluido in movimento; prendiamo come volume di controllo la superficie del fluido a contatto con il solido.

Applicando il primo principio si ricava che:

$$q_{conv}'' = h(T_p - T_\infty) = -k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (3-3)$$

dove:

h è il coefficiente convettivo.

T_p è la temperatura di parete.

T_∞ è la temperatura del fluido indisturbato.

k è la conduttività del fluido.

Elaborando la (3-3) si ottiene:

$$Nu = \frac{hL_c}{k} = \frac{-\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}}{\frac{T_p - T_\infty}{L_c}} \quad (3-4)$$

dove L_c è una lunghezza caratteristica della geometria considerata. Per esempio per una lastra piana è la sua lunghezza e per un tubo è il diametro. In convezione la lunghezza caratteristica è legata allo sviluppo dello strato limite.

Dalla (3-4) si vede che fisicamente il numero di Nusselt rappresenta il rapporto tra il gradiente di temperatura che ho effettivamente a parete (e che è proporzionale allo scambio termico convettivo) e un gradiente di riferimento.

In definitiva Nusselt è una misura del coefficiente convettivo.

Per comprendere meglio il significato del numero di Nusselt consideriamo una lastra piana investita da una corrente di fluido, come rappresentato in Figura 3-1. Come lunghezza caratteristica prendiamo lo spessore massimo dello strato limite.

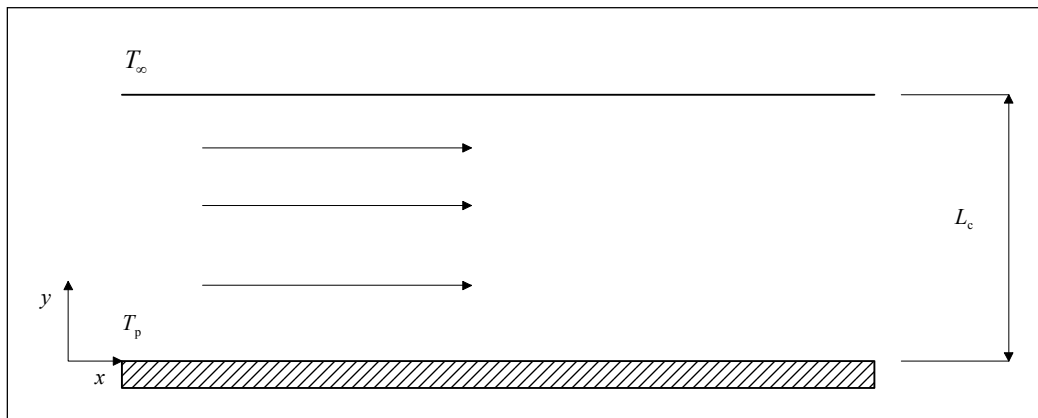


Figura 3-1: Lastra piana.

In questo caso il gradiente di riferimento è proporzionale allo scambio termico conduttivo che avrei se il fluido fosse fermo. Ecco quindi che il numero di Nusselt acquista anche il significato del rapporto tra il flusso convettivo che effettivamente ho nel mio sistema e quello conduttivo che avrei se il fluido fosse fermo.

In base a questa definizione vedo immediatamente che il valore minimo del numero di Nusselt vale 1.

È da notare che formalmente il numero di Nusselt e quello di Biot sono uguali. In realtà i significati fisici sono completamente diversi.

Biot è il rapporto tra la resistenza termica conduttiva interna al corpo e la resistenza termica esterna mentre Nusselt è un rapporto tra flussi termici. Da un punto di vista pratico la differenza sta nel

fatto che per valutare il numero di Biot si considera la conduttività termica del solido, mentre per valutare Nusselt si considera quella del fluido.

3.3 *Il numero di Reynolds.*

Il numero di Reynolds è definito come il rapporto tra le forze d'inerzia e quelle viscosi. Le forze d'inerzia sono uguali alla portata di massa per la velocità. Avremo, quindi, da un punto di vista dimensionale un ordine di grandezza pari a:

$$F_I \approx \rho L_c^2 u u$$

dove:

L_c è una grandezza caratteristica legata allo strato limite dinamico.

u è la velocità del fluido (o del corpo se è questo che si muove).

E per le forze viscosi, partendo dall'equazione di Newton, si ricava la relazione:

$$F_v \approx \mu L_c^2 \frac{u}{L_c} \approx \mu u L_c$$

Quindi il numero di Reynolds vale:

$$Re = \frac{\rho L_c^2 u^2}{\mu u L_c} = \frac{\rho u L_c}{\mu} = \frac{u L_c}{\nu} \quad (3-5)$$

Il numero di Reynolds determina se ci troviamo in flusso laminare o turbolento.

Infatti se Reynolds è minore di un certo valore, **che dipende principalmente dalla geometria del sistema**, le forze viscosi sono sufficientemente grandi da smorzare ogni disturbo che si presenta nel flusso. Sopra un certo valore di Reynolds, invece, le forze d'inerzia sono in grado di amplificare questi disturbi portando il flusso in condizioni turbolente.

3.4 *Il numero di Prandtl.*

Il numero di Prandtl rappresenta la misura dell'efficacia del trasporto di quantità di moto nello strato limite dinamico rispetto a quella della diffusione dell'energia nello strato limite termico.

La sua espressione vale:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu c}{k} \quad (3-6)$$

dove:

ν è la viscosità cinematica del fluido.

α è la diffusività termica del fluido.

μ è la viscosità dinamica del fluido.

c è il calore specifico del fluido.

k è il coefficiente di conduzione del fluido.

Come si può vedere Prandtl dipende esclusivamente da proprietà termofisiche del fluido; pertanto si trova tabellato in funzione della temperatura.

In definitiva il numero di Prandtl esprime il rapporto tra lo spessore dello strato limite dinamico e quello termico.

Se $Pr \ll 1$, come avviene nei metalli liquidi, il trasporto per diffusione è molto più vivace di quello dovuto alla quantità di moto; pertanto lo spessore dello strato limite termico è maggiore di quello dinamico.

Se $Pr \approx 1$, come avviene nei gas, i due fenomeni sono comparabili e quindi gli spessori dei due strati limite sono circa uguali.

Se $Pr \gg 1$, come accade per l'olio o l'acqua, lo spessore dello strato limite dinamico è maggiore di quello termico.

Queste osservazioni si possono riassumere nella relazione:

$$\frac{\delta}{\delta_t} = Pr^n \quad (3-7)$$

dove:

δ è lo spessore dello strato limite dinamico.

δ_t è lo spessore dello strato limite termico.

n è un esponente positivo.

3.5 Teorema di Buckingham

I numeri adimensionali possono venir ricavati, oltre che con l'adimensionalizzazione delle equazioni che reggono il fenomeno, anche con l'analisi dimensionale.

Per comprendere a pieno il problema dell'analisi dimensionale bisogna ricordare il significato di grandezza fisica.

In realtà sarebbe più corretto parlare di entità fisica, di cui la grandezza è una sua proprietà, assieme ad altre come la natura scalare o vettoriale.

La grandezza di un'entità si può esprimere come prodotto tra la sua misura, che è un numero puro, e la sua unità di misura. Al variare dell'unità di misura varia la misura della grandezza.

Ora, essendo l'entità fisica, e quindi la sua grandezza, un invariante, all'aumentare dell'unità di misura diminuisce la sua misura.

In linea di principio potremmo definire un'unità di misura (e quindi un campione) per ogni entità fisica esistente. Oltre al fatto che non tutte le entità sono facilmente misurabili (vedi l'entropia), questo modo di procedere non sarebbe certamente comodo. Per cui si genera un insieme di entità fisiche fondamentali e si ricavano le altre in funzione di queste.

In termini matematici si può scrivere che una qualunque entità A si ricava in funzione di altre tramite una relazione generica del tipo:

$$A = \varphi(A_1, A_2, \dots, A_n) \quad (3-8)$$

La scelta delle unità fondamentali è arbitraria e in base alla loro scelta cambiano le entità derivate.

L'equazione (3-8) dovrebbe essere omogenea, in modo che una variazione di unità di misura comporti solo la moltiplicazione di tutti i termini per una costante numerica.

Si può, quindi, affermare che un'equazione è dimensionalmente omogenea se la sua struttura non dipende dal sistema di misura adottato.

Definite, quindi, le unità fondamentali, quelle derivate si ricavano con l'ausilio di relazioni di definizione.

Lo strumento fondamentale dell'analisi dimensionale è il teorema di Buckingham (o teorema π).

Il teorema di Buckingham afferma che:

Se un'equazione è dimensionalmente omogenea, può venir ridotta nella forma di una relazione fra una serie completa di parametri adimensionali. Il numero di questi parametri è pari alla differenza tra il numero delle entità fisiche che caratterizzano il fenomeno e il numero delle entità fondamentali.

Questa definizione è estremamente comoda ma non sempre vera per quanto concerne il numero dei numeri adimensionali risultanti.

Una definizione più precisa è dovuta a Langhaar:

Il numero dei gruppi adimensionali di una serie completa è pari al numero totale delle variabili meno la caratteristica della loro matrice dimensionale.

Per caratteristica o rango di una matrice s'intende l'ordine massimo dei minori non tutti nulli.

Per chiarire come si applica il teorema di Buckingham consideriamo il caso dello scambio termico in una tubazione circolare con temperatura di parete costante al cui interno scorre un fluido.

Dall'analisi fisica del problema ricaviamo che le grandezze che intervengono sono le seguenti:

Variabile	Simbolo	Eq. dimensionale
Diametro del tubo	D	$[L]$
Conducibilità termica del fluido	k	$[ML\tau^{-3}T^{-1}]$
Velocità del fluido	v	$[L\tau^{-1}]$
Massa volumica del fluido	ρ	$[ML^{-3}]$
Viscosità del fluido	μ	$[ML^{-1}\tau^{-1}]$
Calore specifico a $p=\text{cost}$	c_p	$[L^2\tau^{-2}T^{-1}]$
Coefficiente medio di convezione	h	$[M\tau^{-3}T^{-1}]$

Le grandezze fondamentali sono la massa M , la lunghezza L , il tempo τ e la temperatura T .

Abbiamo, quindi, 7 variabili di cui 4 linearmente indipendenti. In definitiva dovremmo ricavare 3 gruppi adimensionali.

Per determinarli esprimiamo il generico gruppo in funzione delle 7 grandezze.

$$\pi = D^a k^b v^c \rho^d \mu^e c_p^f h^g$$

Si sostituiscono, poi, le espressioni dimensionali

$$\pi = [L]^a [ML\tau^{-3}T^{-1}]^b [L\tau^{-1}]^c [ML^{-3}]^d [ML^{-1}\tau^{-1}]^e [L^2\tau^{-2}T^{-1}]^f [M\tau^{-3}T^{-1}]^g$$

Affinché π sia adimensionale la somma degli esponenti cui è elevata ciascuna delle grandezze fondamentali deve essere uguale a 0.

$$\begin{cases} 0a + 1b + 0c + 1d + 1e + 0f + 1g &= 0 & \text{per } M \\ 1a + 1b + 1c - 3d - 1e + 2f + 0g &= 0 & \text{per } L \\ 0a - 3b - 1c + 0d - 1e - 2f - 3g &= 0 & \text{per } \tau \\ 0a - 1b + 0c + 0d + 0e - 1f - 1g &= 0 & \text{per } T \end{cases}$$

Otengo, quindi, ∞^3 gruppi adimensionali.

A mio piacere fisso i valori di 3 esponenti e risolvo il sistema, ottenendo così, tre gruppi adimensionali. Di questi gruppi ne posso ottenere infiniti. Ci vuole, quindi, una certa esperienza per ottenere dei gruppi che abbiano un senso fisico.

Esiste, però, un metodo che semplifica l'operazione: è il metodo delle variabili ripetute. Si scelgono delle variabili in numero pari alle variabili linearmente indipendenti del problema, assicurandosi che in esse compaiano tutte le n variabili linearmente indipendenti.

Inoltre bisogna verificare che le variabili scelte siano tra loro indipendenti.

Nel nostro caso scegliamo le 4 variabili k , D , μ , ρ e le eleviamo a 4 esponenti incogniti a, b, c, d .

Affinché le variabili siano indipendenti l'equazione dimensionale:

$$k^a D^b \mu^c \rho^d = [M^0 L^0 \tau^0 T^0]$$

deve avere come unica soluzione quella banale.

Nel nostro caso:

$$M^a L^a \tau^{3a} T^a L^b M^c L^{-c} \tau^c M^d L^{-3d} = M^0 L^0 T^0 \theta^0$$

Cioè

$$\begin{array}{ll} \text{Per } M & 1a + 0b + 1c + 1d = 0 \\ \text{Per } L & 1a + 1b - 1c - 3d = 0 \\ \text{Per } \tau & -3a + 0b - 1c + 0d = 0 \\ \text{Per } T & -1a + 0b - 1c - 3d = 0 \end{array}$$

Che porta effettivamente alla soluzione banale:

$$a = b = c = d = 0$$

I 3 numeri adimensionali saranno:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= k^a D^b \mu^c \rho^d h \\ \pi_2 &= k^a D^b \mu^c \rho^d v \\ \pi_3 &= k^a D^b \mu^c \rho^d c_p \end{aligned}$$

Troviamo ora π_1 .

$$\begin{array}{ll} \text{Per } M & 1a + 0b + 1c + 1d = -1 \\ \text{Per } L & 1a + 1b - 1c - 3d = 0 \\ \text{Per } \tau & -3a + 0b - 1c + 0d = 3 \\ \text{Per } T & -1a + 0b + 0c + 0d = 1 \end{array}$$

La soluzione di questo sistema è

$$a = -1 \qquad b = 1 \qquad c = 0 \qquad d = 0$$

Che porta al numero di Nusselt:

$$\pi_1 = Nu = \frac{Dh}{k}$$

Troviamo ora π_2

$$\begin{array}{ll} \text{Per } M & 1a + 0b + 1c + 1d = 0 \\ \text{Per } L & 1a + 1b - 1c - 3d = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Per } \tau & -3a + 0b - 1c - 0d = 1 \\ \text{Per } T & -1a + 0b + 0c + 0d = 0 \end{array}$$

La soluzione di questo sistema è

$$a = 0 \qquad b = 1 \qquad c = -1 \qquad d = 1$$

Che porta al numero Reynolds:

$$\pi_2 = Re = \frac{D\rho v}{\mu}$$

Troviamo π_3

$$\begin{array}{ll} \text{Per } M & 1a + 0b + 1c + 1d = 0 \\ \text{Per } L & 1a + 1b - 1c - 2d = -2 \\ \text{Per } \tau & -3a + 0b - 1c + 0d = 2 \\ \text{Per } T & -1a + 0b + 0c + 0d = 1 \end{array}$$

La soluzione di questo sistema è

$$a = -1 \qquad b = 0 \qquad c = 1 \qquad d = 0$$

Che porta al numero di Prandtl

$$\pi_3 = Pr = \frac{\mu c_p}{k} = \frac{\nu}{\alpha}$$

3.6 **Convezione forzata in moti esterni.**

3.6.1 Introduzione.

La convezione forzata con deflusso esterno interviene in moltissimi casi pratici, ad esempio:

- moto su lastra piana a vari angoli d'incidenza.
- moto su profili aerodinamici.
- moto su cilindri.
- moto su sfere.
- moto su superfici alettate o corrugate.

Purtroppo la soluzione analitica di tali problemi è possibile solo per casi estremamente semplici. Per ricavare, allora, la funzione che compare nelle (3-1) e (3-2) si ricorre ad indagini sperimentali o numeriche.

Una volta ricavato il coefficiente convettivo h dal numero di Nusselt, si può calcolare il flusso termico con la formula di Newton:

$$q'' = h(T_p - T_\infty) \quad (3-9)$$

Dove.

T_p è la temperatura della parete

T_∞ è la cosiddetta temperatura indisturbata a monte che corrisponde alla temperatura che avrebbe il fluido senza la presenza del corpo.

Nella stessa maniera si definisce una velocità indisturbata a monte, u_∞ , che si utilizza per valutare il numero di Reynolds.

3.6.2 Lastra piana con deflusso parallelo.

Consideriamo il moto di un fluido incompressibile a proprietà termofisiche costanti che si muove parallelamente ad una lastra piana. La situazione è descritta in Figura 3-2.

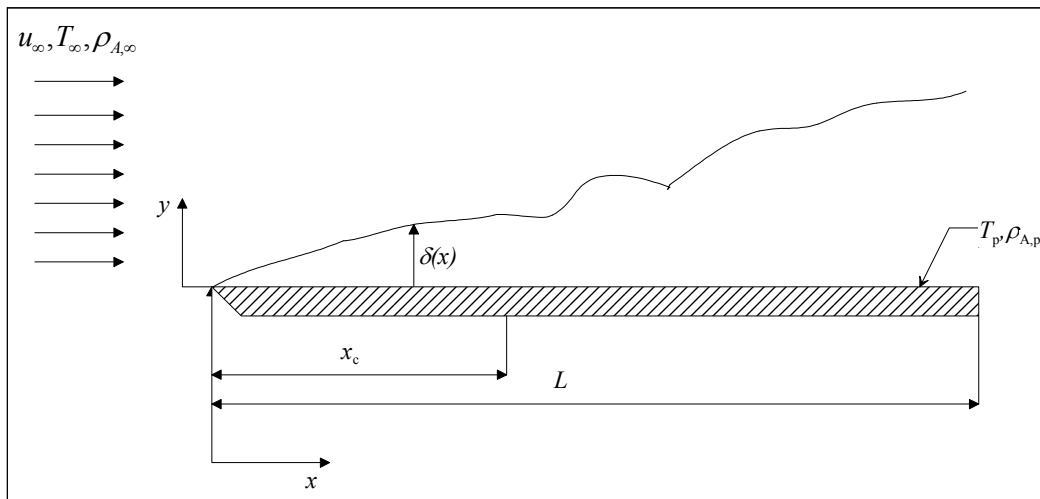


Figura 3-2: deflusso parallelo su lastra piana.

Lo strato limite si mantiene laminare fino ad una distanza critica dal bordo d'ingresso, x_c .

Il moto da questo punto in poi comincerà a diventare turbolento. Questo avviene per un numero di Reynolds critico superiore a:

$$Re_x > 5 \times 10^5$$

Nella zona turbolenta vicino alla parete il moto rimane comunque laminare; questa zona viene definita sottostrato laminare.

Nella zona laminare il Nusselt locale vale:

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k} = 0,332 Re_x^{0,5} Pr^{0,33} \quad Pr \geq 0,6 \quad (3-10)$$

Il valore medio di h , riferito ad una lunghezza L , è pari a:

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{k}{x} Nu_x dx = \frac{k}{L} 0,664 Re_L^{0,5} Pr^{0,33} \quad Pr \geq 0,6$$

da cui si ricava:

$$\overline{Nu} = \frac{\overline{h}L}{k} = 0,664 Re_L^{0,5} Pr^{0,33} \quad Pr \geq 0,6 \quad (3-11)$$

Nella regione turbolenta il numero di Nusselt locale vale:

$$Nu_x = 0,0296 Re^{0,8} Pr^{0,33} \quad (3-12)$$

Per valutare il valore medio di Nusselt bisogna tener conto che fino a x_c il flusso è laminare, pertanto:

$$\overline{h} = \frac{1}{L} \left(\int_0^{x_c} \frac{k}{x} Nu_{x,lam} dx + \int_{x_c}^L \frac{k}{x} Nu_{x,tur} dx \right) \quad (3-13)$$

che da come risultato:

$$\overline{Nu} = (0,037 Re_L^{0,8} - 871) Pr^{0,33} \quad (3-14)$$

La (3-14) è valida nelle seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} 0,6 &\leq Pr \leq 60 \\ 5 \times 10^5 &\leq Re_L \leq 10^8 \\ Re_{x_c} &= 5 \times 10^5 \end{aligned}$$

In letteratura esistono poi molte altre correlazioni al variare del numero di Reynolds e di quello di Prandtl.

La domanda che dovrebbe a questo punto sorgere spontanea è: a quale temperatura vanno valutate le proprietà termofisiche dato che la temperatura varia nello strato limite?

La risposta è che dovremmo usare la temperatura utilizzata dallo sperimentatore per ricavare le correlazioni. Di solito, se non vi sono indicazioni contrarie, si utilizza la temperatura di film definita come:

$$T_f = \frac{T_p + T_\infty}{2} \quad (3-15)$$

Esempio 3-1

Dell'acqua a una temperatura $t_\infty = 15^\circ C$, scorre sopra una lastra piana riscaldata di lunghezza 2 m, mantenuta ad una temperatura costante pari a $t_p = 55^\circ C$. La velocità dell'acqua è uguale a $u_\infty = 3 \frac{m}{s}$. Supponendo che la piastra sia sufficientemente larga per poter sopportare il moto bidimensionale, trovare la potenza termica per unità di larghezza assorbita dall'acqua.

Svolgimento

Per prima cosa bisogna trovare le proprietà termofisiche dell'acqua.

Queste proprietà vengono valutate alla temperatura di film

$$t_f = \frac{t_p + t_\infty}{2} = 35^\circ \text{C}$$

Dalle tabelle si ricava:

$$\rho = 994 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad c_p = 4,178 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \quad k = 0,625 \frac{\text{W}}{\text{mK}} \quad \mu = 7,22 \cdot 10^{-4} \frac{\text{kg}}{\text{m s}} \quad \nu = 7,27 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad Pr = 4,83$$

Fissando il valore del numero di Reynolds critico uguale a $5 \cdot 10^5$ si ricava che la distanza critica dal bordo d'ingresso vale:

$$x_c = \frac{\nu}{u_\infty} Re_c = \frac{7,27 \cdot 10^{-7}}{3} \cdot 5 \cdot 10^5 = 0,121 \text{ m}$$

Quindi il flusso d'acqua attraversando la lastra piana subisce la transizione da laminare a turbolento

Si applica, allora, l'equazione (3-14)

Il numero di Reynolds al bordo d'uscita vale

$$Re = \frac{uL}{\nu} = \frac{3 \cdot 2}{7,27 \cdot 10^{-7}} = 8,25 \cdot 10^6$$

Quindi

$$\overline{Nu} = (0,037 Re_L^{0,8} - 871) Pr^{0,33} = 19778$$

Il valore del coefficiente convettivo medio vale:

$$\bar{h} = \frac{k}{L} \overline{Nu} = 6181 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} = 6,181 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

La potenza termica per unità di larghezza è uguale a:

$$\frac{\dot{q}}{w} = \bar{h} L (t_p - t_\infty) = 494,5 \frac{\text{kW}}{\text{m}}$$

3.6.3 Deflusso su superfici curve e cilindriche.

Il problema del deflusso su una superficie curva è ben più complesso di quello su una lastra piana.

Infatti, se prendiamo un volume di controllo come quello raffigurato in Figura 3-3, si vede che per la conservazione della massa la velocità prima aumenta fino a raggiungere un massimo dove la sezione è più stretta e poi diminuisce fino a riportarsi alla u_∞ .

Ora, se la velocità aumenta, per il teorema di Bernoulli la pressione diminuisce. Pertanto nella zona che va dal bordo d'ingresso al massimo spessore del profilo avremo un gradiente di pressione negativo, mentre dopo il punto di massimo spessore avremo un gradiente positivo (vedi Figura 3-4). Questo significa che nella prima zona il gradiente negativo favorisce il flusso mantenendo più contenuto lo spessore dello strato limite dinamico. Nella zona, invece, in cui il gradiente di

pressione è positivo il flusso sarà contrastato da questo aumento di pressione e i profili di velocità all'interno dello strato limite si deformeranno fino ad arrivare al punto che si genererà una corrente inversa che provocherà il distacco dello strato limite e la formazione della scia in cui la pressione sarà mediamente uguale a quella atmosferica. Questo fenomeno genera la cosiddetta resistenza di forma che di solito è preponderante rispetto alla resistenza viscosa.

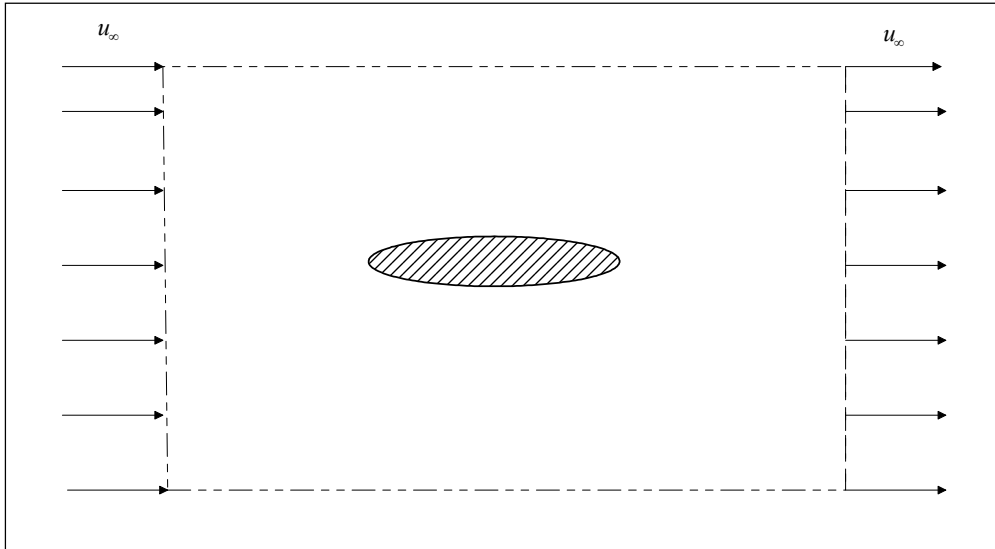


Figura 3-3: Volume di controllo attorno ad una superficie curva.

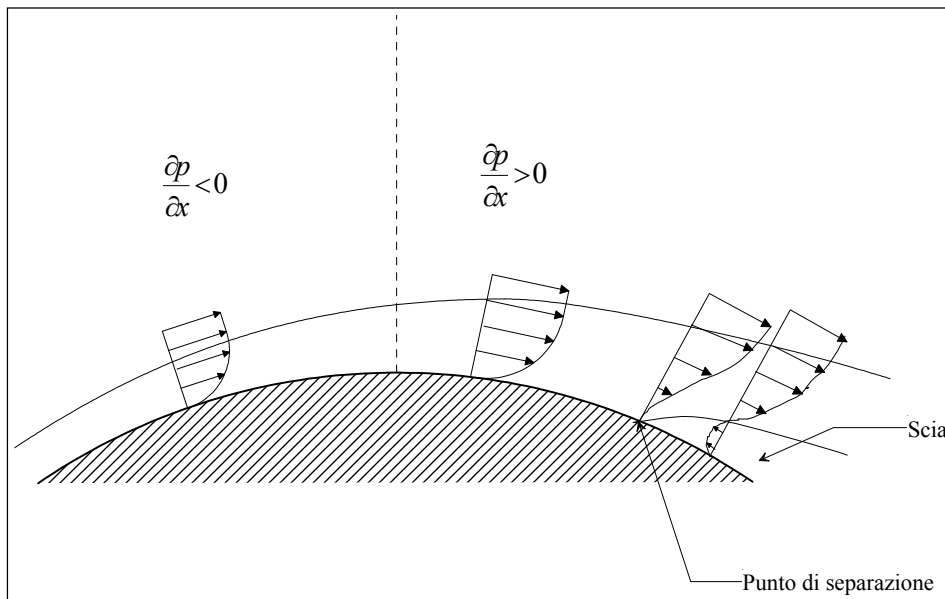


Figura 3-4: Flusso su superficie curva.

Nei cilindri la situazione è ovviamente analoga. Di norma il numero di Reynolds viene valutato sul diametro:

$$Re_D = \frac{u_\infty D}{\nu} \quad (3-16)$$

Come si osserva in Figura 3-5 lo strato limite ha lo spessore minimo nel punto di ristagno ($\theta = 0$). Poi lo strato incomincia ad inspessirsi rimanendo laminare; per un angolo compreso tra 80° e 85° avviene la separazione dello strato limite, con la formazione di una scia consistente.

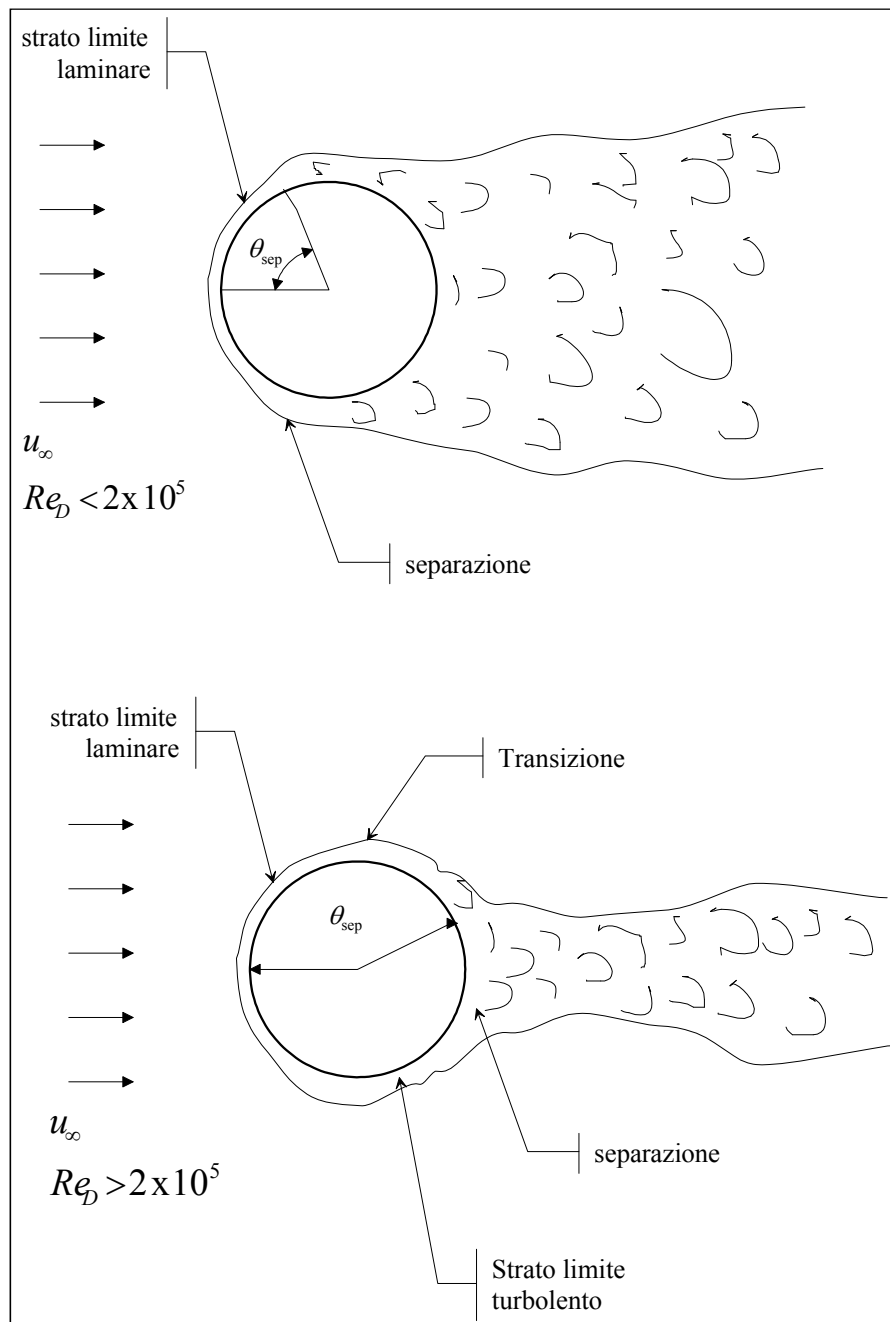


Figura 3-5: Strato limite attorno ad un cilindro.

Aumentando il numero di Reynolds lo strato limite viene energizzato al punto che per un certo valore del numero di Reynolds, definito Reynolds critico, la separazione si sposta nella parte posteriore del cilindro. L'angolo di separazione assume un valore dell'ordine dei 140° . Il valore di Reynolds critico vale mediamente $Re_{Dc} = 2 \times 10^5$ (dipende dalla turbolenza della corrente e dalla rugosità della superficie). Per valori superiori al numero di Reynolds critico lo strato limite rimane laminare fino a circa 80° , poi incomincia la zona di transizione finché lo strato limite diviene turbolento. A circa 140° vi è la separazione.

Poiché lo strato limite termico è legato a quello dinamico la trasmissione termica dipenderà dall'andamento dello strato limite.

Ricordando quanto detto a riguardo del numero di Nusselt, lo scambio termico dipende dal gradiente di temperatura; Nusselt diminuisce all'aumentare dello spessore dello strato limite.

Pertanto se il numero di Reynolds è minore di quello critico accade che Nusselt diminuisce fino al punto di separazione. Poi, a causa della forte turbolenza presente in scia, tende ad aumentare, fino al punto di ristagno posteriore, mantenendosi, però inferiore al numero di Nusselt presente nella parte anteriore del cilindro a causa del fatto che la turbolenza tende a ricircolare il fluido vicino alla parete.

Se, invece, il numero di Reynolds è superiore a quello critico, Nusselt diminuisce fino al punto di transizione; poi bruscamente aumenta fino a raggiungere un massimo quando il flusso diventa completamente turbolento. Successivamente il numero di Nusselt tende a diminuire a causa dell'ispessimento dello strato limite fino a raggiungere un minimo nel punto di separazione per poi tornare ad aumentare a causa del forte rimescolamento dovuto alla alta turbolenza.

In Figura 3-6 è visibile l'andamento del numero di Nusselt in funzione dell'angolo e del numero di Reynolds.

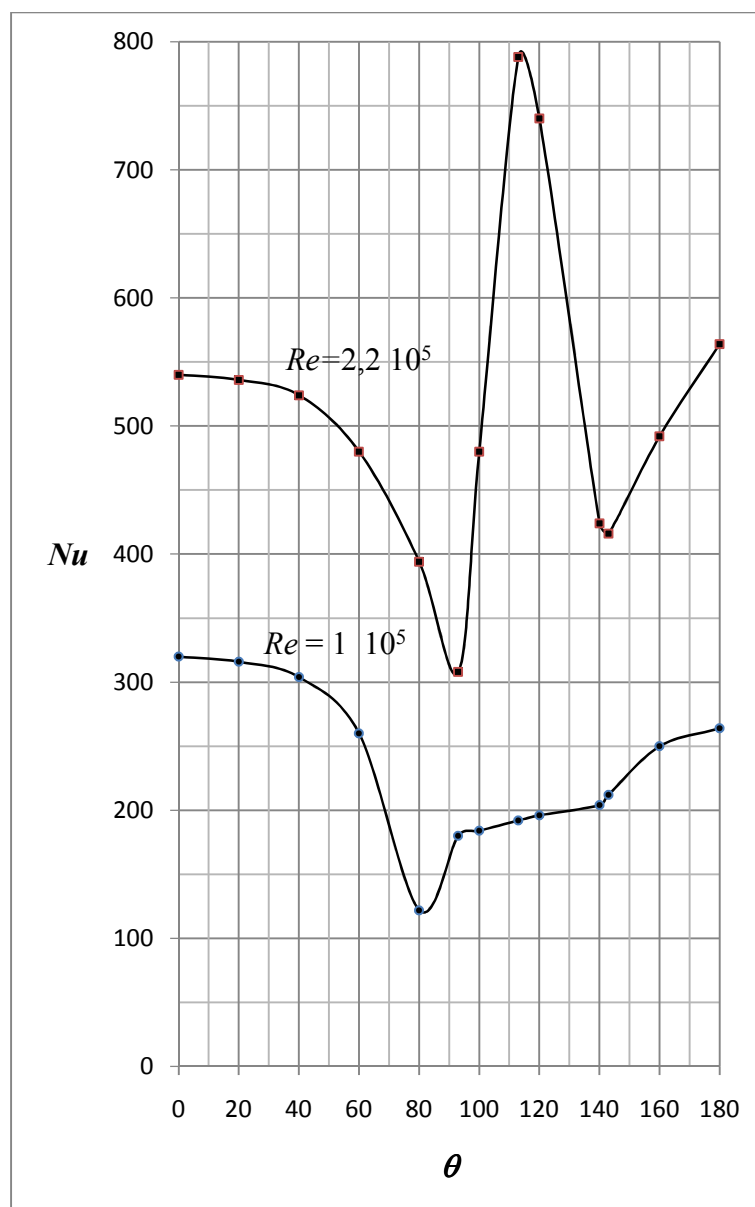


Figura 3-6: Andamento del numero di Nusselt in funzione dell'angolo e del numero di Reynolds in un cilindro investito trasversalmente da un fluido.

Per valutare il valore medio del numero di Nusselt esistono varie correlazioni. Una fra le più usate è quella di Churchill & Bernstein perché è caratterizzata da un ampio range di validità.

$$\overline{Nu} = 0,3 + \frac{0,62 Re_D^{0,5} Pr^{0,33}}{\left[1 + \left(\frac{0,4}{Pr}\right)^{0,66}\right]^{0,25}} \left[1 + \left(\frac{Re_D}{28200}\right)^{0,625}\right]^{0,8} \quad Re_D Pr > 0,2 \quad (3-17)$$

Esempio 3-2

Un tubo di diametro esterno $D = 1 \text{ m}$ in cui scorre del vapore saturo è investito trasversalmente da un vento che soffia ad una velocità, u_∞ , uguale a $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ e con una temperatura t_∞ pari a -5°C .

Valutare la potenza termica dispersa per unità di lunghezza della tubazione, considerando la temperatura superficiale del tubo, t_p , uguale a 45°C .

Svolgimento

Le proprietà termofisiche dell'aria vanno valutate alla $t_f = 20^\circ \text{C}$.

$$\rho = 1,193 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad c_p = 1,007 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \quad k = 0,0258 \frac{\text{W}}{\text{mK}} \quad \mu = 1,81 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m s}} \quad \nu = 1,52 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad Pr = 0,709$$

La velocità dell'aria in unità SI è uguale a:

$$u_\infty = 27,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

E il Numero di Reynolds:

$$Re = \frac{u_\infty D}{\nu} = \frac{27,8 \cdot 1}{1,52 \cdot 10^{-5}} = 1,83 \cdot 10^6$$

Si può quindi utilizzare la correlazione (3-17).

$$\overline{Nu} = 0,3 + \frac{0,62 Re_D^{0,5} Pr^{0,33}}{\left[1 + \left(\frac{0,4}{Pr}\right)^{0,66}\right]^{0,25}} \left[1 + \left(\frac{Re_D}{28200}\right)^{0,625}\right]^{0,8} = 5267$$

Il valore del coefficiente convettivo medio vale:

$$\bar{h} = \frac{k}{D} \overline{Nu} = 136 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

La potenza termica per unità di larghezza è uguale a:

$$\frac{\dot{q}}{L} = \bar{h} \pi D (t_p - t_\infty) = 21,4 \frac{kW}{m}$$

3.6.4 Banchi di tubi investiti ortogonalmente

Consideriamo un fluido che investe trasversalmente un banco formato da N tubi disposti in N_L colonne formate ognuna da N_T tubi.

La distribuzione dei tubi può essere allineata, come rappresentato in Figura 3-7, o sfalsata (staggered), come rappresentato in Figura 3-8.

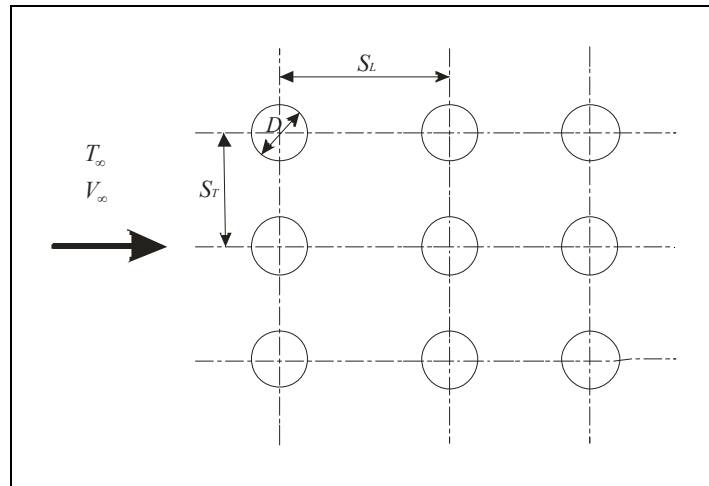


Figura 3-7: Banco di tubi allineati

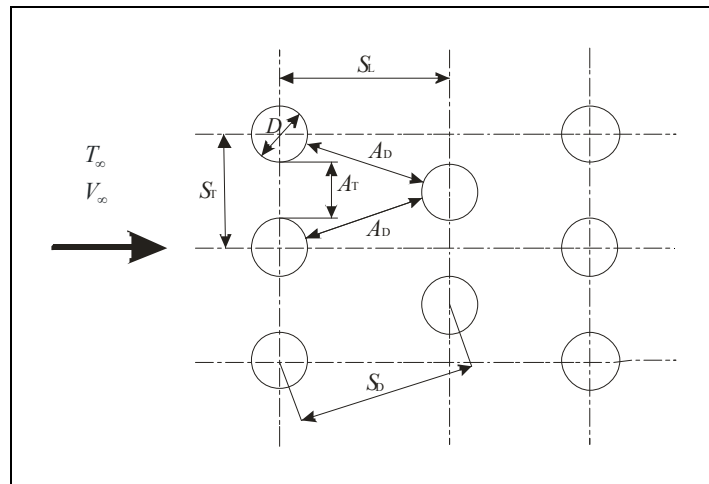


Figura 3-8: Banco di tubi sfalsati (staggered)

Nel primo caso i tubi presentano un passo trasversale, S_T , e uno longitudinale, S_L , mentre nel secondo caso vi è anche un passo diagonale, S_D , che rappresenta la distanza tra i centri di due tubi sfalsati posti su file adiacenti.

Quando il fluido investe la prima fila di tubi, si genera uno strato limite attorno ad ogni tubo simile a quello che si forma su un cilindro isolato. La scia investe la fila successiva. Essendo il moto particolarmente turbolento a causa della presenza della fila precedente, il numero di Nusselt locale risulta maggiore e tende ad aumentare passando alle file successive, finché, dopo 4, 5 file, tende a stabilizzarsi.

La velocità del fluido varia nell'attraversamento del banco di tubi. Il numero di Reynolds viene valutato in base alla velocità massima, V_{MAX} , che è localizzata nella sezione minima di passaggio. Nel caso di tubi allineati la sezione minima è quella trasversale. Per la conservazione della massa la V_{MAX} è uguale a:

$$V_{MAX} = \frac{S_T}{S_T - D} V_\infty$$

Nel caso di tubi sfalsati il problema è più complesso. Come si può osservare in Figura 3-8, il flusso dopo aver attraversato la sezione A_T , di area per unità di larghezza dello scambiatore $S_T - D$, si divide in due flussi che attraversano le due aree A_D di sezione $S_D - D$.

Pertanto per calcolare la velocità massima bisogna valutare qual è la sezione minima. La velocità sarà massima nell'attraversamento della sezione A_D se:

$$2A_D < A_T$$

cioè se:

$$2(S_D - D) < S_T - D \quad (3-18)$$

Ma:

$$S_D = \sqrt{S_L^2 + \left(\frac{S_T}{2}\right)^2}$$

Pertanto la (3-18) è verificata se:

$$S_D = \sqrt{S_L^2 + \left(\frac{S_T}{2}\right)^2} < \frac{S_T + D}{2}$$

In questo caso:

$$V_{MAX} = \frac{S_T}{2(S_D - D)} V_\infty$$

Calcolata la V_{MAX} , si può valutare il numero di Reynolds. Le proprietà termofisiche vengono valutate alla temperatura di film $T_{film} = \frac{T_s + T_\infty}{2}$. Se si conoscono le temperature d'ingresso e di

uscita dei due fluidi si può valutare la temperatura di film con le temperature medie.

Esistono molte correlazioni; fra le più usate è la correlazione di Grimson che vale per banchi di tubi con più di 10 file:

$$\begin{aligned} \overline{Nu}_D &= 1,13 C Re_{D,MAX}^m Pr^{\frac{1}{3}} \\ N_L &> 10 \\ 2000 &< Re_{D,MAX} < 40000 \\ Pr &\geq 0,7 \end{aligned} \quad (3-19)$$

Le costanti C e m sono riportate in Tabella 3-1.

Se N_L è minore di 10 Kays e Lo hanno valutato il coefficiente correttivo disponibile in Tabella 3-2.

$\frac{S_L}{D}$	$\frac{S_T}{D}$							
	1,25		1,50		2,00		3,00	
	C	m	C	m	C	m	C	m
Tubi allineati								
1,25	0,348	0,592	0,275	0,608	0,100	0,704	0,0633	0,752
1,50	0,367	0,586	0,250	0,620	0,101	0,702	0,0678	0,744
2,00	0,418	0,570	0,299	0,602	0,229	0,632	0,198	0,648
3,00	0,290	0,601	0,357	0,584	0,374	0,581	0,286	0,608
Tubi sfalsati								
0,600							0,213	0,636
0,900					0,446	0,571	0,401	0,581
1,000			0,497	0,558				
1,125					0,478	0,565	0,518	0,560
1,250	0,518	0,556	0,505	0,554	0,519	0,556	0,522	0,562
1,500	0,451	0,568	0,460	0,562	0,452	0,568	0,488	0,568
2,000	0,404	0,572	0,416	0,568	0,482	0,556	0,449	0,570
3,000	0,310	0,592	0,356	0,580	0,440	0,562	0,421	0,574

Tabella 3-1: Costanti della correlazione di Grimson in funzione dei passi dei tubi.

	Numero di tubi								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Allineati	0,68	0,75	0,83	0,89	0,92	0,95	0,97	0,98	0,99
Sfalsati	0,64	0,80	0,87	0,90	0,92	0,94	0,96	0,98	0,99

Tabella 3-2: Rapporto $\frac{\bar{h}}{\bar{h}_{10}}$

Zhukauskas propone, invece, altre correlazioni in cui le proprietà termofisiche sono valutate alla temperatura T_∞ . Le correlazioni vengono, poi corrette in funzione della temperatura media della superficie esterna dei tubi. Zhukauskas suggerisce come fattore di correzione il rapporto, elevato ad una costante che varia in funzione della temperatura, tra il numero di Prandtl, valutato alla temperatura T_∞ e quello valutato alla temperatura di parete del tubo. Utilizzando come esponente il valore 0,25 si ottengono comunque risultati accettabili, sia per i tubi allineati, sia per quelli sfalsati. Zhukauskas propone le seguenti correlazioni valide per $N_L > 20$:

$$100 \leq Re_D \leq 10^3$$

$$\overline{Nu}_D = 0,52 Re_D^{0,5} Pr^{0,36} \left(\frac{Pr}{Pr_s} \right)^{0,25} \quad \text{tubi allineati}$$

$$\overline{Nu}_D = 0,71 Re_D^{0,5} Pr^{0,36} \left(\frac{Pr}{Pr_s} \right)^{0,25} \quad \text{tubi sfalsati}$$

$$10^3 < Re_D \leq 2 \cdot 10^5$$

$$\overline{Nu}_D = 0,27 Re_D^{0,63} Pr^{0,36} \left(\frac{Pr}{Pr_s} \right)^{0,25} \quad \text{tubi allineati} \quad \frac{S_T}{S_L} \geq 0,7$$

$$\overline{Nu}_D = 0,35 \left(\frac{S_T}{S_L} \right)^{0,2} Re_D^{0,6} Pr^{0,36} \left(\frac{Pr}{Pr_s} \right)^{0,25} \quad \text{tubi sfalsati} \quad \frac{S_T}{S_L} \leq 2$$

$$\overline{Nu}_D = 0,40 Re_D^{0,6} Pr^{0,36} \left(\frac{Pr}{Pr_s} \right)^{0,25} \quad \text{tubi sfalsati} \quad \frac{S_T}{S_L} > 2$$

Nel caso di tubi allineati con $\frac{S_T}{S_L} < 0,7$, l'efficienza decade notevolmente per cui questa geometria non viene utilizzata.

$$Re_D \geq 2 \cdot 10^5$$

$$\overline{Nu}_D = 0,033 Re_D^{0,8} Pr^{0,36} \left(\frac{Pr}{Pr_s} \right)^{0,25} \quad \text{tubi allineati}$$

$$\overline{Nu}_D = 0,027 \left(\frac{S_T}{S_L} \right)^{0,2} Re_D^{0,8} Pr^{0,36} \left(\frac{Pr}{Pr_s} \right)^{0,25} \quad \text{tubi sfalsati} \quad Pr = 0,7$$

$$\overline{Nu}_D = 0,031 \left(\frac{S_T}{S_L} \right)^{0,2} Re_D^{0,8} Pr^{0,36} \left(\frac{Pr}{Pr_s} \right)^{0,25} \quad \text{tubi sfalsati} \quad Pr > 1$$

Se le file di tubi sono minori di 20 il numero di Nusselt va moltiplicato con un coefficiente dato in Figura 3-9.

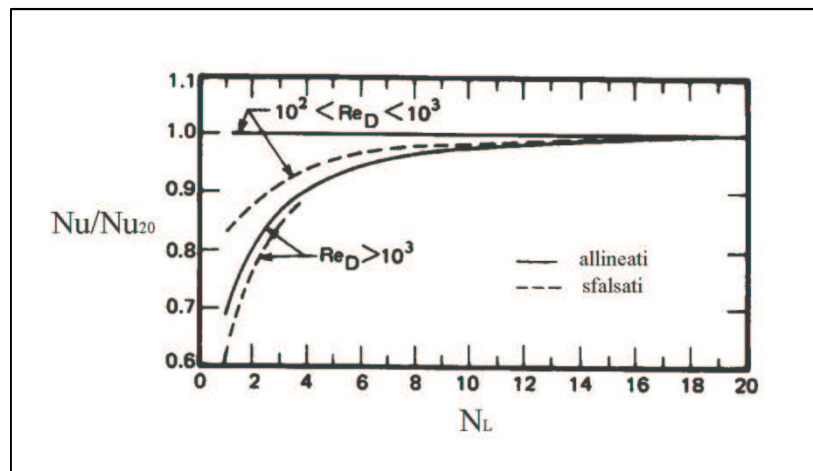


Figura3-9: Fattore di correzione del numero di Nusselt in funzione del numero di file

Una volta valutato il numero di Nusselt, e, quindi, il coefficiente di scambio termico medio, per ottenere la potenza media scambiata si deve applicare la formula di Newton. Se nell'attraversamento del banco di tubi si genera una notevole differenza tra la temperatura in

ingresso e quella in uscita dallo scambiatore, accade che utilizzando come salto termico $T_s - T_\infty$, in cui T_s è la temperatura della prima fila di tubi, si tende a sovrastimare lo scambio termico. Nel capitolo 5 dimostreremo che in questi casi conviene utilizzare la temperatura media logaritmica, definita come:

$$\Delta T_{ml} = \frac{(T_s - T_i) - (T_s - T_u)}{\ln \frac{T_s - T_i}{T_s - T_u}}$$

Dove:

T_s è la temperatura media di parete dei tubi

T_i è la temperatura del fluido all'ingresso del banco di tubi

T_u è la temperatura del fluido all'uscita del banco di tubi

Si può dimostrare che T_u vale:

$$\frac{T_s - T_u}{T_s - T_i} = e^{-\left(\frac{\pi D N \bar{h}}{\rho V N_T S_T c_p}\right)}$$

Quindi la potenza scambiata per unità di larghezza del banco di tubi vale:

$$q' = N \pi D \bar{h} \Delta T_{ml}$$

3.7 Convezione forzata in moti interni.

Dal punto di vista fluidodinamico la situazione nei moti interni è completamente differente da quella dei deflussi esterni.

Pertanto le correlazioni saranno completamente diverse.

Sarà importante distinguere la zona in cui il moto è completamente sviluppato da quella d'imbocco, in cui, come abbiamo visto nella prima parte del corso, si sviluppano sia lo strato limite dinamico, che quello termico.

In Figura 3-10 si può osservare lo sviluppo dello strato limite termico.

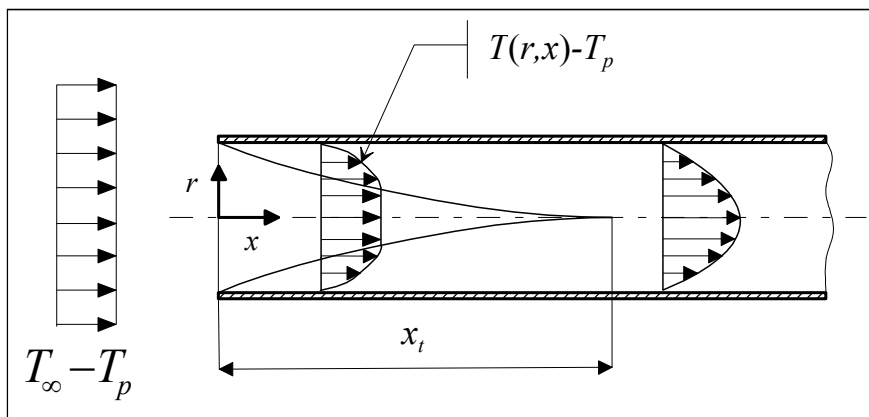


Figura 3-10: Sviluppo dello strato limite termico.

La lunghezza x_t è definita come la distanza dal bordo d'ingresso per la quale il numero di Nusselt differisce del 5% dal valore corrispondente al regime termico completamente sviluppato.

In regime laminare x_t vale:

$$\text{Temperatura di parete assegnata: } \frac{x_t}{D} = 0.033 Re_D Pr$$

$$\text{Flusso termico a parete imposto: } \frac{x_t}{D} = 0.043 Re_D Pr$$

Noi considereremo solo le condizioni di regime sviluppato, poiché sono quelle tecnicamente più comuni.

Il problema più importante è quello di definire la temperatura del fluido da introdurre nella equazione di Newton. Come si vede dalla Figura 3-10, la temperatura varia da quella di parete alla temperatura massima. **Si considera temperatura media quella che darebbe lo stesso contenuto entalpico della sezione considerata.** Questa temperatura viene chiamata Temperatura media di massa o temperatura di mescolamento in tazza, in quanto sarebbe la temperatura che assumerebbe il fluido dopo un certo tempo, se fosse raccolto e mescolato in un recipiente (in inglese si parla di Bulk Temperature o Mixing Cup Temperature).

Quindi la temperatura media di massa è definita come:

$$T_m = \frac{\int_{A_c} \rho u c_p T dA_c}{\dot{m} c_p} \quad (3-20)$$

Nel caso molto comune di fluido incomprimibile in moto in un condotto a sezione circolare, detta u_m la velocità media e, supponendo c_p costante, la (3-20) si semplifica nella:

$$T_m = \frac{2}{u_m r_0^2} \int_0^{r_0} u T r dr$$

Per i moti interni il flusso termico si calcola con l'equazione:

$$q'' = h(T_p - T_m) \quad (3-21)$$

Bisogna osservare che, mentre nei moti esterni T_∞ rimane costante lungo l'estensione del corpo, nei moti interni T_m varia lungo il sistema.

3.7.1 Bilancio di energia in moto interno completamente sviluppato.

Consideriamo il flusso che scorre in una tubazione.

Sia che le condizioni al contorno siano di flusso termico costante, sia di temperatura costante, la temperatura del fluido continuerà a modificarsi lungo l'asse della tubazione.

A prima vista sembrerebbe, quindi, che non sia mai possibile raggiungere una condizione di pieno sviluppo in cui la grandezza considerata (nel nostro caso la temperatura) non è più funzione della x .

Si potrebbe dimostrare che, se al posto della temperatura effettiva consideriamo la temperatura adimensionalizzata

$$\theta^* = \frac{T_p - T}{T_p - T_m}$$

dove:

T_p è la temperatura della parete interna della tubazione

T è la temperatura locale del fluido

T_m è la temperatura di bulk

si giunge effettivamente alla relazione

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{T_p - T}{T_p - T_m} \right) = 0 \quad (3-22)$$

La relazione (3-22) rappresenta il corrispettivo della relazione $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ che indica la condizione di pieno sviluppo per lo strato limite dinamico.

Quindi, se consideriamo delle condizioni di simmetria assialsimmetrica, θ^* dipenderà solo dal raggio della tubazione. Si può, quindi, scrivere che:

$$\frac{d\theta^*}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{T_p - T}{T_p - T_m} \right) = -\frac{1}{T_p - T_m} \frac{dT}{dr} \neq f(x) \quad (3-23)$$

Valutiamo la (3-23) a parete, dove $r = R$.

Dalla legge di Fourier è possibile scrivere che:

$$q'' = -k \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R}$$

Per la legge di Newton si ricava, invece, che

$$q'' = h(T_m - T_p)$$

Da ciò si vede, sostituendo le relazioni appena ottenute nella (3-23), che:

$$-\frac{h}{k} \neq f(x)$$

In definitiva abbiamo appena dimostrato che in condizioni di pieno sviluppo e con proprietà termofisiche costanti, il coefficiente convettivo non varia lungo l'asse della tubazione.

Per calcolare il flusso termico locale è necessario ricavare la legge di variazione della temperatura media lungo l'asse della tubazione.

Per ricavare tale legge opereremo nel solito modo.

- Definiremo un volume di controllo infinitesimo.
- Eseguiamo un bilancio di energia, ricavando un'equazione differenziale.

- Integreremo questa equazione differenziale su tutta la lunghezza, L , della tubazione, imponendo le condizioni al contorno. Come condizioni al contorno considereremo la condizione di flusso a parete costante, e di temperatura di parete costante.

3.7.1.1 Bilancio di energia

Consideriamo una tubazione dove scorre una portata di fluido $\dot{m}$.

In Figura 3-11 è rappresentato il volume di controllo infinitesimo di lunghezza dx su cui si esegue il bilancio.

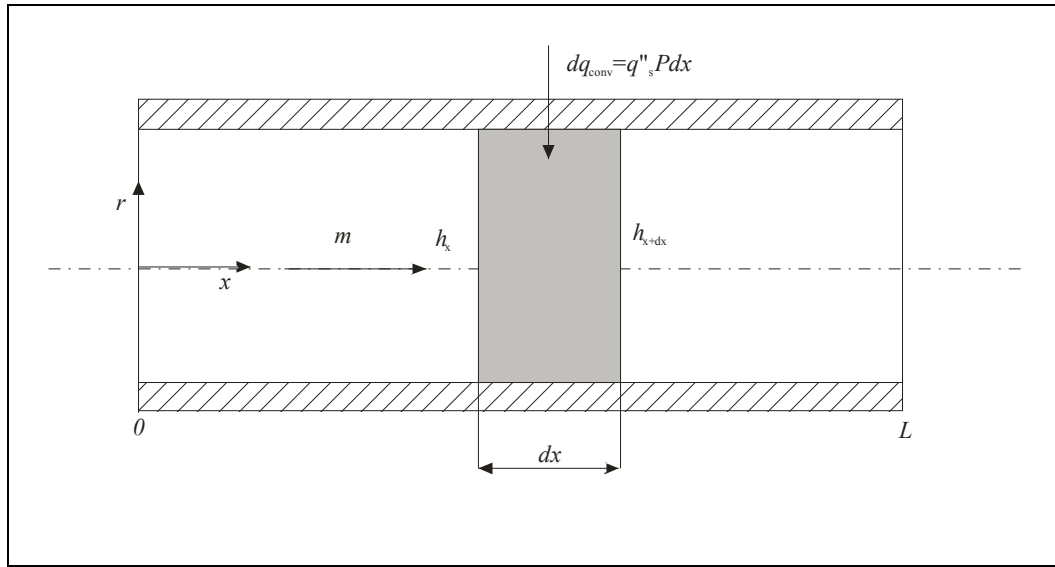


Figura 3-11: Volume di controllo infinitesimo in una tubazione.

Attraverso l'area infinitesima laterale entra la potenza termica convettiva:

$$dq_{conv} = q'' P dx$$

dove P è il perimetro della tubazione.

Il fluido che entra attraverso la sezione posta alla coordinata x possiede l'entalpia specifica i_x , mentre alla sezione posta a $x+dx$ possiede l'entalpia specifica i_{x+dx} .

Il bilancio di primo principio è uguale a:

$$dq_{conv} + \dot{m}i_x - \dot{m}i_{x+dx} = 0 \quad (3-24)$$

Riordinando si ottiene:

$$\dot{m}(i_{x+dx} - i_x) = dq_{conv} \quad (3-25)$$

Sviluppando i_{x+dx} in serie di Taylor e fermanosi al termine di primo ordine, in quanto gli altri sono infinitesimi di ordine superiore, si ottiene:

$$i_{x+dx} = i_x + \frac{di_x}{dx} dx$$

Sostituendo il valore appena ricavato nella (3-25) si ottiene:

$$\dot{m} di_x = dq_{conv} \quad (3-26)$$

Per un fluido incomprimibile e non in cambiamento di fase la (3-26) diventa:

$$dq_{conv} = \dot{m} c dT_m(x) \quad (3-27)$$

Se il fluido è un gas ideale si utilizza il calore specifico a pressione costante. La (3-27) può venir riscritta come:

$$dq_{conv} = q'' P dx = \dot{m} c dT_m(x)$$

Da cui si ricava:

$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{q'' P}{\dot{m} c} = \frac{h P}{\dot{m} c} [T_p - T_m(x)] \quad (3-28)$$

Di solito nella pratica le tubazioni presentano una sezione costante per cui il termine $\frac{P}{\dot{m} c}$ è una costante.

L'integrazione della (3-28) dipende dalle condizioni al contorno, come vedremo nei prossimi paragrafi.

3.7.1.2 Flusso termico costante

Dobbiamo integrare l'equazione:

$$dT_m = \frac{q'' P}{\dot{m} c} dx \quad (3-29)$$

Dove:

$$\frac{q'' P}{\dot{m} c} = \text{cost.}$$

Integrando la (3-29) si ottiene:

$$T_m(x) = \frac{q'' P}{\dot{m} c} x + T_{m,i} \quad (3-30)$$

Dove:

$T_{m,i}$ è la temperatura media nella sezione di ingresso.

Come si vede nel caso di flusso costante la temperatura varia linearmente.

Potrei utilizzare la (3-29) anche nel caso che il flusso termico non fosse costante; dovrei, però, conoscere la sua legge di variazione in funzione di x .

3.7.1.3 Temperatura di parete costante

Si deve integrare l'equazione:

$$dT_m = \frac{hP}{\dot{m}c} [T_p - T_m(x)] dx \quad (3-31)$$

Per integrare questa equazione conviene eseguire un cambiamento di variabile. Definiamo la nuova variabile ΔT come:

$$\Delta T(x) = T_p - T_m(x)$$

Essendo T_p costante si avrà che:

$$\frac{dT_m(x)}{dx} = -\frac{d\Delta T(x)}{dx}$$

Per cui:

$$d\Delta T(x) = -\frac{hP}{\dot{m}c} \Delta T(x) dx$$

Separando le variabili si ottiene che:

$$\frac{d\Delta T(x)}{\Delta T(x)} = -\frac{hP}{\dot{m}c} dx$$

Integrando si ottiene:

$$\int_{\Delta T_i}^{\Delta T} \frac{d\Delta T(x)}{\Delta T(x)} = -\frac{hP}{\dot{m}c} \int_0^x dx$$

La soluzione è pari a:

$$\ln \frac{\Delta T}{\Delta T_i} = -\frac{Ph}{\dot{m}c} x \quad (3-32)$$

Da cui si ricava che l'andamento della temperatura è esponenziale.

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_i} = \frac{T_p - T_m(x)}{T_p - T_{m,i}} = e^{-\frac{Ph}{\dot{m}c} x} \quad (3-33)$$

La (3-33) è valida per il moto completamente sviluppato. Si potrebbe dimostrare che questa equazione è valida anche nelle condizioni d'imbocco con l'unica avvertenza di utilizzare il coefficiente convettivo medio.

In ogni caso, integrando la (3-25) dalla sezione di ingresso a quella di uscita, si ottiene:

$$q_{conv} = \dot{m}c(T_{m,u} - T_{m,i})$$

Sommando e sottraendo la T_p si ottiene:

$$q_{conv} = \dot{m}c \left[(T_p - T_{m,i}) - (T_p - T_{m,u}) \right] = \dot{m}c (\Delta T_i - \Delta T_u) \quad (3-34)$$

Ora, ricavando $\dot{m}c$ dalla (3-32), valutata su tutta la lunghezza L della tubazione, e sostituendo nella (3-34), si ricava che:

$$q_{conv} = \frac{PLh(\Delta T_u - \Delta T_i)}{\ln \frac{\Delta T_u}{\Delta T_i}} = A_s h \Delta T_{ml} \quad (3-35)$$

Dove:

A_s è l'area di scambio termico

ΔT_{ml} è la temperatura media logaritmica definita come:

$$\Delta T_{ml} = \frac{(\Delta T_u - \Delta T_i)}{\ln \frac{\Delta T_u}{\Delta T_i}} \quad (3-36)$$

Ricaveremo per altra via la temperatura media logaritmica nel Capitolo 5, dove tratteremo l'argomento degli scambiatori di calore.

Le ipotesi di flusso o temperatura costanti sono spesso applicabili a casi reali.

In molti impianti le tubazioni sono avvolte da resistenze elettriche o da tubi in cui scorre vapore allo scopo di riscaldare il fluido interno. Questo accade, per esempio, in alcuni circuiti di alimentazione dei motori diesel marini, quando si utilizzano combustibili abbastanza viscosi, soprattutto in climi freddi, oppure nell'industria dolciaria in cui bisogna mantenere la cioccolata fluida all'interno delle tubazioni.

L'ipotesi, invece, di temperatura di parete costante è sicuramente applicabile nei condensatori e negli evaporatori, in cui il fluido si trova allo stato di cambiamento di fase.

L'equazione (3-35) può venir applicata anche ai casi in cui le tubazioni si trovano in ambienti molto grandi. In questo caso si può ritenere che la temperatura dell'aria esterna non si modifichi a causa dello scambio termico con la tubazione.

Al posto della temperatura di parete interna si utilizza la temperatura T_∞ dell'aria esterna e al posto del coefficiente convettivo si usa la trasmittanza, U .

Per concludere questo argomento in Figura 3-12 sono posti in grafico i risultati ottenuti per i due casi

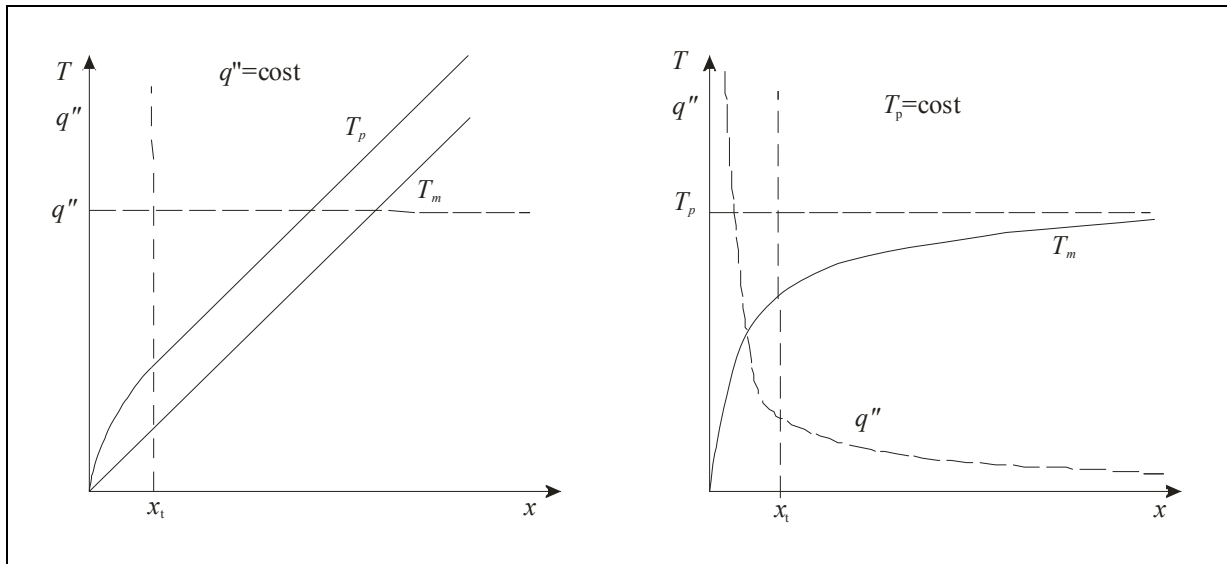


Figura 3-12: Andamento della temperatura all'interno delle tubazioni. a) flusso costante b) temperatura di parete costante

3.7.2 Correlazioni per il moto interno completamente sviluppato.

Nel caso molto comune di tubazioni a sezione circolare le correlazioni più utilizzate sono:

Regime laminare ($Re_D < 2300$)

$$\text{Flusso termico a parete costante :} \quad Nu_D = 4,36 \quad (3-37)$$

$$\text{Temperatura a parete costante :} \quad Nu_D = 3,66 \quad (3-38)$$

Regime turbolento ($Re_D > 10000$)

Correlazione di Dittus-Boelter valida per $0,7 < Pr < 160$ $L/D > 10$

$$Nu_D = 0,023 Re_D^{0,8} Pr^n \quad (3-39)$$

con $n = 0,4$ per $T_p > T_m$ e $n = 0,3$ per $T_p < T_m$ con le proprietà termofisiche valutate alla temperatura T_m .

Se il condotto non è circolare e il flusso è laminare, esistono in letteratura i valori di Nusselt in funzione della geometria.

Nel caso di moto turbolento si può utilizzare la correlazione di Dittus-Boelter riferendola al diametro idraulico, che è definito:

$$D_h = \frac{4A_c}{P} \quad (3-40)$$

dove:

A_c è l'area della sezione trasversale del condotto occupata dal fluido.

P è il perimetro bagnato (se il tubo lavora a bocca piena coincide con il suo perimetro).

Esempio 3-3

Nel tubo da 1'' visto nell' Esempio 2-2 scorre una portata volumetrica d'acqua $\dot{V} = 2,5 \frac{m^3}{h}$ alla temperatura media $t_m = 80^\circ C$. Calcolare il coefficiente convettivo medio.

Svolgimento

Le proprietà termofisiche vanno valutate alla temperatura media. Nel nostro caso a $80^\circ C$.

$$\rho = 972 \frac{kg}{m^3} \quad c_p = 4,198 \frac{kJ}{kg K} \quad k = 0,670 \frac{W}{mK} \quad \mu = 3,51 \cdot 10^{-4} \frac{kg}{m s} \quad \nu = 3,61 \cdot 10^{-7} \frac{m^2}{s} \quad Pr = 2,20$$

La velocità media è uguale a:

$$u = \frac{\dot{V}}{S} = 4 \cdot \frac{2,5}{3600 \cdot \pi \cdot 0,0279^2} = 1,14 \frac{m}{s}$$

Il Numero di Reynolds è uguale a:

$$Re = \frac{u D}{\nu} = 8,81 \cdot 10^4$$

Ci troviamo in condizioni di moto turbolento e quindi possiamo utilizzare la correlazione (3-24)

$$Nu_D = 0,023 Re_D^{0,8} Pr^{0,3} = 263,3$$

$$h = \frac{k}{D} Nu = 6323 \frac{W}{m^2 K}$$

3.8 Convezione naturale.

3.8.1 Introduzione.

Come già detto la convezione naturale è originata da gradienti di densità.

Come problema è più complesso della convezione forzata in quanto il campo di moto e quello termico sono strettamente legati. In altri termini il campo di temperatura genera un campo di moto che a sua volta modifica quello termico.

In generale i flussi termici sono sensibilmente inferiori a quelli generati dalla convezione forzata. Nonostante ciò in molti casi si preferisce la convezione naturale perché presenta degli indubbi vantaggi, quali:

- Affidabilità.
- Economicità.
- Silenziosità
- Stabilità

In effetti, per ottenere il moto non sono necessari sistemi meccanici quali pompe o ventilatori. Ciò comporta che in assenza di energia elettrica il sistema funziona lo stesso, che non bisogna spendere in termini di energia e che vi sono minori sorgenti acustiche (e fatto da non trascurare dal punto di vista acustico, le velocità del fluido sono basse). Inoltre se vi è un aumento di temperatura sulla superficie che si sta raffreddando, questo genererà un aumento della velocità del fluido con il conseguente raffreddamento della parete.

Nella Figura 3-7 sono descritti alcuni classici tipi di moto nella convezione naturale.

In tutti i casi si può notare che la velocità lontano dalla sorgente calda o fredda è nulla.

Anche nella convezione naturale si potrà avere moto laminare o turbolento.

Naturalmente non potremo usare il numero di Reynolds per caratterizzare il tipo di moto.

In convezione naturale al posto di Reynolds si utilizza il numero di **Grashof** definito come **il rapporto tra le forze di massa e quelle viscosi**.

$$Gr = \frac{g\beta L_c^3 (T_p - T_\infty)}{\nu^2} \quad (3-41)$$

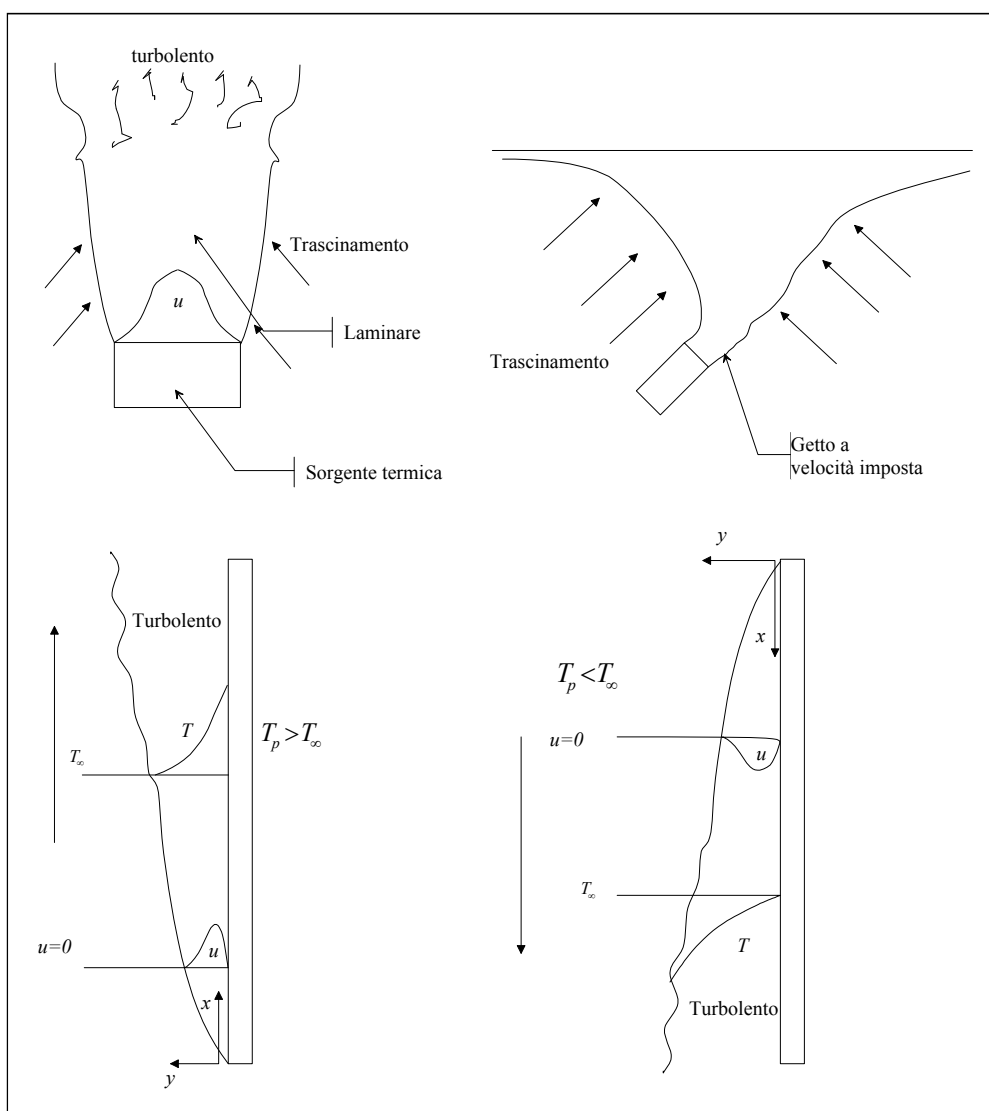


Figura 3-7: Tipologie di moti naturali.

dove:

g è l'accelerazione di gravità

β è il modulo di dilatazione termica. Per un gas perfetto $\beta = \frac{1}{T_\infty}$, con la temperatura espressa in Kelvin

L_c è la lunghezza caratteristica del sistema

ν è la viscosità cinematica

Spesso è conveniente utilizzare il numero di Rayleigh definito come:

$$Ra \equiv Gr Pr = \frac{g\beta L_c^3 (T_p - T_\infty)}{\nu\alpha} \quad (3-42)$$

3.8.2 Correlazioni per la convezione naturale esterna.

La forma più comune per queste correlazioni è del tipo:

$$\overline{Nu}_L = C Ra_L^m \quad (3-43)$$

Dove C e m sono due costanti che dipendono dalla geometria e dal tipo di moto.

Di seguito sono riportate a titolo d'esempio alcune correlazioni fra le più usate.

- Lastra piana verticale e cilindri di diametro elevato ($D/L > 35 Gr^{1/4}$)

Correlazione di Mc Adams.

$$\begin{aligned} Nu &= 0,59 Ra^{\frac{1}{4}} & Pr \approx 1 \quad 10^4 < Ra < 10^9 \\ Nu &= 0,13 Ra^{\frac{1}{3}} & Pr \approx 1 \quad 10^9 < Ra < 10^{13} \end{aligned} \quad (3-44)$$

- Lastra piana orizzontale con superficie superiore riscaldata, flusso termico ascendente (o superficie inferiore raffreddata con flusso termico discendente).

Correlazione di Lewadowski.

$$\begin{aligned} Nu &= 0,766 Ra^{\frac{1}{5}} & 10^4 < Ra < 10^7 \\ Nu &= 0,173 Ra^{\frac{1}{3}} & 10^5 < Ra < 10^8 \end{aligned} \quad (3-45)$$

- Lastra piana orizzontale con superficie superiore raffreddata, flusso termico discendente (o superficie inferiore riscaldata, flusso termico ascendente).

Correlazione di Mc Adams.

$$Nu = 0,27 Ra^{\frac{1}{4}} \quad 3 \times 10^5 < Ra < 10^{10} \quad (3-46)$$

- Cilindro orizzontale

Correlazione di Churchill e Chu.

$$\overline{Nu}_D = \left\{ 0,60 + \frac{0,387 Ra_D^{\frac{1}{4}}}{\left[1 + \left(\frac{0,559}{Pr} \right)^{\frac{9}{16}} \right]^{\frac{8}{27}}} \right\}^2 \quad 10^{-5} < Ra_D < 10^{12} \quad (3-47)$$

Esempio 3-4

Consideriamo sempre il tubo dell'Esempio 2-2, posto orizzontalmente. La temperatura esterna della tubazione è uguale a $t_p = 79,5^\circ C$, mentre la temperatura dell'aria è uguale a $t_\infty = 20^\circ C$. Calcolare la potenza termica trasmessa per unità di lunghezza.

Svolgimento

È il classico esempio di convezione naturale.
Valutiamo la temperatura di film

$$t_f = \frac{t_p + t_\infty}{2} = 49,75 \simeq 50^\circ C$$

A questa temperatura le proprietà termofisiche dell'aria valgono:

$$\rho = 1,084 \frac{kg}{m^3} \quad c_p = 1,008 \frac{kJ}{kg K} \quad k = 0,0280 \frac{W}{mK} \quad \alpha = 2,56 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s} \quad \mu = 1,96 \cdot 10^{-5} \frac{kg}{m s}$$

$$\nu = 1,80 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s} \quad Pr = 0,704 \quad \beta = \frac{1}{T} = \frac{1}{323,15} = 3,10 \cdot 10^{-3}$$

Bisogna ora calcolare il numero di Rayleigh.

$$Ra \equiv Gr Pr = \frac{g \beta D^3 (T_p - T_\infty)}{\nu \alpha} = 1,50 \cdot 10^5$$

È possibile applicare la correlazione (3-47).

$$\overline{Nu}_D = \left\{ 0,60 + \frac{0,387 Ra_D^{\frac{1}{6}}}{\left[1 + \left(\frac{0,559}{Pr} \right)^{\frac{9}{16}} \right]^{\frac{8}{27}}} \right\}^2 = 8,65$$

Il coefficiente convettivo medio vale, allora:

$$\bar{h} = \frac{k}{D} \overline{Nu} = 7,19 \frac{W}{m^2 K}$$

La potenza termica per unità di larghezza è uguale a:

$$\frac{\dot{q}}{L} = \bar{h} \pi D (t_p - t_\infty) = 45,27 \frac{W}{m}$$

Se confrontiamo i valori degli Esempi 2-2 3-3 e 3-4, vediamo che in realtà è proprio la convezione naturale, avendo una resistenza termica decisamente più alta di quella forzata interna e di quella conduttiva, che condiziona lo scambio termico.

4 Irraggiamento termico.

4.1 Introduzione.

A differenza della conduzione e della convezione lo scambio termico radiativo non richiede la presenza di massa tra i sistemi che scambiano energia.

La sua importanza è notevole, non solo in problemi ambientali, sia su piccola, sia su grande scala, ma anche in numerosi processi industriali di riscaldamento, raffreddamento, essiccazione e nei sistemi di conversione dell'energia, caratterizzati dall'utilizzo di combustibili fossili o dall'impiego dell'energia solare.

Ogni corpo emette radiazione termica. Il meccanismo è legato alla transizione degli elettroni da uno stato quantico ad un altro.

L'emissione, essendo legata allo stato della materia, non può che avere caratteristiche volumetriche. Tale fatto è ben evidente nei gas e nei solidi semitrasparenti come il vetro. Se il corpo è opaco, come accade nella maggior parte dei solidi e dei liquidi, la radiazione emessa dalle molecole più interne è fortemente assorbita dalle molecole circostanti. Pertanto la radiazione emessa da questi corpi è quella originata dalle molecole poste entro la distanza di circa $1\text{ }\mu\text{m}$ dalla superficie esterna. Per tale motivo si può ritenere che il fenomeno sia legato alle caratteristiche superficiali del corpo.

Il problema della valutazione dell'energia emessa per irraggiamento non è banale, in quanto le caratteristiche radiative sono legate, sia alla lunghezza d'onda d'emissione, sia alla direzione in cui il corpo emette. La lunghezza d'onda λ è legata alla frequenza ν tramite la relazione:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad (4-1)$$

dove c è la velocità della luce nel mezzo. Nel vuoto $c_0 = 2,998 \times 10^8 \frac{m}{s}$ e in un mezzo avente un

indice di rifrazione n , $c = \frac{c_0}{n}$.

Il campo di lunghezza d'onda che interessa la radiazione termica comprende parte degli ultravioletti (UV), tutta la banda del visibile ($0,4\text{-}0,7\text{ }\mu\text{m}$) e tutto l'infrarosso. Il campo è quindi compreso tra $0,1\text{ }\mu\text{m}$ e $100\text{ }\mu\text{m}$.

In realtà il problema è ancora più complesso in quanto per valutare quanta energia viene scambiata da una superficie (o da un volume) di controllo bisogna conteggiare anche l'energia che la superficie di controllo riceve da tutto ciò che la circonda e la "vede".

Tutte le caratteristiche della superficie sono legate sia alla direzione, sia alla lunghezza d'onda con cui l'energia viene emessa o ricevuta.

Inoltre, se considero due superfici non tutta la radiazione emessa da una superficie incide sull'altra.

Come si può intuire (e come effettivamente vedremo nei prossimi paragrafi) il problema dello scambio termico radiativo è molto complesso, essendo un fenomeno sia direzionale, sia spettrale.

Si è, pertanto, obbligati ad introdurre dei modelli.

Nei prossimi paragrafi procederemo in questo modo:

- definiremo delle grandezze direzionali e spettrali
- definiremo un modello che chiameremo corpo nero
- dal modello di corpo nero passeremo a definire un modello più aderente alla realtà che è quello di superficie grigia e diffusa

- valuteremo lo scambio termico tra superfici grigie e diffuse
- ci soffermeremo brevemente sulla radiazione ambientale e sulle sue implicazioni, sia su larga, che piccola scala.

4.2 *Proprietà energetiche fondamentali.*

4.2.1 Intensità di radiazione.

Per poter definire in modo preciso le caratteristiche energetiche direzionali e spettrali si deve definire una potenza per unità di superficie in funzione della direzione e della lunghezza d'onda. Per poterlo fare siamo, però, costretti a definire prima delle proprietà geometriche. Come rappresentato in Figura 4-1, utilizzeremo le coordinate sferiche. La posizione di un punto $\mathbf{r}$ è definita in modo univoco da una terna di valori: l'angolo zenitale, θ , l'angolo azimutale, ϕ , e la distanza, r , dal sistema di riferimento.

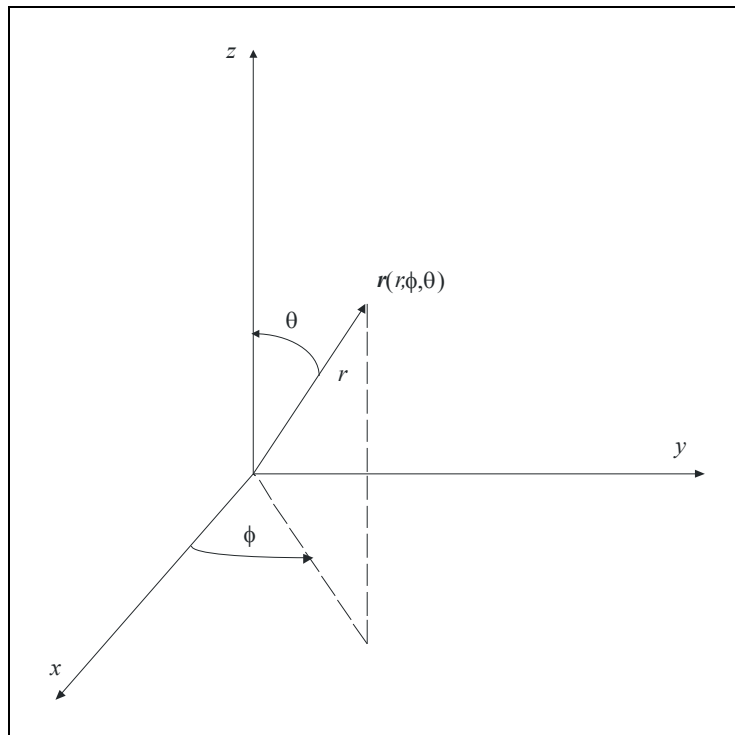


Figura 4-1: Sistema di riferimento sferico

Consideriamo, ora, una superficie infinitesima, dA_1 , e facciamo coincidere l'asse z con il versore normale alla superficie, $\vec{n}_1$, come rappresentato in Figura 4-2. Consideriamo, poi, una superficie, dA_n , normale alla direzione (θ, ϕ) , posta ad una distanza r dal centro della superficie dA_1 .

La superficie dA_n sottenderà un angolo solido $d\omega$.

L'angolo solido è l'estensione allo spazio tridimensionale del concetto di angolo piano.

È definito come ciascuna delle due regioni in cui viene suddiviso lo spazio dalla superficie formata dalle semirette passanti per un punto, detto vertice dell'angolo solido, e per i punti di una curva chiusa semplice tracciata su una superficie non contenente il vertice.

La misura dell'angolo solido, usando la notazione di Figura 4-2, è uguale a:

$$d\omega = \frac{dA_n}{r^2} \quad (4-2)$$

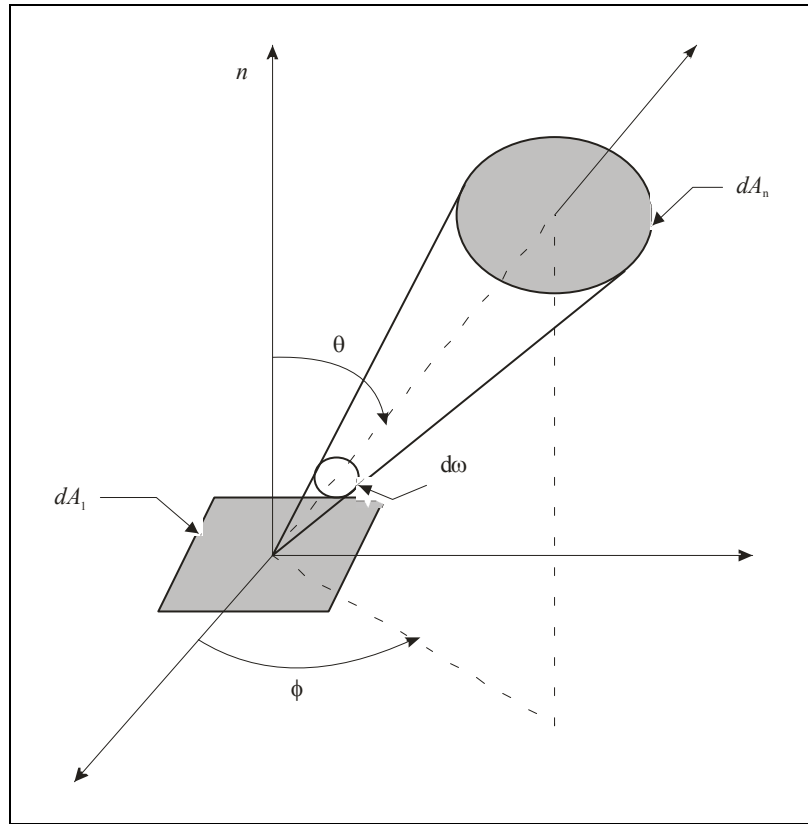


Figura 4-2: Sistema di riferimento ed angolo solido

Sempre rimanendo nelle definizioni geometriche, utilizzando la Figura 4-3, si ricava che dA_n è uguale a:

$$dA_n = r \sin \theta d\phi \cdot r d\theta = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (4-3)$$

e, quindi, $d\omega$ è pari a:

$$d\omega = \sin \theta d\theta d\phi \quad (4-4)$$

L'angolo solido associato ad un' emisfera è uguale a 2π .

Ritornando al nostro problema iniziale si vede chiaramente dalla Figura 4-2 che solo una parte del flusso per unità di lunghezza d'onda emesso dalla superficie dA_1 (espresso in $\frac{W}{m^2 \mu m}$) si trova

all'interno dell'angolo solido $d\omega$, andando così ad incidere sulla superficie dA_n .

Definiremo, quindi, intensità di radiazione monocromatica emessa in direzione (θ, ϕ) (o intensità di radiazione emissiva monocromatica direzionale), $I_{\lambda, e}$, la potenza, dq , di lunghezza d'onda λ , emessa in direzione (θ, ϕ) per unità di area della superficie emittente normale a questa direzione, per unità di angolo solido, $d\omega$, e per unità di intervallo di lunghezza d'onda, $d\lambda$, nell'intorno di λ .

questa intensità viene espressa in $\frac{W}{m^2 sr \mu m}$.

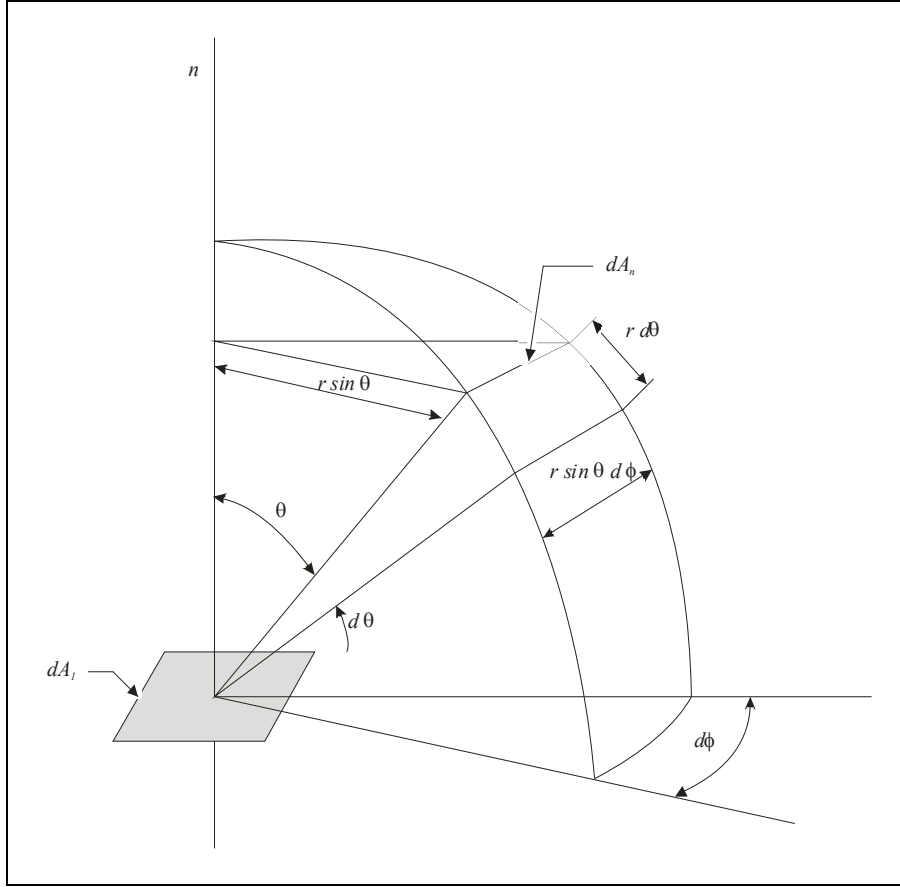


Figura 4-3: Area dA_n in coordinate sferiche

In termini matematici:

$$I_{\lambda,e} = \frac{dq}{dA_1 \cos \theta d\omega d\lambda} = \frac{dq}{dA_1 \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi d\lambda} \quad (4-5)$$

Bisogna osservare che $dA_1 \cos \theta$ rappresenta la proiezione in direzione normale alla direzione θ della superficie dA_1 .

Se noi conoscessimo la funzione $I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \phi)$ potremmo calcolare tutte le grandezze energetiche utili a definire la radiazione termica.

Per esempio, il flusso termico monocromatico emesso in tutte le direzioni da una superficie è uguale a:

$$dq_{\lambda}'' = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} I_{\lambda,e}(\theta, \phi, \lambda) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \quad (4-6)$$

Mentre il flusso globale (flusso in tutte le direzioni e per tutte le lunghezze d'onda) vale:

$$q'' = \int_0^{\infty} q_{\lambda}'' d\lambda = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} I_{\lambda,e}(\theta, \phi, \lambda) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi d\lambda \quad (4-7)$$

4.2.2 Potere emissivo

Nella pratica ingegneristica il più delle volte è sufficiente conoscere l'energia globale emessa da una superficie.

Si introduce, quindi, il concetto di potere emissivo che può essere considerato sia su base monocromatica (detta qualche volta anche spettrale), sia su base globale.

Si definisce potere emissivo monocromatico la potenza termica radiativa di lunghezza d'onda λ emessa in tutte le direzioni per unità di superficie e di intervallo $d\lambda$.

Nota la funzione $I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \phi)$, il potere emissivo monocromatico si calcola con la formula:

$$E_{\lambda}(\lambda) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_{\lambda,e}(\theta, \phi, \lambda) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \quad (4-8)$$

Che ovviamente coincide con la (4-6)

Il potere emissivo totale, E , è uguale alla potenza termica radiativa per unità di area emessa in tutte le direzioni e su tutto lo spettro:

$$E = \int_0^{\infty} E_{\lambda}(\lambda) d\lambda \quad (4-9)$$

Un caso particolare ma applicabile a molti problemi tecnici, è quello di considerare la superficie diffusa. Per superficie diffusa si intende una superficie la cui emissione non dipende dalla direzione. In tal caso la (4-8) diviene:

$$E_{\lambda}(\lambda) = I_{\lambda,e}(\lambda) \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi = \pi I_{\lambda,e}(\lambda) \quad (4-10)$$

E l'emissione globale è uguale a:

$$E = \pi \int_0^{\infty} I_{\lambda,e}(\lambda) d\lambda = \pi I_e \quad (4-11)$$

Dove:

I_e è l'intensità totale della radiazione emessa.

4.2.3 Irradiazione

Nell'introduzione si era detto che una superficie non solo emette, ma può venir irradiata dall'ambiente che la circonda.

La situazione è rappresentata in Figura 4-4.

Come è stata definita una intensità di radiazione emissiva monocromatica direzionale, è possibile definire anche una intensità di radiazione incidente monocromatica direzionale, $I_{\lambda,i}(\lambda, \theta, \phi)$.

L'intensità di radiazione incidente monocromatica direzionale è la potenza termica incidente sulla superficie dA_1 , proveniente dalla direzione (θ, ϕ) , per unità di area normale alla direzione considerata, per unità di angolo solido e per unità di lunghezza d'onda nell'intorno di λ .

Tramite $I_{\lambda,i}$ è possibile definire l'irradiazione (o irradianza) che rappresenta il flusso radiativo proveniente da tutte le direzioni che investe la superficie.

Anche in questo caso si parlerà di irradianza monocromatica (o spettrale) o di irradianza totale.

L'irradianza monocromatica è uguale a:

$$G_{\lambda}(\lambda) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} I_{\lambda,i}(\theta, \phi, \lambda) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \quad (4-12)$$

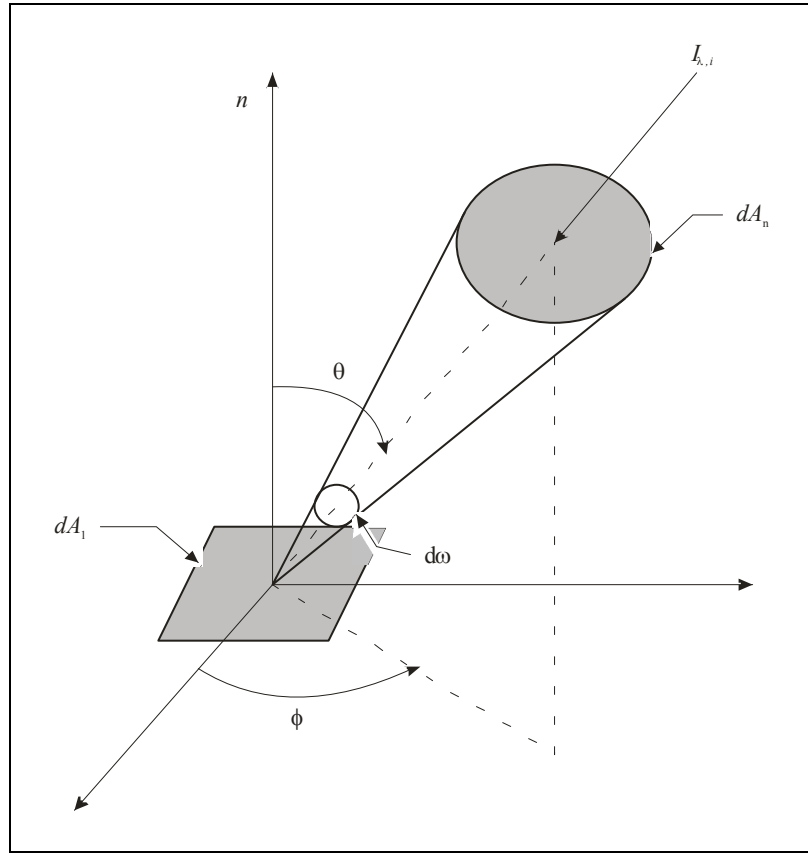


Figura 4-4: Irradiazione di una superficie

Mentre l'irradianza totale vale:

$$G = \int_0^{\infty} G_{\lambda}(\lambda) d\lambda \quad (4-13)$$

Se, poi, l'irradianza è diffusa (cioè l'energia termica arriva ugualmente da tutte le direzioni) si avrà che:

$$G_{\lambda}(\lambda) = \pi I_{\lambda,i}(\lambda) \quad (4-14)$$

$$G = \pi I_i \quad (4-15)$$

4.2.4 Radiosità

L'energia che irradia una superficie, provenendo da una certa direzione e con una certa lunghezza d'onda, verrà, come meglio vedremo in uno dei prossimi paragrafi, in parte assorbita, in parte trasmessa (se il corpo è semitrasparente come, ad esempio, il vetro) e in parte riflessa.

Quindi, l'energia che lascia la superficie in una certa direzione e con una certa lunghezza d'onda, è la somma dell'energia emessa e di quella riflessa.

Definiremo, quindi, un'intensità di radiazione emessa e riflessa, $I_{\lambda,e+r}(\lambda, \theta, \phi)$.

L'integrale esteso a tutte le direzioni di questa intensità prende il nome di radiosità monocromatica, $J_\lambda(\lambda)$.

$$J_\lambda(\lambda) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_{\lambda,e+r}(\theta, \phi, \lambda) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \quad (4-16)$$

Si avrà, poi, una radiosità totale, uguale a:

$$J = \int_0^\infty J_\lambda(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_{\lambda,e+r}(\theta, \phi, \lambda) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi d\lambda \quad (4-17)$$

Se la superficie è, sia un emettitore diffuso, sia un riflettore diffuso (cioè l'intensità $I_{\lambda,e+r}$ indipendente dalla direzione) si avrà che:

$$J_\lambda(\lambda) = \pi I_{\lambda,e+r} \quad (4-18)$$

$$J = \pi I_{e+r} \quad (4-19)$$

4.3 Il corpo nero.

4.3.1 Definizione di corpo nero.

Come si è visto nei paragrafi precedenti il problema dell'irraggiamento è particolarmente complesso a causa della sua dipendenza direzionale e spettrale.

Si ricorre, allora, ad un modello che semplifica il problema. A questo modello diamo il nome di corpo nero.

Definiamo corpo nero un corpo che presenta le seguenti caratteristiche:

- Il corpo nero assorbe tutta la radiazione incidente.
- Per ogni temperatura e lunghezza d'onda assegnata, nessuna superficie può emettere più di un corpo nero.
- Il corpo nero è un emettitore diffuso, il che significa che l'emissione non è funzione della direzione.

Il comportamento del corpo nero può essere approssimato sperimentalmente con una cavità la cui la superficie interna è mantenuta a temperatura costante. Vi è solo un piccolo foro da cui entra la radiazione, per cui la probabilità che un raggio possa uscire una volta entrato è molto piccola.

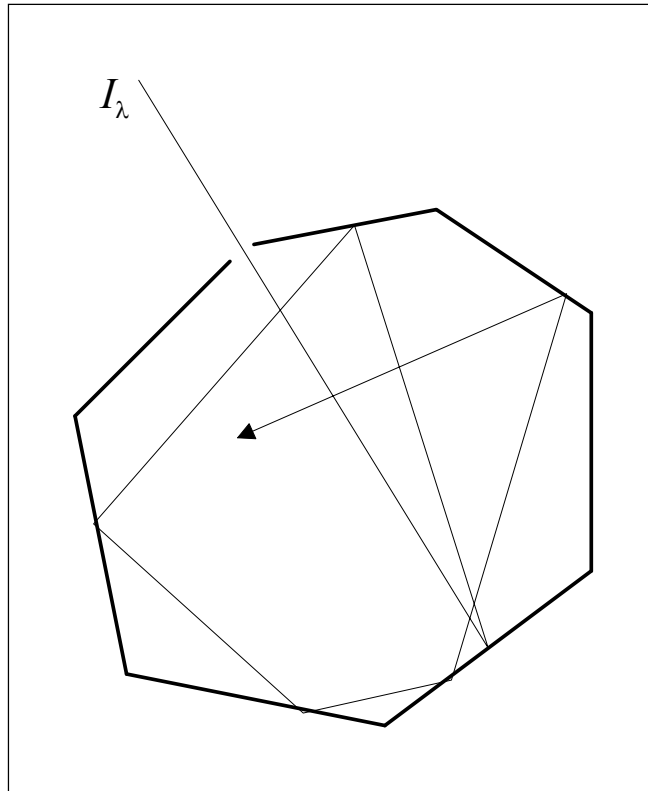


Figura 4-5: Schematizzazione di un corpo nero.

4.3.2 La legge di Planck.

La legge di Planck esprime come varia il potere emissivo monocromatico di corpo nero al variare della temperatura assoluta e della lunghezza d'onda.

Planck ricavò che il potere emissivo monocromatico di corpo nero segue la seguente legge:

$$E_{\lambda,b}(\lambda, T) = \frac{C_1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)} \quad (4-20)$$

Con

$$C_1 = 2\pi h c_0 = 7,742 \cdot 10^8 \frac{W \mu m^4}{m^2}$$

$$C_2 = \frac{h c_0}{k} = 1,439 \cdot 10^4 \mu m K$$

Dove:

h è la costante di Planck $h = 6,6256 \cdot 10^{-34} J s$

k è la costante di Boltzmann. $k = 1,3805 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$

c_0 è la velocità della luce nel vuoto. $c_0 = 2,998 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$

In Figura 4-6 è riportata in forma grafica la legge di Planck.

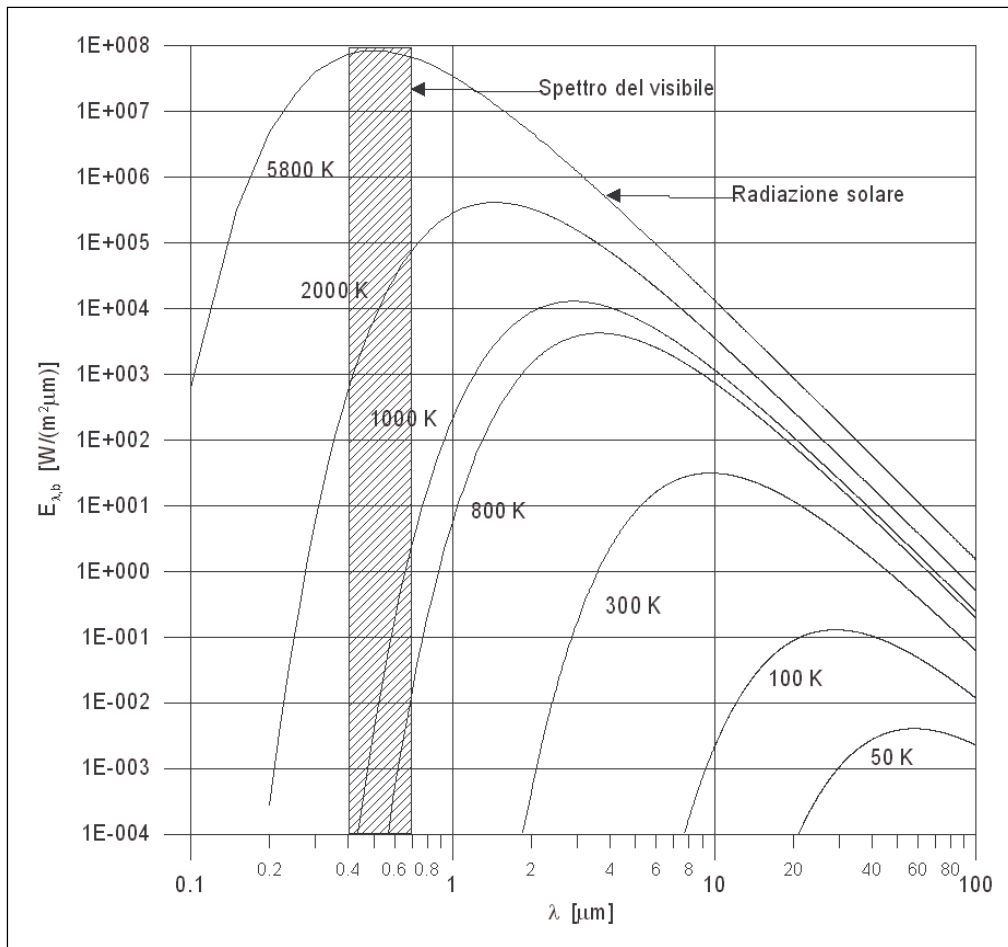


Figura 4-6: la legge di Planck.

Osservando la figura si possono fare le seguenti osservazioni:

- Fissata la lunghezza d'onda, il valore della radiazione emessa cresce all'aumentare della temperatura.
- All'aumentare della temperatura il corpo nero emette a lunghezze d'onda minori.
- Il sole si può considerare in prima approssimazione un corpo nero che emette a circa 5800 K. Si potrebbe dimostrare che circa il 50% dell'energia emessa dal sole cade nel campo del visibile.

Bisogna fare attenzione che il grafico di Figura 4-6 è log-log.

4.3.3 Legge di Wien.

Dall'analisi della Figura 4-6 si vede che il potere emissivo monocromatico del corpo nero ha un massimo e che la lunghezza d'onda, λ_m , a cui corrisponde questo massimo, dipende dalla temperatura. Si vede che all'aumentare della temperatura λ_m si sposta verso valori minori. Wien dimostrò che questo spostamento segue la legge:

$$\lambda_m T = 2897,6 \quad \mu\text{m K} \quad (4-21)$$

La curva che rappresenta il luogo dei massimi è un'iperbole.

4.3.4 Legge di Stefan-Boltzmann.

Per ottenere il potere emissivo totale del corpo nero devo integrare la legge di Planck su tutto lo spettro di frequenze. Facendo questa operazione ottengo la legge di Stefan-Boltzmann:

$$E_b = \sigma T^4 \quad (4-22)$$

dove:

E_b è il potere emissivo globale di corpo nero, espresso in $[W/m^2]$.

σ è la costante di Stefan-Boltzmann che vale: $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} W/m^2 K^4$.

In realtà Stefan ricavò nel 1879 questa formula per via empirica e Boltzmann la dimostrò nel 1884 senza ricorrere alla legge di Planck, che è di diversi anni successiva, con semplici considerazioni termodinamiche.

4.4 Proprietà delle superfici reali

4.4.1 Emissione di una superficie reale

Il modello di corpo nero è un modello estremamente semplice e comodo. Nei paragrafi riguardanti lo scambio termico radiativo vedremo quanto è più semplice calcolare lo scambio termico tra due superfici nere piuttosto che tra due superfici reali. Purtroppo come modello è poco applicabile ai casi reali.

Quello che è sicuramente vero è che le superfici reali emettono meno di un corpo nero avente la stessa temperatura.

Definiamo, allora, una proprietà radiativa delle superfici a cui diamo il nome di emissività.

L'emissività di una superficie è il rapporto tra l'energia emessa dalla superficie e quella che emetterebbe un corpo nero avente la stessa temperatura.

Poiché in generale le caratteristiche emittenti di una superficie reale sono direzionali e spettrali, definiremo emissività monocromatica direzionale di una superficie a temperatura uniforme T , $\varepsilon_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \phi, T)$, il rapporto tra l'intensità di radiazione monocromatica direzionale e l'intensità di radiazione di corpo nero, valutata agli stessi valori di lunghezza d'onda e temperatura (il corpo nero è per definizione diffuso).

$$\varepsilon_{\lambda,\theta}(\lambda, \theta, \phi, T) = \frac{I_{\lambda,e}(\lambda, \theta, \phi, T)}{I_{\lambda,b}(\lambda, T)} \quad (4-23)$$

Nei calcoli tecnici è comodo conoscere il valore monocromatico dell'emissione integrato su tutte le direzioni, definito emissività emisferica monocromatica, ε_λ :

$$\varepsilon_\lambda(\lambda, T) = \frac{E_\lambda(\lambda, T)}{E_{\lambda,b}(\lambda, T)} \quad (4-24)$$

Per la (4-8) la (4-24) diventa:

$$\varepsilon_{\lambda}(\lambda, T) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_{\lambda,e}(\theta, \phi, \lambda, T) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_{\lambda,b}(\lambda, T) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi} \quad (4-25)$$

Ora, essendo la radiazione di corpo nero indipendente dalla direzione, posso portarla all'interno dell'integrale al numeratore e ricordando la (4-23), si ricava che:

$$\varepsilon_{\lambda}(\lambda, T) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon_{\lambda,\theta}(\theta, \phi, \lambda, T) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon_{\lambda,\theta}(\theta, \phi, \lambda, T) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi}{\pi} \quad (4-26)$$

Molto spesso le superfici reali presentano una simmetria azimutale (l'emissione di radiazione non dipende da ϕ). Se ciò accade la (4-26) diventa:

$$\varepsilon_{\lambda}(\lambda, T) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon_{\lambda,\theta}(\theta, \lambda, T) \cos \theta \sin \theta d\theta \quad (4-27)$$

Una volta valutata l'emissività emisferica monocromatica con una formule precedenti, è possibile calcolare l'emissività emisferica totale.

$$\varepsilon(T) = \frac{E(T)}{E_b(T)} = \frac{\int_0^{\infty} E_{\lambda}(\lambda, T) d\lambda}{E_b(T)} = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda}(\lambda, T) E_{\lambda,b}(\lambda, T) d\lambda}{E_b(T)} \quad (4-28)$$

La conoscenza dell'emissività emisferica monocromatica e di quella globale permette il calcolo del potere emissivo monocromatico e di quello globale

$$E_{\lambda}(\lambda, T) = \varepsilon_{\lambda}(\lambda, T) E_{\lambda,b}(\lambda, T) \quad (4-29)$$

$$E(T) = \varepsilon(T) E_b(T) = \varepsilon(T) \sigma T^4 \quad (4-30)$$

Il vero problema, però, rimane quello di conoscere la funzione dell'emissività, che di solito è molto complessa. Sarebbe molto comodo poter utilizzare dei modelli semplificativi.

Per esempio sarebbe comodo supporre l'emissività diffusa. Abbiamo già detto che normalmente l'intensità di radiazione non dipende dall'angolo azimutale, ϕ , ma dipende dall'angolo zenitale.

In Figura 4-7 è riportato qualitativamente l'andamento dell'emissività in funzione dell'angolo zenitale per i materiali non conduttori e per quelli conduttori.

Si può osservare che i materiali conduttori presentano un'emissività che rimane circa costante fino ad un angolo zenitale di 40° , mentre nei materiali non conduttori l'emissività tende a rimanere sensibilmente costante fino ad un angolo $\theta \approx 70^\circ$, per poi decadere rapidamente.

Inoltre si può osservare che nei materiali conduttori il rapporto tra l'emissività e quella normale, ε_n

(quella valutata per $\theta = 0$), si mantiene nel campo $1,0 \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon_n} \leq 1,3$, mentre nei materiali non conduttori

il campo è compreso tra i valori $0,9 \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon_n} \leq 1,0$.

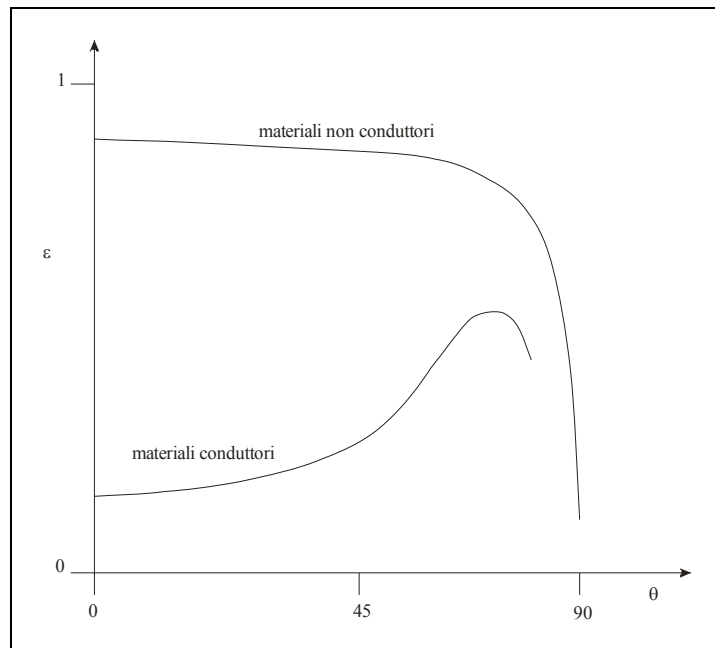


Figura 4-7: andamento dell'emissività nei materiali non conduttori e in quelli conduttori

Si può, quindi, supporre che l'emissività direzionale sia costante ed uguale a quella in direzione normale.

Più delicata è l'ipotesi che l'emissività sia indipendente dalla lunghezza d'onda. Supporre ciò equivarrebbe ad avere un andamento del potere emissivo monocromatico simile a quello del corpo nero, ma scalato dell'emissività. In realtà, come si può vedere in Figura 4-8, questo modello non è di solito accettabile, almeno in tutto il campo di lunghezze d'onda.

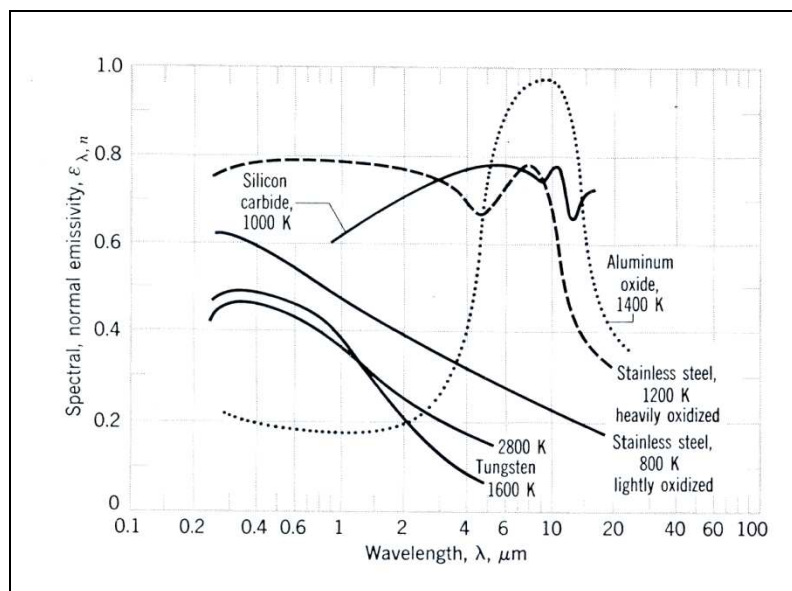


Figura 4-8: Emissività monocromatica normale di alcuni materiali

Per esempio l'emissività monocromatica normale dell'acciaio inossidabile a 1200 K rimane pressoché costante nel campo del visibile e dell'infrarosso fino a circa 2 μm ; al di fuori di questo campo l'ipotesi di costanza dell'emissività decade.

Bisogna infine rilevare che l'emissività dipende sensibilmente dal materiale e dalla sua finitura superficiale.

4.4.2 Assorbimento, riflessione, trasmissione

In realtà, come abbiamo visto nei paragrafi introduttivi, un corpo non solo emette energia in funzione della sua temperatura e delle sue proprietà superficiali o di volume (se consideriamo corpi semitrasparenti), ma risponde anche all'energia che incide su di esso.

Supponiamo, per trovarci nelle condizioni più generali possibili, che su un corpo semitrasparente incida una certa intensità di radiazione monocromatica direzionale, $I_{\lambda,i}(\theta,\phi,\lambda)$, proveniente dalla direzione (θ,ϕ) .

Come indicato in Figura 4-9, parte di questa energia è riflessa ($I_{\lambda,r}$), parte viene assorbita ($I_{\lambda,a}$) e parte viene trasmessa all'esterno ($I_{\lambda,t}$).

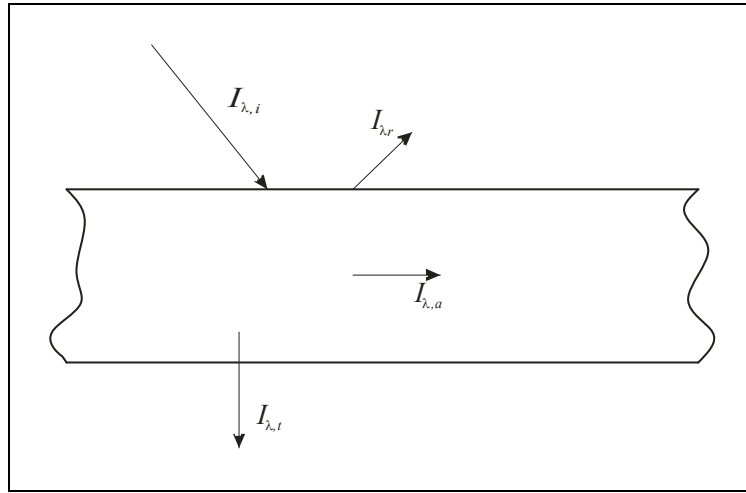


Figura 4-9: Bilancio di energia radiante in un corpo semitrasparente

Se si considera un volume di controllo coincidente con il corpo e si applica il primo principio, supponendo il sistema stazionario, si ottiene:

$$I_{\lambda,i} = I_{\lambda,r} + I_{\lambda,a} + I_{\lambda,t} \quad (4-31)$$

Se consideriamo, invece, il valore totale dell'energia monocromatica incidente da tutte le direzioni, otteniamo l'irradianza monocromatica, G_{λ} , per la quale vale la relazione:

$$G_{\lambda,i} = G_{\lambda,r} + G_{\lambda,a} + G_{\lambda,t} \quad (4-32)$$

Ragionando invece in termini globali, si ottiene:

$$G = G_r + G_a + G_t \quad (4-33)$$

Se dividiamo la (4-31) per $I_{\lambda,i}$ si ricava che:

$$\rho_{\lambda,\theta}(\lambda,\theta,\phi) + \alpha_{\lambda,\theta}(\lambda,\theta,\phi) + \tau_{\lambda,\theta}(\lambda,\theta,\phi) = 1 \quad (4-34)$$

Dove:

$\rho_{\lambda,\theta}$ è il coefficiente di riflessione monocromatico direzionale

$\alpha_{\lambda,\theta}$ è il coefficiente di assorbimento monocromatico direzionale

$\tau_{\lambda,\theta}$ è il coefficiente di trasmissione monocromatico direzionale

Ovviamente in termini monocromatici si ottiene che:

$$\rho_{\lambda} + \alpha_{\lambda} + \tau_{\lambda} = 1 \quad (4-35)$$

e in termini globali:

$$\rho + \alpha + \tau = 1 \quad (4-36)$$

Se il corpo è opaco non passa alcuna radiazione; il coefficiente di trasmissione è, quindi, nullo per cui valgono le relazioni:

$$\begin{aligned} \rho_{\lambda,\theta} + \alpha_{\lambda,\theta} &= 1 \\ \rho_{\lambda} + \alpha_{\lambda} &= 1 \\ \rho + \alpha &= 1 \end{aligned} \quad (4-37)$$

Purtroppo le caratteristiche radiative di un corpo dipendono spesso fortemente dalla lunghezza d'onda.

Per esempio siamo abituati a considerare il vetro un materiale trasparente, perché effettivamente nel campo di frequenze in cui l'occhio "vede", il vetro è trasparente. Invece in quasi tutto il campo dell'ultravioletto e in quasi tutto quello dell'infrarosso il vetro si comporta come una superficie sostanzialmente opaca.

Questo spiega il funzionamento delle serre. Oltre il 90% della radiazione solare è compresa nel campo di lunghezze d'onda in cui il vetro si comporta come un materiale trasparente. Questa energia riscalda il terreno interno alla serra che a sua volta riemette energia a temperatura ambiente. Parlando del corpo nero si era visto che i corpi a bassa temperatura emettono a lunghezze d'onda maggiori; quindi il terreno emetterà energia nel campo dell'infrarosso in cui il vetro si comporta come una superficie quasi opaca. Quindi, la gran parte di questa energia viene riflessa, generando un aumento dell'energia del sistema e quindi della temperatura interna.

Le proprietà di assorbimento e riflessione determinano anche la nostra percezione del colore.

Una superficie la vediamo verde perché riflette l'energia prevalentemente attorno alla lunghezza d'onda del verde ($\sim 0,5 \mu m$). Una superficie appare nera se assorbe, almeno nel campo del visibile, quasi tutta l'energia incidente ed appare bianca se, invece, riflette gran parte dell'energia nel campo del visibile. Attenzione, però, che le caratteristiche si modificano, anche sensibilmente, con la lunghezza d'onda.

Un esempio classico è la neve. Nel visibile il suo coefficiente di riflessione è molto alto (attorno a 0,9), mentre nell'infrarosso si comporta quasi come un corpo nero.

Prima di cambiare argomento soffermiamoci ancora un attimo sul problema della riflessione.

A seconda del tipo di finitura superficiale possiamo modellizzare la riflessione in due tipi: quella diffusa e quella speculare.

Nella riflessione diffusa l'energia viene riflessa uniformemente in tutte le direzioni, come schematizzato in Figura 4-10.

Nella riflessione speculare, invece, l'angolo di incidenza e quello di riflessione giacciono sullo stesso piano e sono uguali (Figura 4-11); il fenomeno, quindi, è fortemente direzionale.

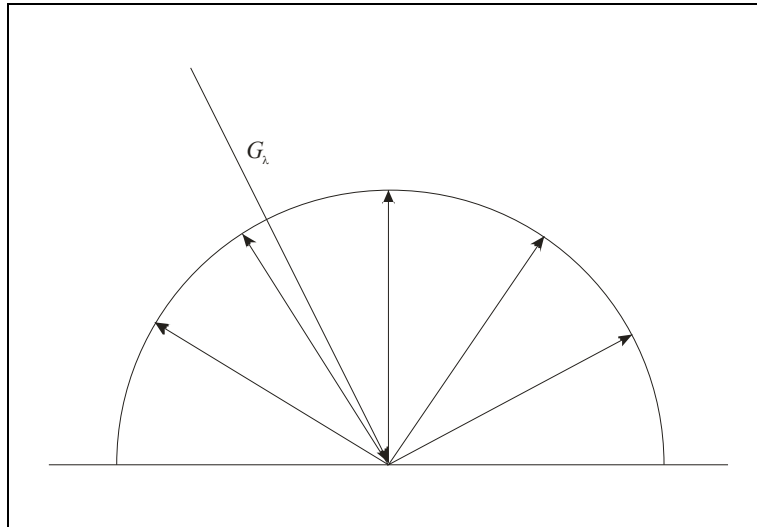


Figura 4-10: Riflessione diffusa

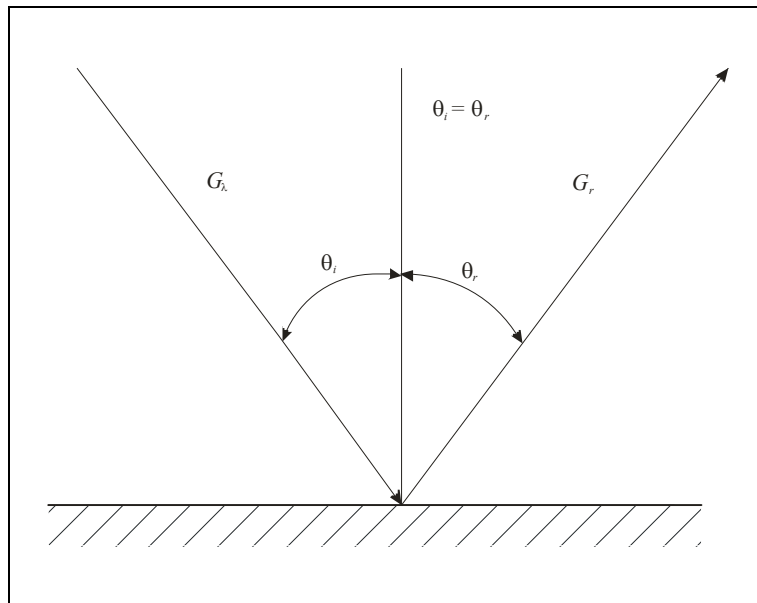


Figura 4-11: Riflessione riflessa

Detto h il valor medio della rugosità, si avrà riflessione speculare se $h < 0,1\lambda$ e invece la riflessione sarà diffusa se $h > 2\lambda$

4.4.3 Legge di Kirchhoff.

Consideriamo una cavità nera al cui interno sono presenti alcuni corpi. Supponiamo che il sistema sia in equilibrio termico, cioè che la temperatura della superficie interna della cavità, T_s , e le temperature dei corpi presenti all'interno, $T_1, T_2, \dots, T_n$ siano uguali.

Il problema è rappresentato in Figura 4-12.

Consideriamo il corpo 1 e prendiamo come volume di controllo il corpo stesso il cui confine è la superficie esterna di area A_1 .

Essendo il sistema in equilibrio lo scambio termico netto è nullo.

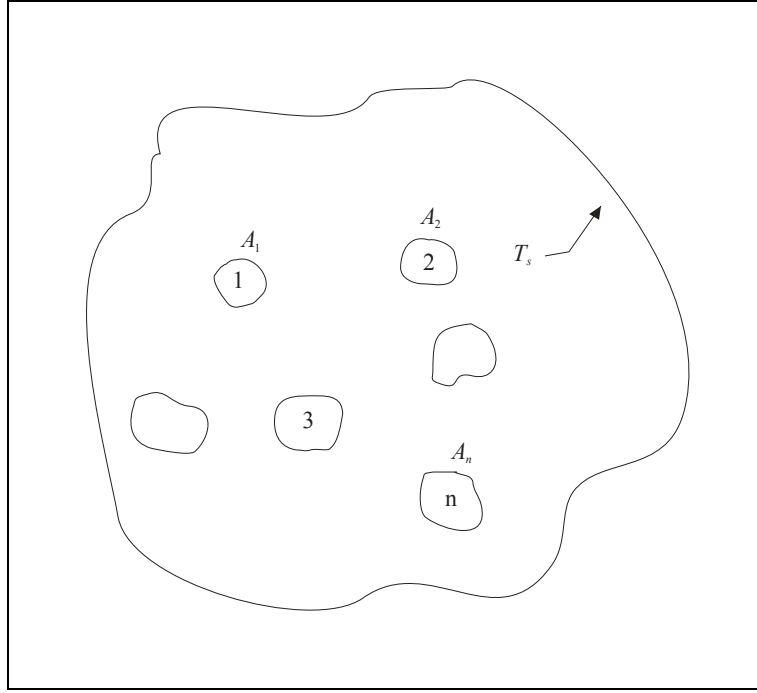


Figura 4-12: Cavità con all'interno piccoli corpi in equilibrio termico

L'irradianza che incide sul corpo è per le ipotesi fatte uguale all'emissione di corpo nero della superficie della cavità; per cui:

$$G = E_b(T_s) \quad (4-38)$$

Se si applica il primo principio al volume di controllo scelto, si ottiene che l'irradianza assorbita è uguale all'energia emessa; cioè:

$$\alpha_1 G A_1 - E_1(T_1) A_1 = 0$$

Considerando la (4-38) e il fatto che $T_s = T_1$, si ricava che:

$$\frac{E_1(T_s)}{\alpha_1} = E_b(T_s)$$

o meglio:

$$\frac{E_1(T_s)}{E_b(T_s)} \frac{1}{\alpha_1} = 1$$

Ma $\frac{E_1(T_s)}{E_b(T_s)} = \varepsilon_1$, per cui:

$$\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1} = 1$$

Si può fare lo stesso ragionamento per tutti gli altri corpi presenti nella cavità, per cui si ottiene che:

$$\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\alpha_2} = \dots = \frac{\varepsilon_n}{\alpha_n} = 1$$

Per ogni superficie presente all'interno della cavità vale, quindi, la relazione:

$$\varepsilon = \alpha \quad (4-39)$$

Questa è la legge di Kirchhoff.

In seguito vedremo che se la legge di Kirchhoff è rispettata i calcoli di scambio termico tra due o più superfici si semplificano enormemente.

Bisogna fare attenzione, però, che le nostre ipotesi di partenza erano molto restrittive; per cui la (4-39) non è sempre vera.

L'affermazione che, invece, è sempre vera è che, fissata la temperatura, l'emissività monocromatica direzionale è uguale al coefficiente di assorbimento monocromatico direzionale:

$$\varepsilon_{\lambda,\theta}(T) = \alpha_{\lambda,\theta}(T) \quad (4-40)$$

Ammettendo vera la (4-40) si ha che l'emissività monocromatica è uguale al coefficiente di assorbimento monocromatico quando si verifica una delle due seguenti condizioni:

- l'irradianza è diffusa
- la superficie è diffusa

per dimostrarlo scriviamo la seguente relazione:

$$\varepsilon_{\lambda} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varepsilon_{\lambda,\theta} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha_{\lambda,\theta} I_{\lambda,i} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_{\lambda,i} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi} = \alpha_{\lambda}$$

Se l'irradiazione è diffusa $I_{\lambda,i}$ non dipende dalla direzione, per cui almeno direzionalmente è una costante. Dato che compare sia al numeratore che al denominatore può essere semplificata; per cui, essendo valida la (4-40), si dimostra che l'emissività monocromatica è uguale all'assorbimento monocromatico.

Se invece la superficie è diffusa sia $\varepsilon_{\lambda,\theta}$, sia $\alpha_{\lambda,\theta}$ non dipendono dalla direzione per cui si possono portare fuori dal segno d'integrale. Per cui gli integrali al numeratore e al denominatore dei due membri dell'equazione sono uguali e si possono semplificare. Grazie alla (4-40) si dimostra l'eguaglianza dei due termini.

L'ipotesi di irradiazione diffusa è un'approssimazione di solito accettabile nella precisione prevista per i calcoli ingegneristici.

La seconda condizione, invece, è vera per molte superfici reali, soprattutto per i materiali non conduttori.

Vediamo, ora, quando è corretto scrivere che $\varepsilon = \alpha$. Questa relazione è vera quando si verifica almeno una delle seguenti condizioni, supposto che $\varepsilon_{\lambda} = \alpha_{\lambda}$.

- L'irradianza è uguale all'emissione di corpo nero alla temperatura T (è l'ipotesi che abbiamo fatto per ricavare la legge di Kirchhoff).

- Sia α_λ , sia ε_λ , sono indipendenti da λ .

Una superficie che rispetta la seconda condizione si definisce superficie grigia.

Per dimostrare la veridicità di queste due condizioni supponiamo che $\varepsilon = \alpha$. Si può, allora, scrivere che:

$$\varepsilon = \frac{\int_0^\infty \varepsilon_\lambda E_{\lambda b}(\lambda, T) d\lambda}{E_b(T)} = \frac{\int_0^\infty \alpha_\lambda G_\lambda(\lambda) d\lambda}{G} = \alpha$$

Se $G = E_b(T)$, $G_\lambda = E_{\lambda, b}$ e $\varepsilon_\lambda = \alpha_\lambda$, allora le due frazioni sono uguali, dimostrando, così, la prima condizione.

Verifichiamo la veridicità della seconda condizione.

Se la superficie è grigia posso scrivere che:

$$\varepsilon = \varepsilon_\lambda \frac{\int_0^\infty E_{\lambda b}(\lambda, T) d\lambda}{E_b(T)} = \alpha_\lambda \frac{\int_0^\infty G_\lambda(\lambda) d\lambda}{G} = \alpha$$

Ma dalle definizioni di emissione totale di corpo nero e di irradianza totale ricavo che:

$$\varepsilon_\lambda \frac{E_b}{E_b} = \alpha_\lambda \frac{G}{G} \Rightarrow \varepsilon = \alpha$$

Come volevasi dimostrare.

Purtroppo le proprietà di una superficie dipendono, come abbiamo già detto, fortemente dalla lunghezza d'onda, per cui è praticamente impossibile definire una superficie grigia in tutto il campo di lunghezze d'onda (tra 0 e ∞).

Molto spesso, però, accade che ε_λ e α_λ siano costanti dentro un campo di lunghezze d'onda compreso tra λ_1 e λ_2 , come indicato in Figura 4-13.

In pratica si può definire una superficie grigia se ε_λ e α_λ sono indipendenti da λ nel campo di lunghezze d'onda in cui la superficie è irradiata ed emette.

Una superficie per la quale sia $\alpha_{\lambda, \theta}$, sia $\varepsilon_{\lambda, \theta}$ sono indipendenti dalla direzione e dalla lunghezza d'onda si definisce grigia e diffusa.

Una superficie grigia e diffusa segue l'andamento dell'emissione di un corpo nero alla stessa temperatura, solo scalato dell'emissività.

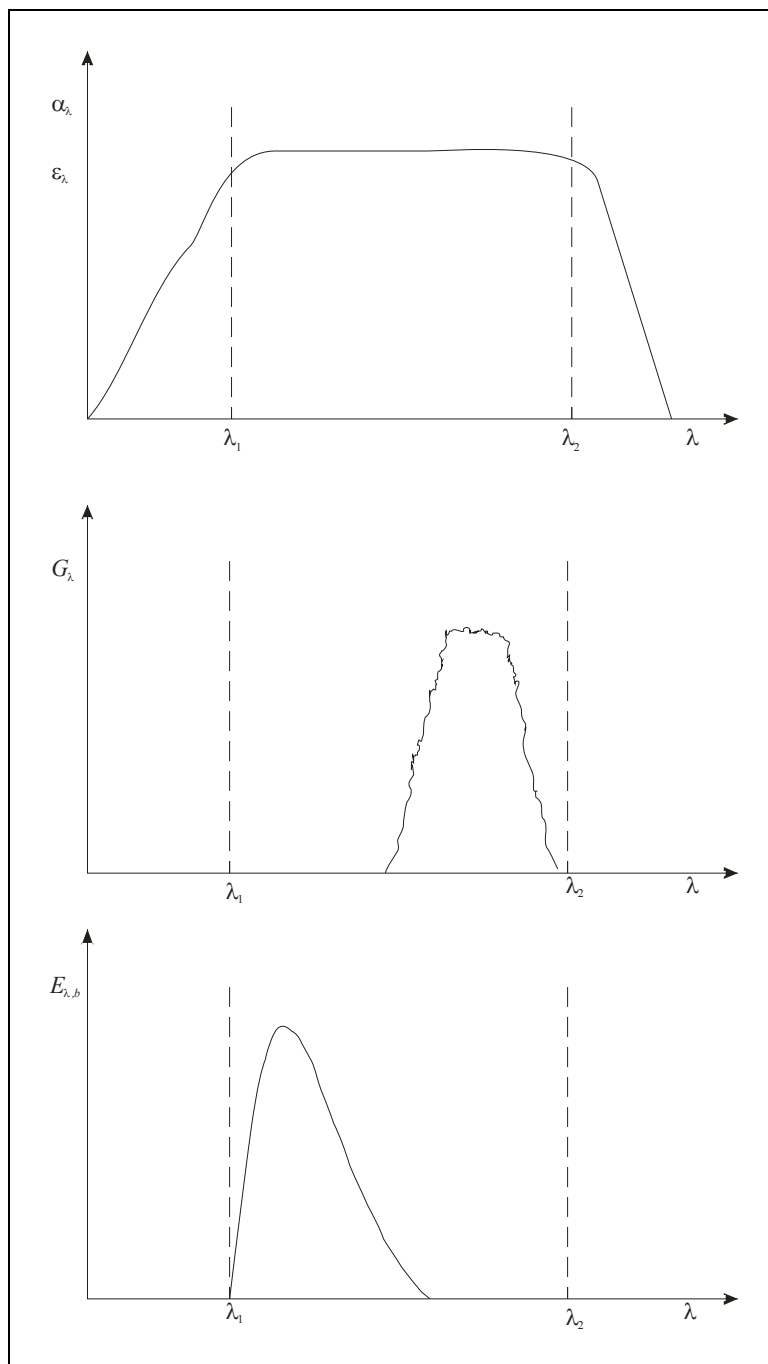


Figura 4-13: Condizioni per poter definire una superficie grigia

4.5 *Scambio termico tra superfici*

4.5.1 Fattori di vista.

Prima di considerare lo scambio termico radiativo tra superfici rimane ancora un problema da affrontare.

Come abbiamo già detto generalmente non tutta l'energia che lascia un corpo viene intercettata da un altro.

Come esempio consideriamo un caminetto.

La fiamma emette una certa energia che, però, riscalda solo le pareti, gli oggetti e le persone che “vedono” la fiamma. A comprova di ciò se si guarda la fiamma del caminetto la parte anteriore del corpo, quella che “vede” la fiamma, è calda mentre la schiena rimane più fredda. Inoltre, l’aria si può considerare trasparente alla radiazione, per cui viene riscaldata in modo convettivo dalle altre superfici riscaldate dall’irraggiamento.

Pertanto dovremo definire un parametro che ci indichi quanta energia che lascia una superficie incide sulle altre.

Consideriamo due superfici orientate arbitrariamente, A_i e A_j .

Supponiamo queste superfici:

- Isoterme
- Grigie
- Diffuse

Prendiamo su queste superfici due aree infinitesime dA_i e dA_j e chiamiamo $\vec{n}_i$ e $\vec{n}_j$ i vettori delle normali alle due superfici.

Definiamo $\vec{R}$ il vettore distanza ed θ_i e θ_j gli angoli tra $\vec{R}$ e $\vec{n}_i$ e $\vec{n}_j$.

In Figura 4-14 è rappresentata la geometria del problema.

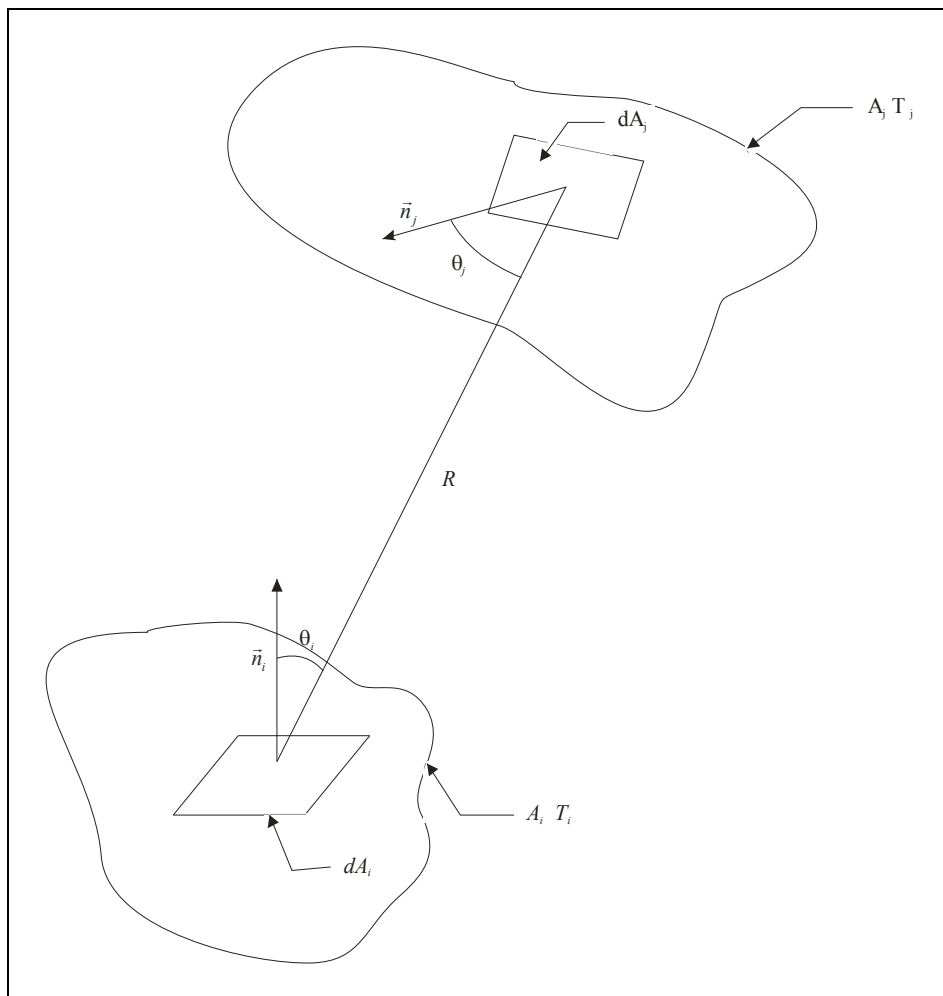


Figura 4-14: Geometria dello scambio termico radiativo tra due superfici

Definiamo fattore di vista, F_{ij} , il rapporto tra l'energia che lascia la superficie i e viene intercettata dalla superficie j e l'energia totale che lascia la superficie i .

Valutiamo intanto la potenza emessa da dA_i ed intercettata da dA_j .

La potenza che lascia la superficie dA_i attraverso la sua proiezione normale ad $\vec{R}$ è pari a $I_i \cos \theta_i dA_i$.

Per valutare quanta di questa energia incide sulla dA_j si deve considerare solo quella che sta all'interno dell'angolo solido $d\omega_{j-i}$, sotteso da dA_j rispetto a dA_i (vedi Figura 4-15).

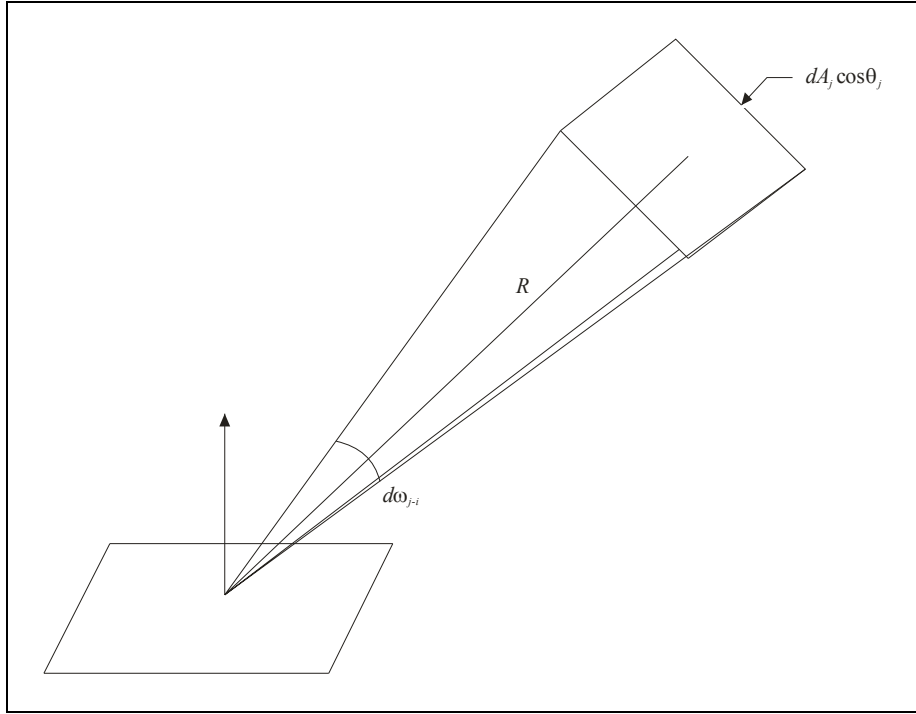


Figura 4-15: Angolo solido sotteso dA_j rispetto a dA_i .

Per cui:

$$dq_{i-j} = I_i \cos \theta_i dA_i d\omega_{j-i} \quad (4-41)$$

Ma dalla definizione di angolo solido si ricava che:

$$d\omega_{j-i} = \frac{dA_j \cos \theta_j}{R^2} \quad (4-42)$$

Sostituendo la (4-42) nella (4-41) si ottiene:

$$dq_{i-j} = I_i \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{R^2} dA_i dA_j \quad (4-43)$$

Essendo la superficie diffusa si ha che:

$$I_i = \frac{J_i}{\pi}$$

Si ottiene infine che:

$$dq_{i-j} = J_i \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi R^2} dA_i dA_j \quad (4-44)$$

Integrando la (4-44) si ricava che:

$$q_{i-j} = J_i \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi R^2} dA_i dA_j \quad (4-45)$$

Poiché la potenza totale emessa dalla superficie A_i è uguale a $A_i J_i$, il fattore di vista F_{ij} vale:

$$F_{ij} = \frac{q_{i-j}}{A_i J_i} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi R^2} dA_i dA_j \quad (4-46)$$

Come si può notare il fattore di vista è funzione solo della geometria del sistema. In modo analogo è possibile definire il fattore di vista F_{ji} :

$$F_{ji} = \frac{1}{A_j} \int_{A_j} \int_{A_i} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi R^2} dA_i dA_j \quad (4-47)$$

Confrontando la (4-46) con la (4-47) si ricava la **relazione di reciprocità**:

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji} \quad (4-48)$$

L'altra relazione importante è la **regola della somma**.

Consideriamo una cavità formata da N superfici.

Per il primo principio è possibile affermare che la potenza radiante che lascia la superficie i -esima è uguale alla somma delle potenze termiche che intercettano tutte le N superfici:

$$q_i = q_{i1} + q_{i2} + \dots + q_{ii} + \dots + q_{in} \quad (4-49)$$

Dividendo tutto per q_i e considerando la definizione di fattore di vista si ottiene:

$$F_{i1} + F_{i2} + \dots + F_{ii} + \dots + F_{in} = \sum_{j=1}^N F_{ij} = 1 \quad (4-50)$$

Si può notare che nella (4-50) compare anche il termine F_{ii} , che rappresenta la frazione di energia che lascia la superficie i -esima ed incide di nuovo su di essa. Se la superficie è piana o convessa $F_{ii} = 0$; se, invece, è concava $F_{ii} \neq 0$.

Per calcolare lo scambio termico radiativo di una cavità formata da N superfici si devono conoscere N^2 fattori di vista.

Se consideriamo il problema in termini matriciali il fatto è più evidente:

$$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdot & F_{1N} \\ F_{21} & F_{22} & \cdot & F_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{N1} & F_{N2} & \cdot & F_{NN} \end{vmatrix}$$

Per fortuna non è necessario calcolare tutti gli N^2 fattori di vista, grazie proprio alle due regole appena viste.

Infatti, grazie alla regola della somma si ricavano immediatamente N fattori di vista, per cui rimarrebbero da calcolare $N^2 - N = N(N-1)$ fattori di vista. Di questi ne posso ricavare la metà con la regola di reciprocità. In definitiva ne devo calcolare solo $\frac{N(N-1)}{2}$.

Quindi se ho una cavità formata da 3 superfici devo calcolare 3 fattori di vista; se la cavità è formata da 4 superfici i fattori di vista divengono 6; se le superfici sono 10 i fattori di vista diventano 45.

Essendo la legge quadratica anche un piccolo aumento delle superfici rende la soluzione molto più complessa.

Oltretutto, di solito la soluzione dell'integrale doppio che compare nella (4-47) non è banale.

Per fortuna in letteratura è possibile reperire i fattori di vista per numerose geometrie semplici, sia in forma tabellare, sia in forma grafica.

In tabella 4-1 sono riportati come esempio i fattori di vista per alcune semplici geometrie.

Per geometrie più complesse è necessario ricorrere a metodologie numeriche. Questi metodi, particolarmente complessi, sono implementati in diversi pacchetti sia commerciali, sia Open Source.

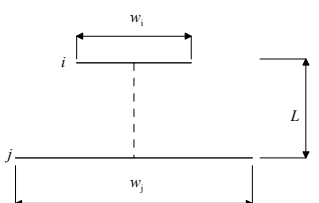
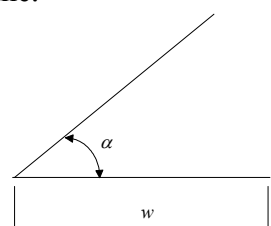
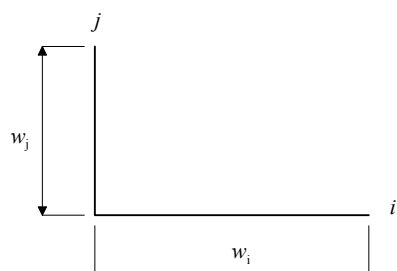
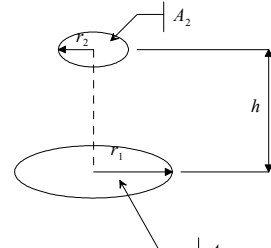
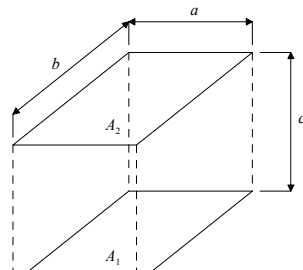
Geometria	Relazione
Piastre parallele con gli assi di simmetria allineati sulla perpendicolare. 	$W_i = \frac{w_i}{L} \quad W_j = \frac{w_j}{L}$ $F_{ij} = \frac{\left[(W_i + W_j)^2 + 4 \right]^{0,5} - \left[(W_j - W_i)^2 + 4 \right]^{0,5}}{2W_i}$
Piastre parallele inclinate di uguale lunghezza con un lato in comune. 	$F_{ij} = 1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
Piastre perpendicolari con un lato in comune. 	$F_{ij} = \frac{1 + \frac{w_j}{w_i} - \left[1 + \left(\frac{w_j}{w_i} \right)^2 \right]^{0,5}}{2}$
Dischi circolari paralleli con centri sulla stessa normale. 	$R_1 = \frac{r_1}{h} \quad R_2 = \frac{r_2}{h}$ $X = 1 + \frac{1 + R_2^2}{R_1^2}$ $F_{12} = \frac{1}{2} \left[X - \sqrt{X^2 - 4 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2} \right]$
Rettangoli uguali e paralleli. 	$X = \frac{a}{c} \quad Y = \frac{b}{c}$ $F_{12} = \frac{2}{\pi XY} \left\{ \ln \left[\frac{(1 + X^2)(1 + Y^2)}{1 + X^2 + Y^2} \right]^{0,5} + X \sqrt{1 + Y^2} \tan^{-1} \frac{X}{\sqrt{1 + Y^2}} + \right.$ $\left. Y \sqrt{1 + X^2} \tan^{-1} \frac{Y}{\sqrt{1 + X^2}} - X \tan^{-1} X - Y \tan^{-1} Y \right\}$

Tabella 4-1: Fattori di vista.

4.5.2 Scambio termico tra superfici nere.

Per introdurre il problema dello scambio termico tra superfici reali cominciamo con un problema semplice: quello dello scambio termico radiativo tra superfici nere.

Lo schema è rappresentato in Figura 4-16.

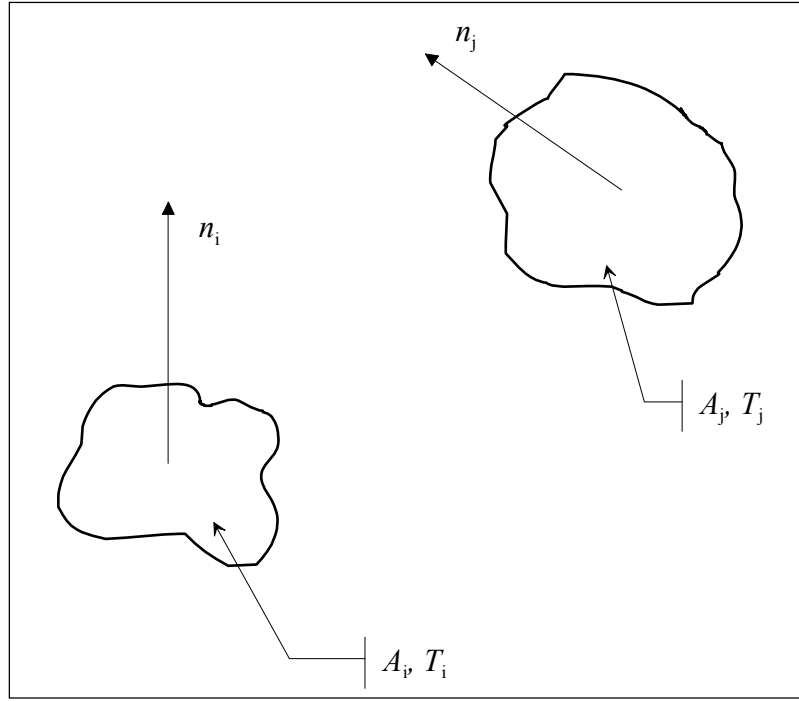


Figura 4-16: Superfici nere arbitrarie.

La potenza termica che lascia la superficie i ed incide sulla superficie j vale:

$$q_{i \rightarrow j} = E_{bi} A_i F_{ij} \quad (4-51)$$

La potenza termica che lascia la superficie j ed incide sulla superficie i vale, invece:

$$q_{j \rightarrow i} = E_{bj} A_j F_{ji} \quad (4-52)$$

La potenza netta scambiata tra le due superfici sarà uguale a:

$$q_{ij} = q_{i \rightarrow j} - q_{j \rightarrow i} \quad (4-53)$$

Sostituendo nella (4-53) la (4-51) e la (4-52), si ottiene:

$$q_{ij} = A_i F_{ij} E_{bi} - A_j F_{ji} E_{bj} \quad (4-54)$$

Ma per la relazione di reciprocità:

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$$

per cui la (4-54) diviene:

$$q_{ij} = A_i F_{ij} (E_{bi} - E_{bj}) = A_i F_{ij} \sigma (T_i^4 - T_j^4) \quad (4-55)$$

Estendendo il risultato appena ottenuto ad una cavità formata da N superfici si ottiene che la potenza netta scambiata dalla superficie i vale:

$$q_i = \sum_{j=1}^N A_i F_{ij} \sigma (T_i^4 - T_j^4) \quad (4-56)$$

Esempio 4-1

Trovare la potenza netta per unità di lunghezza scambiata tra due piastre perpendicolari con un lato in comune, supposte nere. Si supponga che il lato comune tra le due piastre abbia una lunghezza molto più grande dell'altra dimensione. La piastra 1 ha un'altezza $w_1 = 0,5 \text{ m}$ e una temperatura $t_1 = 90^\circ \text{C}$ mentre la piastra 2 ha un'altezza $w_2 = 1 \text{ m}$ e una temperatura $t_2 = 30^\circ \text{C}$.

Svolgimento

Avendo supposto le piastre nere si può applicare l'equazione (4-55)

Prima, però, bisogna valutare il fattore di vista. Dato che il lato comune è molto più grande delle rispettive altezze si può ritenere con buona approssimazione che il fattore di vista differisca poco da quello di due piastre semi infinite aventi un lato in comune. Si può, quindi, utilizzare l'espressione:

$$F_{12} = \frac{1 + \frac{w_2}{w_1} - \left[1 + \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 \right]^{0,5}}{2} = \frac{1 + \frac{1}{0,5} - \left[1 + \left(\frac{1}{0,5} \right)^2 \right]^{0,5}}{2} = 0,382$$

Quindi

$$\frac{q_{12}}{L} = w_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) = 0,5 \cdot 0,382 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} [(90 + 273,15)^4 - (30 + 273,15)^4] = 96,88 \frac{\text{W}}{\text{m}}$$

4.5.3 Scambio termico tra superfici grigie diffuse formanti una cavità

4.5.3.1 Introduzione

Lo scambio termico tra superfici reali è notevolmente più complesso rispetto a quello tra superfici nere. Ciò è dovuto alla dipendenza direzionale e spettrale della radiazione emessa e ricevuta dalla superficie. Inoltre in una cavità sono presenti riflessioni multiple.

Per semplificare il problema utilizzeremo le seguenti ipotesi, che bisogna tener bene a mente per poter essere consapevoli delle semplificazioni fatte:

- tutte le superfici sono isoterme
- la radiosità e l'irradianza sono uniformi
- le superfici sono grigie e diffuse
- il mezzo interno alla cavità è trasparente alla radiazione

4.5.3.2 Bilancio termico di una superficie

Consideriamo la superficie di Figura 4-17, in cui il volume di controllo coincide con la superficie stessa.

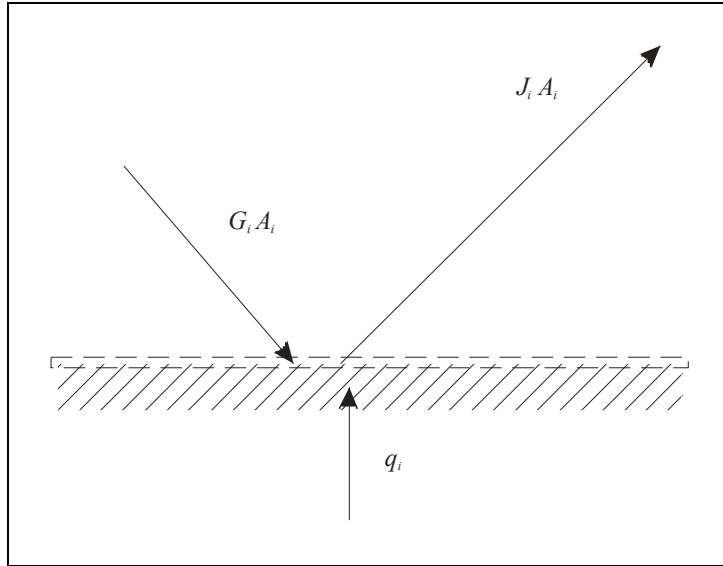


Figura 4-17: Bilancio termico su una superficie irradiata

Definita, q_i , la potenza radiata netta che lascia la superficie si avrà per il primo principio che:

$$q_i = A_i (J_i - G_i) \quad (4-57)$$

Ora, poiché la radiosità vale per definizione:

$$J_i = E_i + \rho_i G_i$$

Si ricava che:

$$G_i = \frac{J_i - E_i}{\rho_i} = \frac{J_i - E_i}{1 - \alpha_i} \quad (4-58)$$

Poiché le superfici sono per ipotesi grigie e diffuse vale la legge di Kirchhoff; per cui $\alpha_i = \varepsilon_i$ ed inoltre $E_i = \varepsilon_i E_{b,i}$.

Sostituendo questi valori nella (4-58) si ottiene:

$$G_i = \frac{J_i - \varepsilon_i E_{b,i}}{1 - \varepsilon_i} \quad (4-59)$$

Sostituendo la (4-59) nella (4-57) si ottiene:

$$q_i = A_i \left(J_i - \frac{J_i - \varepsilon_i E_{b,i}}{1 - \varepsilon_i} \right)$$

Che riordinata conduce, infine, alla:

$$q_i = \frac{A_i \varepsilon_i (E_{b,i} - J_i)}{1 - \varepsilon_i} = \frac{E_{b,i} - J_i}{\frac{1 - \varepsilon_i}{A_i \varepsilon_i}} \quad (4-60)$$

Dal punto di vista dell'analogia elettrotermica si ricava che il termine $\frac{1 - \varepsilon_i}{A_i \varepsilon_i}$ rappresenta una resistenza, mentre l'emissione globale di corpo nero, $E_{b,i}$, e la radiosità globale, J_i , rappresentano due potenziali.

Questa resistenza è definita: **Resistenza superficiale alla radiazione**

La resistenza superficiale è un indice di quanta radiazione si perde nel caso reale rispetto a quella che emetterebbe un corpo nero a quella temperatura.

4.5.3.3 Scambio termico tra più superfici formanti una cavità

Una superficie facente parte di una cavità viene irradiata dall'energia proveniente da tutte le N superfici della cavità.

Pertanto per il primo principio vale la relazione:

$$A_i G_i = \sum_{j=1}^N F_{ji} A_j J_j \quad (4-61)$$

Ma applicando la relazione di reciprocità, si ottiene:

$$A_i G_i = \sum_{j=1}^N F_{ij} A_i J_j \quad (4-62)$$

Sostituendo la (4-62) nella (4-57) si ricava che:

$$q_i = A_i \left(J_i - \sum_{j=1}^N F_{ij} J_j \right) \quad (4-63)$$

Per la regola della somma si può riscrivere la (4-63) come:

$$q_i = A_i \left(\sum_{j=1}^N F_{ij} J_i - \sum_{j=1}^N F_{ij} J_j \right)$$

Quindi:

$$q_i = \sum_{j=1}^N F_{ij} A_i (J_i - J_j) = \sum_{j=1}^N \frac{J_i - J_j}{\frac{1}{F_{ij} A_i}} \quad (4-64)$$

Il termine $\frac{1}{F_{ij} A_i}$ viene chiamato **resistenza geometrica**.

Il problema dello scambio termico in cavità può, quindi, essere schematizzato con la rete di resistenze visibile in Figura 4-18.

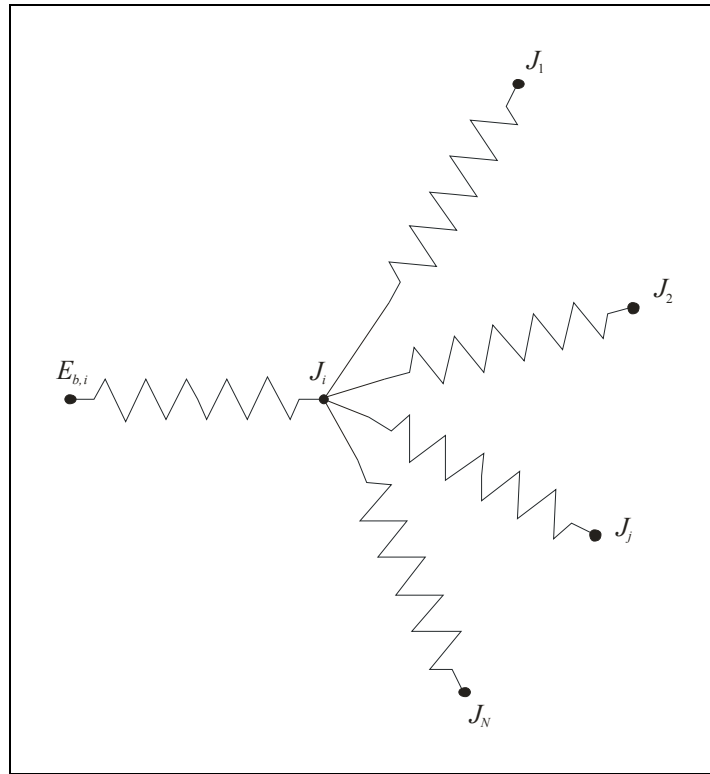


Figura 4-18: Analogia elettrotermica per lo scambio termico radiativo in cavità

Combinando la (4-60) con la (4-64) si ricava che:

$$\frac{E_{b,i} - J_i}{\frac{1 - \varepsilon_i}{A_i \varepsilon_i}} = \sum_{j=1}^N \frac{J_i - J_j}{\frac{1}{F_{ij} A_i}} \quad (4-65)$$

La (4-65) si utilizza preferibilmente quando è nota la temperatura della superficie in quanto si conosce E_b , mentre la (4-64) si utilizza quando è nota la potenza, q_i .

Per risolvere in modo completo lo scambio termico in una cavità formata da N superfici, poiché le incognite sono le N radiosità si deve scrivere un sistema di N equazioni utilizzando la (4-65), dove sono note le temperature della superficie e la (4-64) laddove è nota la potenza.

Nei casi reali, quindi, il problema è numericamente complesso, per cui, anche con relativamente poche superfici, si è obbligati ad utilizzare dei software per risolvere questi sistemi di equazioni lineari ed algebriche.

4.5.3.4 Scambio termico in una cavità formata da due superfici grigie.

Lo schema generale è quello riportato in Figura 4-19.

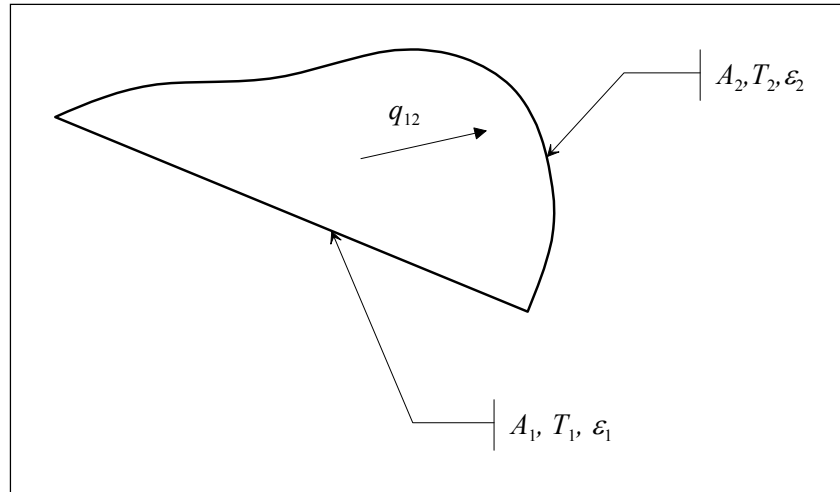


Figura 4-19: Scambio termico in cavità formata da due superfici grigie.

Con due sole superfici la rete di resistenze di Figura 4-18 si riduce ad una serie di tre resistenze, come indicato in Figura 4-20: 2 resistenze di superficie ed una resistenza geometrica.

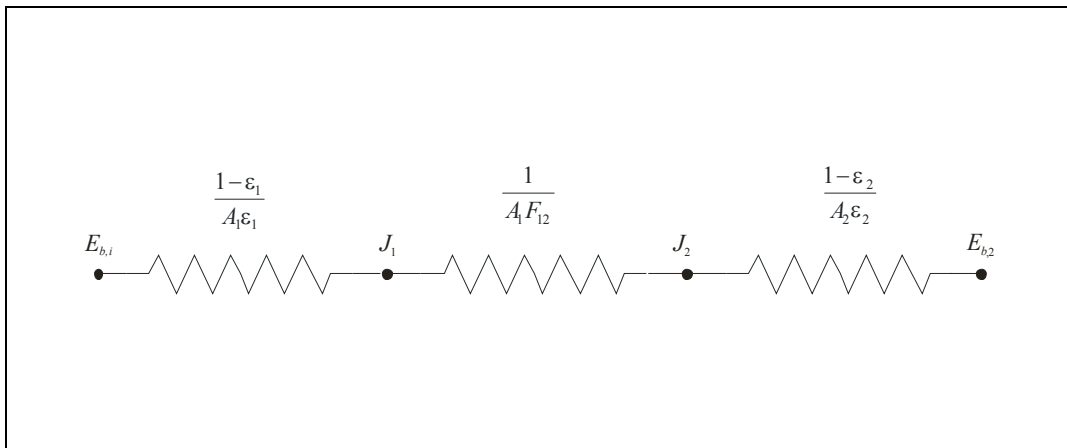


Figura 4-20: Rete elettrica equivalente nello scambio termico radiativo in cavità tra due superfici grigie diffuse

In definitiva la potenza scambiata in questa cavità vale:

$$q_{12} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1-\varepsilon_1}{A_1\varepsilon_1} + \frac{1}{A_1F_{12}} + \frac{1-\varepsilon_2}{A_2\varepsilon_2}} \quad (4-66)$$

Per chiudere l'argomento vedremo alcuni casi particolari.

- **Lastre piane parallele di dimensioni infinite.**

In questo caso le due superfici sono uguali, cioè: $A_1=A_2=A$ e ovviamente $F_{12}=1$, poiché tutto quello che lascia la superficie 1 è intercettato dalla superficie 2. Lo schema è rappresentato in Figura 4-21.

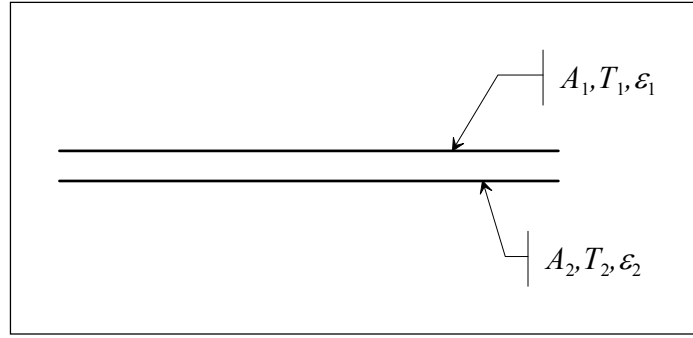


Figura 4-21: Lastre piane parallele infinite.

Sotto queste ipotesi la (4-66) si riduce a:

$$q_{12} = \frac{A\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \quad (4-67)$$

- **Cilindri concentrici di lunghezza infinita.**

Lo schema è rappresentato in Figura 4-22

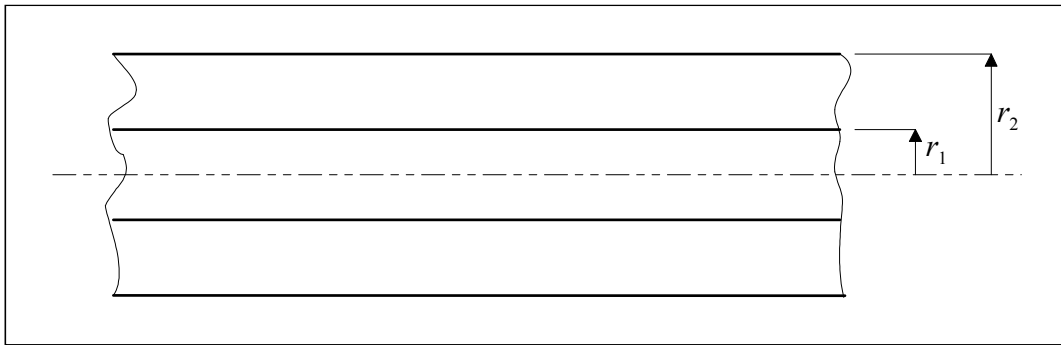


Figura 4-22: Cilindri concentrici infiniti.

Raccogliamo nella (4-66) A_1 . Si ottiene:

$$q_{12} = \frac{A_1\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{F_{12}} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \left(\frac{A_1}{A_2} \right)}$$

Ma

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{e } F_{12} = 1$$

Sostituendo e semplificando si ottiene:

$$q_{12} = \frac{A_1\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)} \quad (4-68)$$

- **Sfere concentriche.**

Lo schema è rappresentato in Figura 4-23.

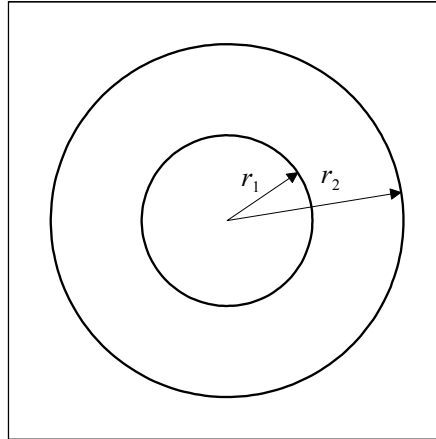


Figura 4-23: Sfere concentriche.

Applicando un procedimento analogo a quello utilizzato per i cilindri si giunge all'equazione:

$$q_{12} = \frac{A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2} \quad (4-69)$$

- **Piccolo corpo convesso in una grande cavità.**

Lo schema è rappresentato in Figura 24

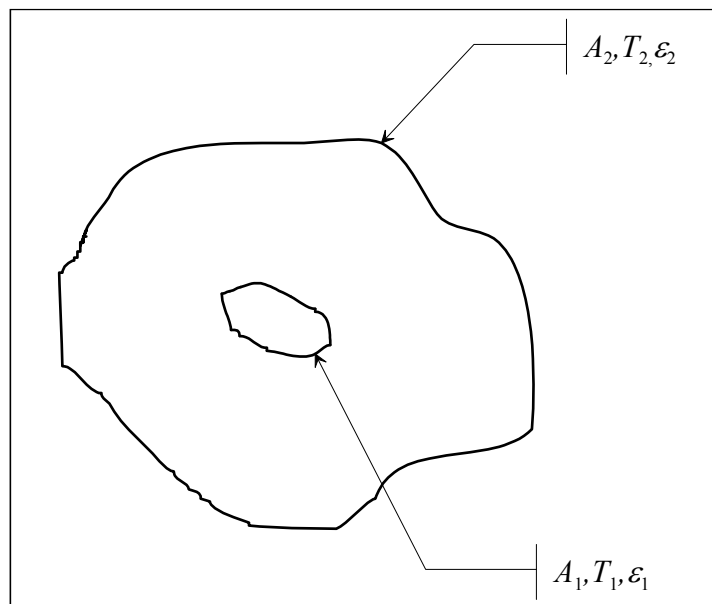


Figura 4-24: Piccolo corpo convesso in grande cavità.

Il fattore di vista F_{12} è unitario, poiché tutto quello che lascia la superficie piccola e convessa non può che intercettare la superficie più grande. Se la superficie non fosse convessa F_{11} sarebbe diverso

da 0 e il problema diventerebbe ben più complesso, dato che dovremmo valutare uno dei fattori di vista; gli altri si ricavano applicando la legge di reciprocità e quella della somma. Se nella (4-66) raccolgo l'area più piccola, A_1 , e tengo conto che $F_{12}=1$, ottengo:

$$q_{12} = \frac{A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + 1 + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \left(\frac{A_1}{A_2} \right)} \quad (4-70)$$

Ora, dato che $\frac{A_1}{A_2} \approx 0$, la (4-70) diviene:

$$q_{12} = \varepsilon_1 A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (4-71)$$

4.5.3.5 Schermi alla radiazione

Consideriamo due piastre estese piane parallele. La potenza termica scambiata è data circa dalla (4-21). Il circa è dovuto al fatto che questa formula è rigorosamente vera solo per piastre infinite, ma se la distanza fra le due piastre è piccola in confronto alle altre due dimensioni, allora il fattore di vista F_{12} sarà circa uguale ad 1.

Per ridurre la potenza termica si può introdurre una lastra molto sottile di materiale con bassa emissività. È quello che viene fatto in alcuni abbigliamenti tecnici o in certi sacchi a pelo leggeri.

Dal punto di vista dell'analogia elettrotermica aggiungere uno schermo significa fondamentalmente aggiungere tre resistenze: due resistenze di superficie ed una geometrica.

Lo schema è visibile in Figura 4-25 e la rete di resistenze è rappresentata in Figura 4-26.

La potenza termica scambiata, tenendo conto che i fattori di vista sono unitari, è, quindi, uguale a:

$$q_{12} = \frac{A \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1 - \varepsilon_{3,1}}{\varepsilon_{3,1}} + \frac{1 - \varepsilon_{3,2}}{\varepsilon_{3,2}}} \quad (4-72)$$

Si osserva che, se le emissività dello schermo alla radiazione sono piccole, le rispettive resistenze diventano grandi, riducendo notevolmente la potenza scambiata.

Se inserisco un altro schermo, devo aggiungere altre tre resistenze: due resistenze di superficie e una geometrica. Nel caso che le emissività delle superfici degli schermi siano tutte uguali, la potenza termica trasmessa è uguale a:

$$(q_{12})_N = \frac{1}{N+1} (q_{12})_0 \quad (4-73)$$

Dove:

N è il numero degli schermi

$(q_{12})_0$ è la potenza trasmessa in assenza di schermi ($N=0$)

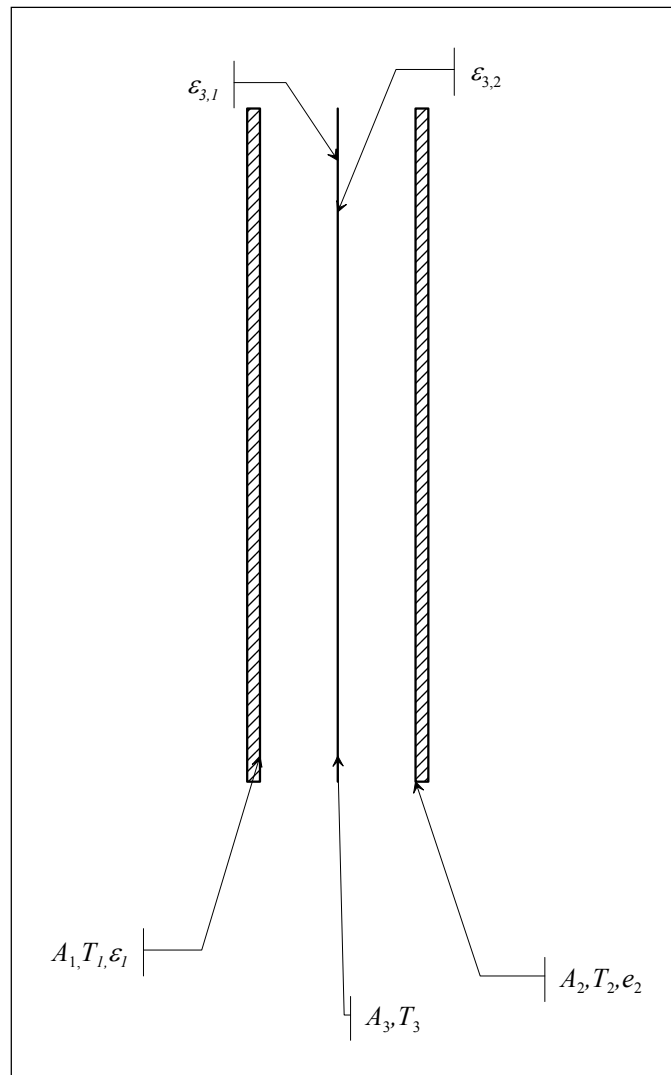


Figura 4-25: Schermi alla radiazione.

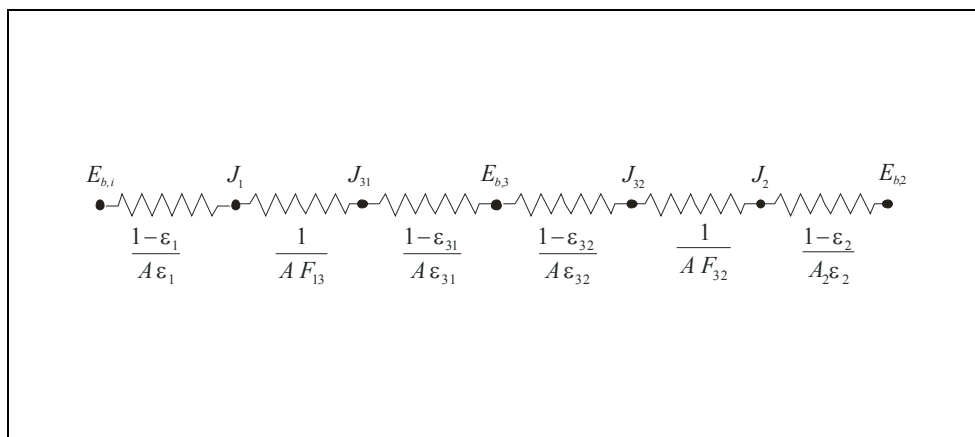


Figura 4-26: Rete elettrica equivalente nello scambio termico radiativo in presenza di uno schermo

Esempio 4-2

Una massa di ossigeno in condizioni di ebollizione ($t_1 = -183^\circ\text{C}$) è conservata in un serbatoio formato da due gusci sferici concentrici nella cui intercapedine si è fatto il vuoto. Il diametro del guscio interno, in cui è conservato l'ossigeno, è uguale a $D_1 = 300\text{ mm}$, mentre il guscio esterno ha

un diametro $D_2 = 450 \text{ mm}$. Entrambe le sfere sono di alluminio lucidato con un emissività pari a $\varepsilon = 0,03$ e la temperatura della sfera esterna è uguale a $t_2 = -1^\circ \text{C}$.
Calcolare la potenza termica scambiata per irraggiamento.

Svolgimento

Dato che all'interno della sfera piccola ci troviamo in condizioni di ebollizione, la temperatura rimane costante.

Le temperature delle superfici valgono:

$$T_1 = 273 - 183 = 90 \text{ K}$$

$$T_2 = 273 - 1 = 272 \text{ K}$$

La potenza termica scambiata vale:

$$q_{12} = \frac{A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2} = -182 \text{ W}$$

Esempio 4-3

Una termocoppia avente un emissività $\varepsilon = 0,85$ viene utilizzata per misurare la temperatura di un gas trasparente, che fluisce in una tubazione di $D_n = 300$. Le pareti della condotta sono ad una temperatura $t_p = 227^\circ \text{C}$. La termocoppia misura una temperatura uguale a $t_t = 527^\circ \text{C}$.

Sapendo che il coefficiente convettivo h_c tra la superficie della termocoppia ed il gas vale $150 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$, valutare l'effettiva temperatura del gas.

Svolgimento.

La temperatura della termocoppia è minore di quella reale del gas a causa dello scambio termico radiativo tra la superficie della sonda e le pareti della tubazione.

In condizioni di regime lo scambio termico radiativo tra termocoppia e pareti è uguale a quello convettivo tra gas e termocoppia.

La superficie della tubazione "vista" dalla sonda è molto più grande, di quest'ultima (il diametro della termocoppia è di solito inferiore al millimetro). Pertanto si può applicare la formula:

$$q = \varepsilon_t A_t \sigma (T_t^4 - T_p^4)$$

In condizioni di regime vale il seguente bilancio:

$$q = h_c A_t (T_g - T_t) = \varepsilon_t A_t \sigma (T_t^4 - T_p^4)$$

Da cui si ricava che:

$$T_g = \frac{\varepsilon \sigma (T_t^4 - T_p^4)}{h_c} + T_t$$

Ricordando che le temperature vanno espresse in K si ricava che:

$$T_g = \frac{0,85 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} (800^4 - 500^4)}{150} + 800 = 911,5K = 638,5^\circ C$$

4.6 Cenni sull'irraggiamento solare

L'irraggiamento solare è un fenomeno importantissimo, in quanto, oltre a permettere la vita sul nostro pianeta, condiziona il clima, sia su grande, sia su piccola scala e rappresenta una fonte non trascurabile, anche se non risolutiva, di energia.

L'equilibrio termico del sistema terra è determinato dalla differenza di due enormi quantità di energia radiante: quella proveniente dal sole e quella irradiata dalla terra verso lo spazio. Come sappiamo è un equilibrio molto delicato, in quanto anche piccoli innalzamenti della temperatura media dell'atmosfera terrestre possono generare cambiamenti climatici consistenti.

Dal punto di vista energetico, l'energia solare può essere sfruttata per produrre energia, sia termica (solare termico e termodinamico), sia elettrica (solare fotovoltaico). Inoltre, condiziona sensibilmente l'equilibrio termico degli edifici; per tale motivo nell'ottica del risparmio energetico non è più possibile trascurare nella progettazione architettonica degli edifici l'influsso dell'energia solare. Se in inverno l'irraggiamento solare rappresenta un apporto gratuito di energia nel bilancio termico di un edificio, in estate, invece, rappresenta un carico termico da compensare, o con un impianto di raffrescamento, o con uno di condizionamento.

Vediamo, ora, di valutare la potenza radiante che investe la superficie terrestre.

Al limite esterno dell'atmosfera il valore medio della potenza che incide su una superficie normale alla direzione della radiazione vale 1353 W/m^2 . Questa costante prende il nome di costante solare, S_c . Il valore dell'irradianza che inciderebbe su una superficie posta al limite dell'atmosfera varia, sia con la posizione della terra lungo la sua orbita attorno al sole ($\pm 3,4\%$), sia con l'angolo zenitale, θ .

$$G_{s,e} = S_c \left[1 + 0,034 \cos \left(\frac{2\pi n}{365} \right) \right] \cos \theta \quad (4-75)$$

Dove:

S_c è la costante solare

n è il numero del giorno dell'anno

θ è l'angolo zenitale

Dalla formula si vede che per sfruttare a pieno l'energia radiante dovrei inclinare la superficie dell'angolo θ rispetto all'orizzonte. L'angolo zenitale è funzione, sia dell'ora del giorno, sia di n . Alle nostre latitudini l'angolo ottimale è di circa 30° , mentre a mezzogiorno coincide circa con la latitudine.

Come si può vedere in Figura 4-27, si può ritenere che all'esterno dell'atmosfera l'irradianza coincida con buona approssimazione a quella di un corpo nero la cui temperatura è di 5760 K .

La curva dell'irradianza monocromatica solare misurata sulla superficie terrestre è decisamente diversa. Oltre ad avere valori decisamente più bassi a causa dei fenomeni di assorbimento e scattering, presenta ad alcune lunghezze d'onda dei valori sensibilmente più bassi a causa dell'assorbimento selettivo di alcuni gas.

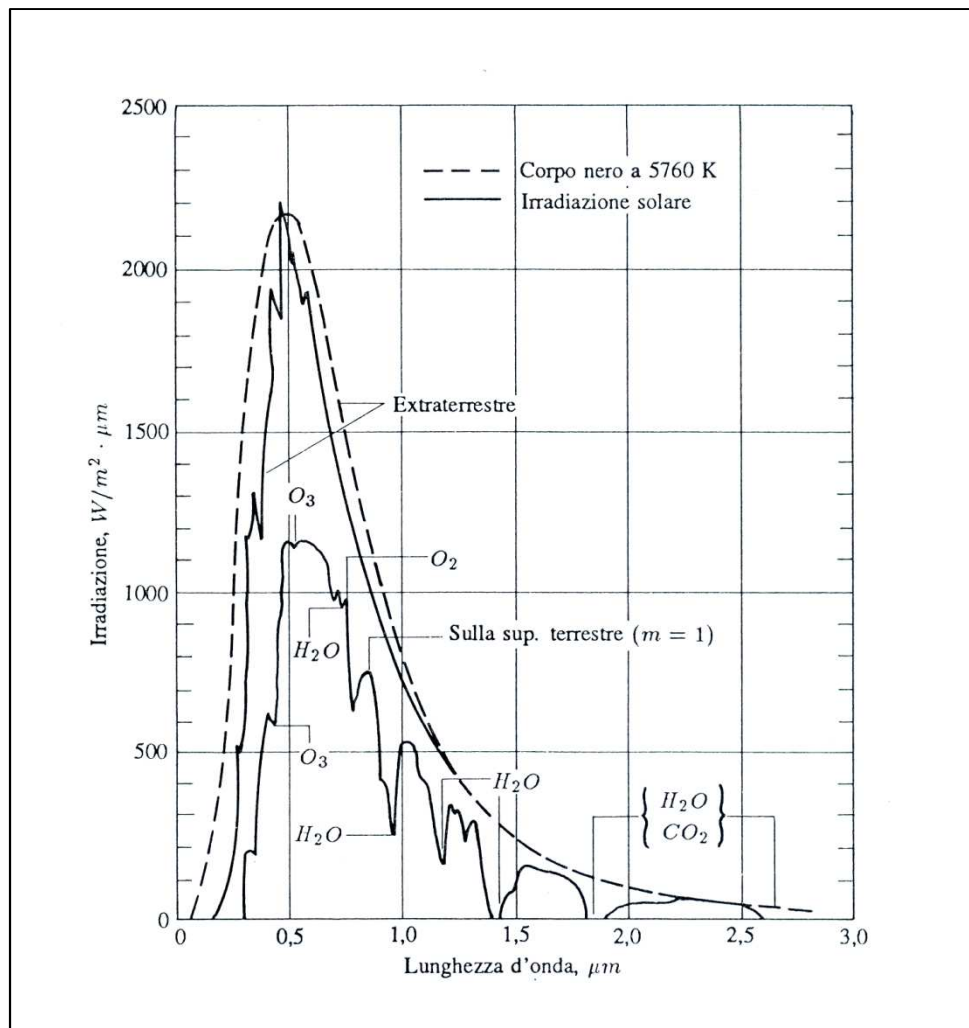


Figura 4-27: Irradianza monocromatica solare

Nella zona dell'ultravioletto l'assorbimento è dovuto soprattutto all'ozono (O_3); in quella del visibile, invece, l'assorbimento è dovuto principalmente all'ossigeno, mentre nella zona dell'infrarosso è dovuto al vapor d'acqua e all'anidride carbonica.

Come si può osservare in Figura 4-28, circa il 30% dell'irradianza solare viene riflessa nello spazio dall'atmosfera e dalla superficie terrestre, circa il 20% viene assorbito dall'atmosfera (aria e nuvole) e circa il 50% raggiunge la superficie terrestre.

Oltre al fenomeno dell'assorbimento (che varia con legge esponenziale in funzione del coefficiente di assorbimento del gas considerato e dello spessore dello strato), vi è anche il fenomeno della diffusione (scattering) generato dall'interazione della radiazione solare con le molecole di gas e vapori e con le particelle di polveri ed aerosol presenti in atmosfera.

Esistono due modelli fondamentali per caratterizzare il fenomeno dello scattering:

- la diffusione molecolare o scattering di Rayleigh.
- la diffusione di Mie o Mie scattering.

Lo scattering di Rayleigh è dovuto principalmente all'interazione tra la radiazione e le molecole di gas e vapori. Questo scattering provoca la riflessione dell'energia in tutte le direzioni ed è funzione di $(1 + \cos^2 \theta)$, dove θ è l'angolo rispetto alla direzione della radiazione incidente, e dell'inverso della quarta potenza della lunghezza d'onda.

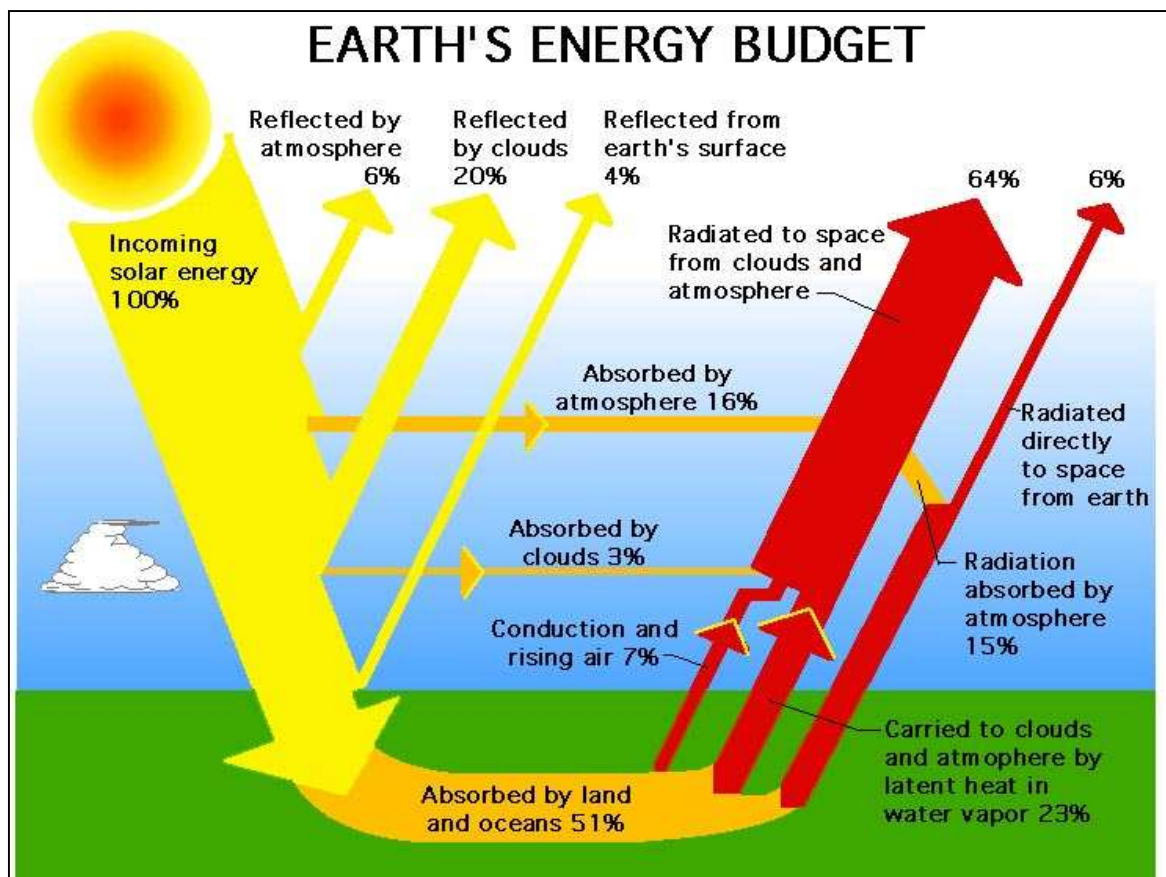


Figura 4-28: Bilancio energetico della terra (Fonte NASA)

Quindi, il 50% dell'energia diffusa viene riflessa verso lo spazio. Inoltre, le lunghezze d'onda più corte vengono maggiormente diffuse. Per questo motivo il cielo appare azzurro. Il Mie scattering è generato dalla presenza in atmosfera di polveri ed aerosol. La diffusione è concentrata in angoli prossimi a quelli dell'energia incidente (Vedi Figura 4-29)

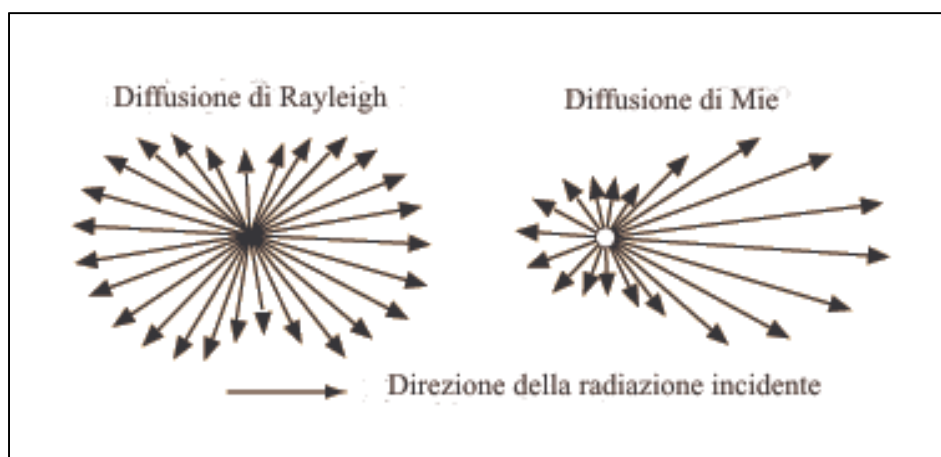


Figura 4-29: Rayleigh e Mie Scattering

A causa di questi fenomeni la superficie terrestre è irradiata da una componente diretta e da una diffusa. La componente diffusa varia a seconda della copertura del cielo da un 10 % della radiazione totale incidente nelle giornate serene a quasi il 100% quando il cielo è coperto. Come indicato in Figura 4-28, parte dell'energia solare incidente e parte di quella emessa dalla superficie terrestre viene assorbita dall'atmosfera e dalle nuvole. Le molecole simmetriche, come i gas monoatomici ed alcuni gas biatomici, tra cui l'ossigeno e l'azoto, sono trasparenti alla

radiazione solare, mentre le molecole asimmetriche, come CO_2 , H_2O , CH_4 , O_3 , NH_3 , NO_2 e SO_2 , assorbono energia sotto forma di energia rotazionale e vibrazionale.

A sua volta, quindi, l'atmosfera emetterà energia che irradianza la superficie terrestre. Bisognerebbe conoscere l'emissività dell'atmosfera, ma per i calcoli ingegneristici è spesso conveniente considerare l'atmosfera un corpo nero che emette ad una appropriata temperatura. Per cui l'irradianza che arriva dall'atmosfera, G_{sky} , è uguale a quella emessa da essa:

$$G_{sky} = \sigma T_{sky}^4 \quad (4-76)$$

Dove T_{sky} è una temperatura che dipende dalla temperatura dell'aria, T_a , dalla temperatura di rugiada, T_R , dall'ora solare, τ , e dalla copertura del cielo.

T_{sky} può variare in un range che va circa 230 K (-43 °C) nelle giornate fredde e limpide a circa 285 K (12 °C), nelle giornate calde e nuvolose.

Esistono in letteratura formule per valutare questa temperatura.

Per esempio, per le giornate limpide si può utilizzare la seguente formula:

$$T_{sky} = T_a \left[0,711 + 0,0056t_R + 7,3 \cdot 10^{-5} t_R^2 + 0,013 \cos\left(\frac{2\pi\tau}{24}\right) \right]^{0,25} \quad (4-77)$$

Dove

T_{sky} e T_a sono espresse in Kelvin, mentre t_R è espressa in gradi Celsius.

Si può, poi, ritenere che la superficie terrestre emetta come una superficie grigia.

$$E_T = \varepsilon_T \sigma T_T^4 \quad (4-78)$$

dove

ε_T è l'emissività della superficie terrestre, il cui valore è prossimo a 1 (per esempio per l'acqua si può assumere il valore 0,97).

T_T è la temperatura della superficie considerata (di solito $250 < T_T < 320$ K)

Come si può notare considerando i range di temperatura in gioco, sia l'atmosfera, sia la superficie terrestre emettono nel campo dell'infrarosso.

Esempio 4-4

Consideriamo un collettore solare piano formato da una piastra in acciaio rivestita da nero di cromo su nickel. Il materiale di rivestimento presenta un coefficiente di assorbimento nel campo della radiazione solare, α_s , pari a 0,95 ed un emissività nel campo dell'infrarosso, ε_{IR} , pari a 0,1. Supponiamo che la piastra a mezzogiorno raggiunga la temperatura di 60 °C, costante su tutta la piastra, che l'irradiazione solare normale alla piastra sia di 750 W/m² e che tutta la potenza specifica netta assorbita, q_u'' , sia trasferita al fluido vettore.

La temperatura dell'aria, T_a , è uguale a 30 °C e l'umidità relativa è del 50%. Supponiamo, inoltre, che il coefficiente convettivo valga $5 \frac{W}{m^2 K}$.

Calcolare:

1. La potenza specifica utile, q_u'' , trasmessa al fluido vettore.
2. L'efficienza del pannello

Svolgimento.

In Figura 4-30 è rappresentata la schematizzazione del problema

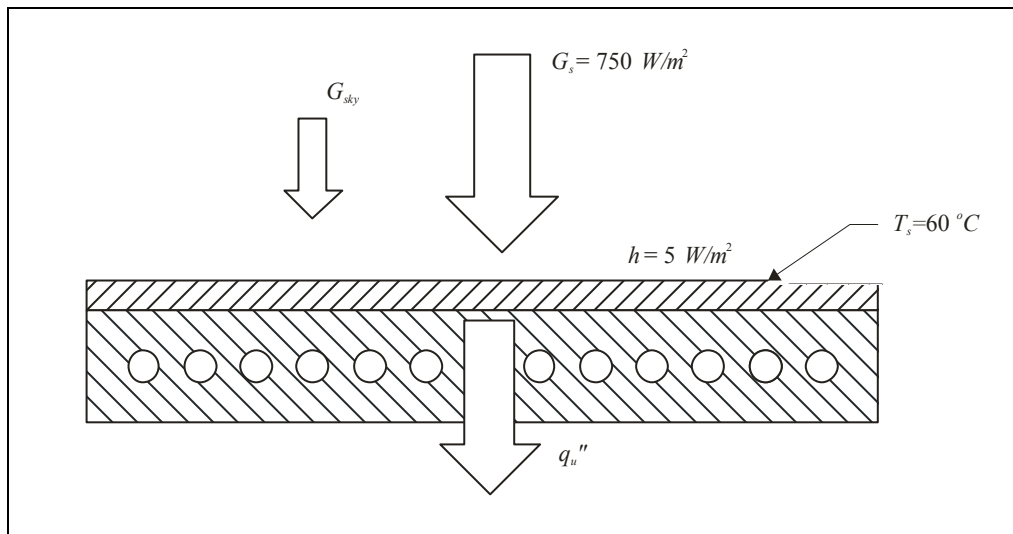


Figura 4-30: Collettore solare

Le ipotesi di partenza che dobbiamo aver ben chiare sono:

- condizioni stazionarie
- distribuzione uniforme della temperatura sulla superficie captante
- piastra in acciaio ben isolata inferiormente e lateralmente, per cui tutta l'energia solare netta viene trasferita al fluido
- superficie assorbente diffusa

Come volume di controllo consideriamo lo strato di rivestimento, come rappresentato in Figura 4-31.

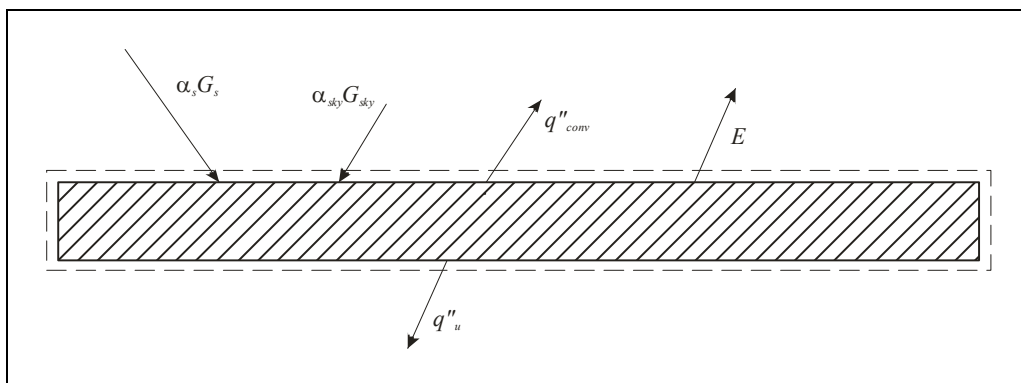


Figura 4-31: Superficie di controllo

Poiché siamo in condizioni stazionarie, l'equazione del primo principio si riduce a:

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} = 0$$

Esplicitando i termini e ragionando per unità di area si ottiene:

$$\alpha_s G_s + \alpha_{sky} G_{sky} - q_{conv}'' - E - q_u'' = 0$$

In questa relazione non conosciamo né α_{sky} , né T_{sky} . Poiché, sia l'atmosfera, che la piastra emettono nello stesso campo di lunghezze d'onda (l'infrarosso) possiamo ritenere che valga la legge di Kirchhoff, per cui:

$$\alpha_{sky} = \varepsilon_{IR} = 0,1$$

Dobbiamo, ora, calcolare la temperatura effettiva del cielo.

Da un diagramma psicrometrico si ricava che la temperatura di rugiada vale:

$$t_R = 18,3 \text{ } ^\circ C$$

Per cui dall'equazione (4-77) si ricava che:

$$T_{sky} = 291 K = 17,9 \text{ } ^\circ C$$

Per cui, riordinando l'equazione del bilancio energetico, si ottiene:

$$q_u'' = \alpha_s G_s - h(T_s - T_a) - \varepsilon_{IR} \sigma (T_s^4 - T_{sky}^4)$$

$$q_u'' = 0,95 \cdot 750 - 5 \cdot (60 - 30) - 0,1 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} (333^4 - 291^4) = 533,4 \frac{W}{m^2 K}$$

L'efficienza del pannello è uguale a:

$$\eta = \frac{q_u''}{G_s} = \frac{533,4}{750} = 0,71$$

Esempio 4-5

Consideriamo gli stessi dati dell'esempio precedente, solo che ora il pannello viene ricoperto da una lastra di vetro singolo a basso tenore di ossido di ferro e nell'intercapedine tra vetro e materiale di rivestimento è praticato il vuoto.

Le caratteristiche radiative del vetro sono:

- coefficiente di trasmissione nello spettro solare $\tau_{v,s} = 0,92$
- coefficiente di assorbimento nello spettro solare $\alpha_{v,s} = 0,04$
- coefficiente di trasmissione nel campo dell'infrarosso $\tau_{v,IR} \approx 0$
- emissività del vetro nel campo dell'infrarosso $\varepsilon_{v,IR} = 0,88$

Svolgimento.

Lo schema geometrico è quello riportato in Figura 4-32.

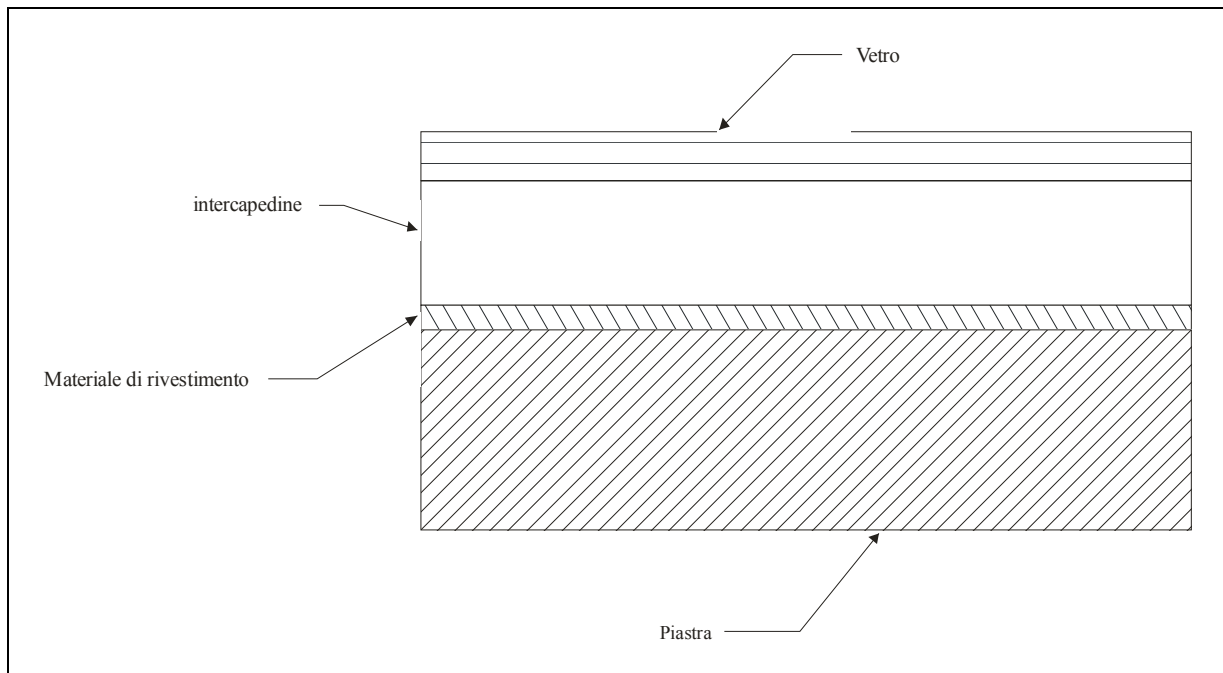


Figura 4-32: Schema geometrico di un collettore con vetro

Analizziamo quanto le ipotesi aggiuntive ci allontanano dalla realtà:

- In realtà il coefficiente di trasmissione del vetro nell'infrarosso non è nullo ($\sim 0,12$), per cui vi sarà uno scambio termico, se pur piccolo, tra il materiale di rivestimento e il cielo.
- Di solito nell'intercapedine non c'è il vuoto ma aria e, quindi, vi è uno scambio termico convettivo tra piastra e aria. L'abbiamo eliminato per semplicità di calcolo, in quanto per valutare il coefficiente convettivo bisognerebbe conoscere la temperatura del vetro che è incognita.
- Trascuriamo gli scambi termici radiativi tra il materiale di rivestimento e le superfici laterali del collettore.

Consideriamo, come fatto nell'esempio precedente, che il volume di controllo coincide con lo strato del materiale di rivestimento.

Avremo che l'irradianza solare che incide sulla superficie è uguale alla parte di irradianza solare trasmessa dal vetro. Vi sarà, inoltre, uno scambio termico radiativo tra la superficie del volume di controllo e quella del vetro.

Il bilancio di energia è, quindi, uguale a:

$$q_u'' = \tau_s \alpha_s G_s - q_{p-v}''$$

Dove q_{p-v}'' è uguale a:

$$q_{p-v}'' = \frac{\sigma(T_s^4 - T_v^4)}{\frac{1 - \varepsilon_{p,IR}}{\varepsilon_{p,IR}} - \frac{1}{F_{p-v}} + \frac{1 - \varepsilon_{v,IR}}{\varepsilon_{v,IR}}}$$

Poiché F_{p-v} è uguale a 1 l'equazione diviene:

$$q_{p-v}'' = \frac{\sigma(T_s^4 - T_v^4)}{\frac{1}{\varepsilon_{p,IR}} + \frac{1}{\varepsilon_{v,IR}} - 1}$$

Purtroppo la temperatura del vetro è incognita, per cui bisogna eseguire un bilancio di energia sul vetro considerando come volume di controllo la superficie del vetro (Figura 4-33).

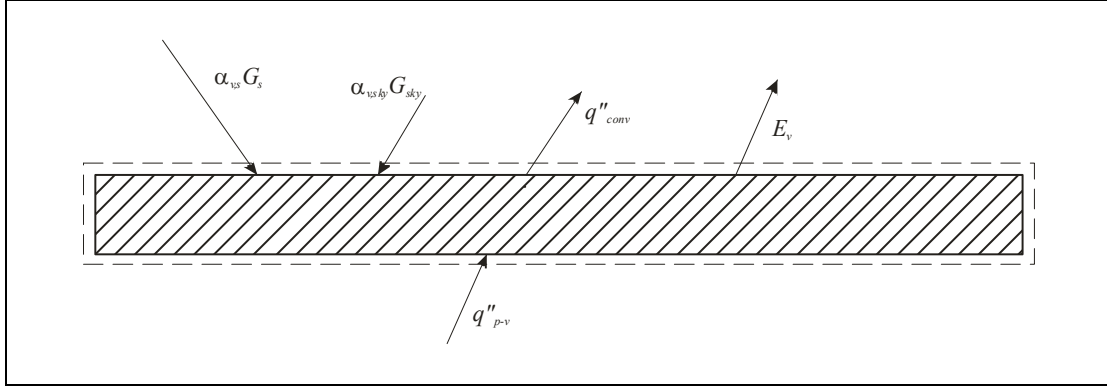


Figura 4-33: Bilancio di energia sul vetro

Poiché possiamo considerare $\alpha_{sky} = \varepsilon_{v,IR}$ si avrà che:

$$\alpha_{v,s} G_s - \varepsilon_{v,IR} \sigma(T_v^4 - T_{sky}^4) - h(T_v - T_a) + \frac{\sigma(T_s^4 - T_v^4)}{\frac{1}{\varepsilon_{p,IR}} + \frac{1}{\varepsilon_{v,IR}} - 1} = 0$$

Sostituendo i valori numerici e riordinando, si ottiene:

$$-5,55 \cdot 10^{-8} T_v^4 - 5 T_v + 1971,6 = 0$$

Che risolta iterativamente fornisce il risultato:

$$T_v \approx 302 \text{ K} = 29 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Quindi:

$$q_u'' = 0,92 \cdot 0,95 \cdot 750 - \frac{5,67 \cdot 10^{-8} (333^4 - 302^4)}{10,13} = 633,2 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

E l'efficacia del collettore vale:

$$\eta = \frac{633,2}{750} = 0,84$$

Come si può osservare il rendimento è sensibilmente più alto di quello senza vetro, anche considerando il fatto che il coefficiente convettivo utilizzato non è particolarmente alto, tipico di una giornata con pochissimo vento. Già considerando un coefficiente convettivo dell'ordine di 10

$W/(m^2K)$ il rendimento del collettore senza vetro scende al 51%, mentre quello del collettore con il vetro rimane sostanzialmente costante.

In realtà le efficienze calcolate sono alte in quanto si sono trascurati diversi effetti (non uniformità della temperatura della piastra, perdite di calore attraverso la cassa del collettore, scambio radiativo con le superfici laterali del collettore, ecc.).

5 Scambiatori di calore.

5.1 Introduzione.

Lo scopo degli scambiatori di calore quello di trasferire energia termica fra due fluidi a temperatura diversa. Tratteremo solo gli scambiatori a contatto indiretto in cui il fluido caldo e quello freddo non vengono miscelati.

Sono apparecchiature che ritroviamo, anche se con nomi diversi in tutti i campi della tecnica.

Per esempio sono scambiatori di calore le caldaie, gli evaporatori, i condensatori, i radiatori automobilistici, i caloriferi, etc.

Gli scambiatori sono usualmente classificati in funzione del tipo di flusso che gli attraversa e dal tipo di costruzione.

Il tipo più semplice, anche se poi quasi mai usato, è quello a tubi concentrici, rappresentato in Figura 5-1. La configurazione può essere in equicorrente, quando i flussi dei due fluidi scorrono nello stesso verso, o in controcorrente quando i versi sono opposti.

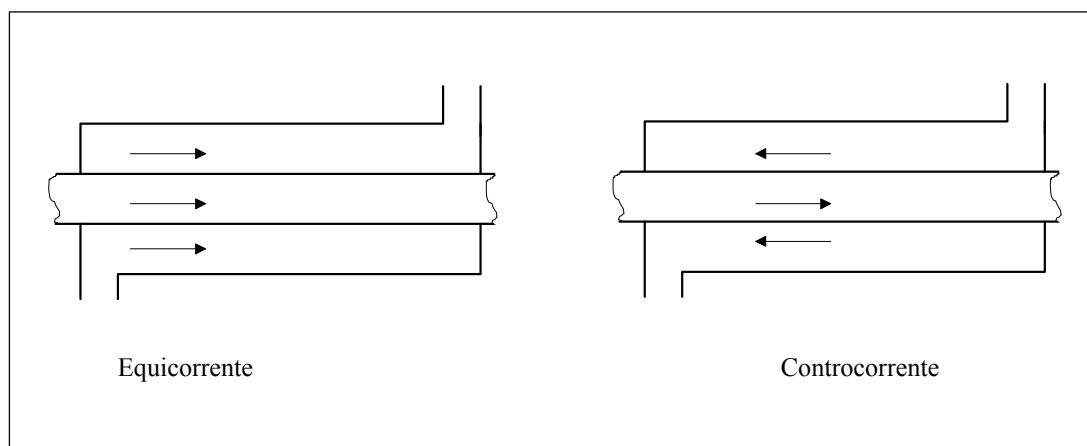


Figura 15-1: Scambiatori a tubi concentrici.

Un'altra configurazione molto comune è quella in cui i moti dei fluidi sono incrociati, come schematizzato in Figura 5-2. In questo caso i tubi possono essere alettati o non alettati.

Nel primo caso non vi è miscelazione del fluido, per cui la temperatura varierà lungo lo scambiatore e anche attraverso la sezione di passaggio. Nel secondo caso vi è miscelazione del fluido, perciò la temperatura sarà funzione solo della posizione lungo lo scambiatore.

Una configurazione molto usata in campo industriale è lo scambiatore a fascio tubiero.

Lo schema è visibile in Figura 5-3.

Come si può vedere, un fluido passa nel mantello, mentre l'altro passa nei tubi. Nel mantello sono posizionati dei diaframmi (baffles) che hanno lo scopo di incrementare il coefficiente convettivo sul lato esterno, a seguito dell'aumento della turbolenza e della presenza di una componente della velocità normale all'asse dei tubi.

I pregi di questo tipo di scambiatore sono fondamentalmente due:

- Ottenere una grande area di scambio con limitate dimensioni.
- Facilità di manutenzione

Lo svantaggio principale è il peso.

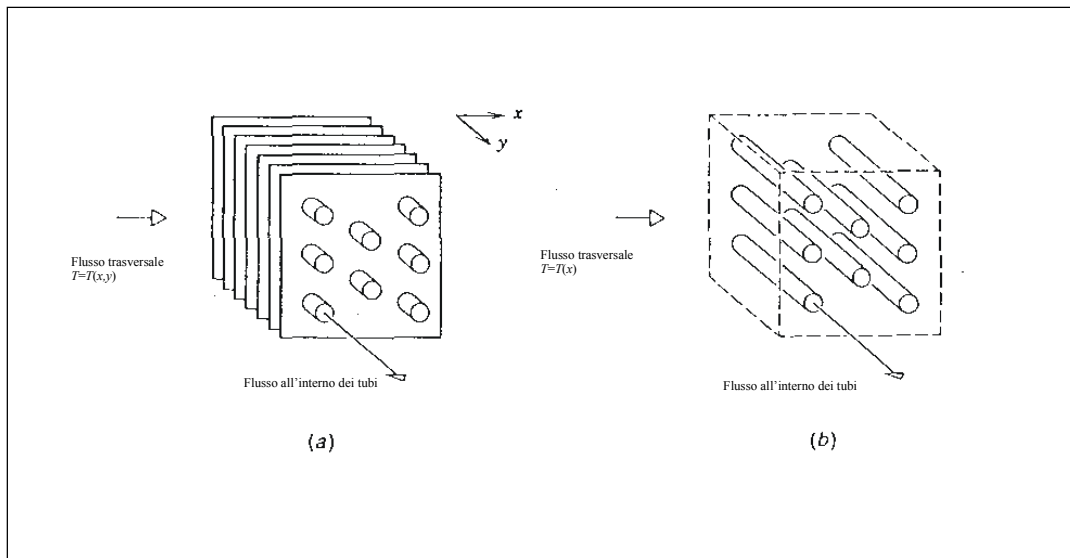


Figura 5-2: Scambiatori a flusso trasversale.

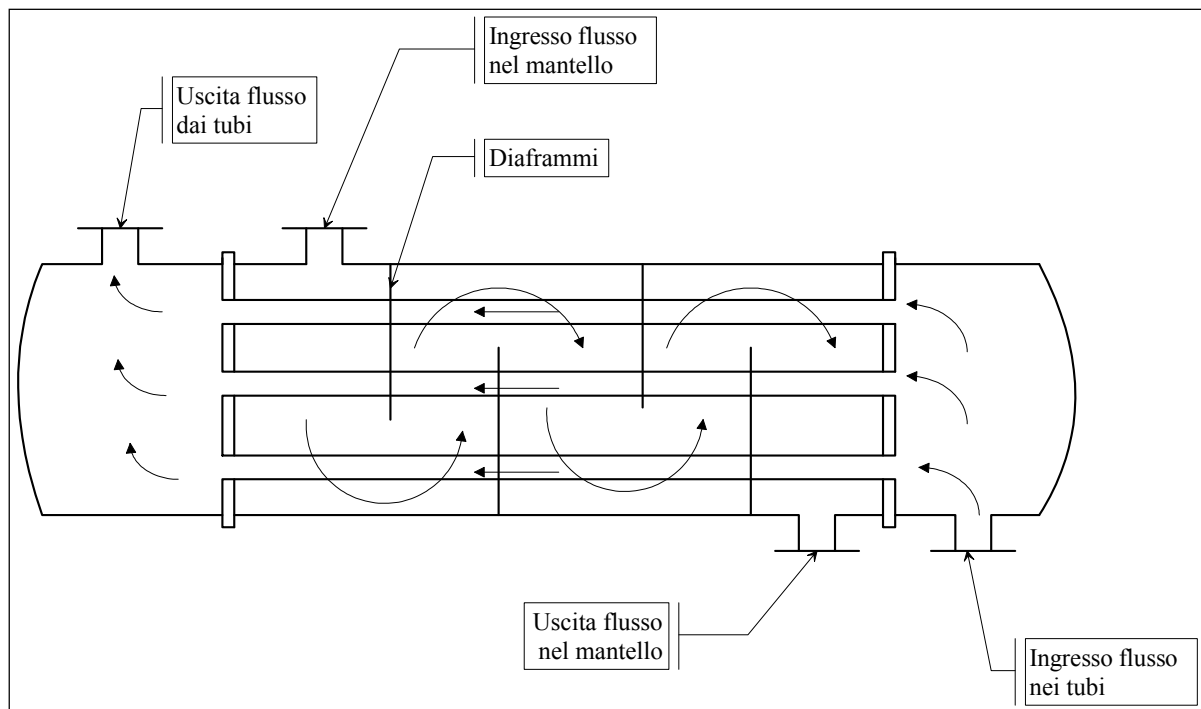


Figura 5-3: Scambiatore a fascio tubiero.

Gli scambiatori a fascio tubiero possono avere anche altre configurazioni oltre a quella più semplice della Figura 5-3. Per aumentare l'area di scambio si possono avere scambiatori con due o più passaggi nei tubi e uno nel mantello come in Figura 5-4, oppure con più passaggi nei tubi e nel mantello, come rappresentato in Figura 5-5, in cui è rappresentato uno scambiatore a 4 passaggi nei tubi e due nel mantello.

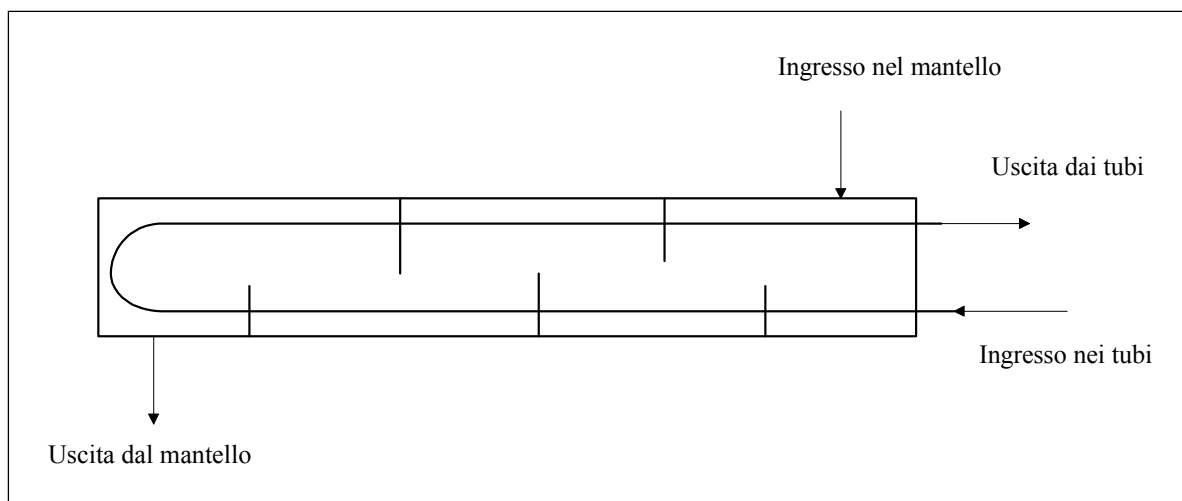


Figura 5-4: Scambiatore a fascio tubiero con due passaggi nei tubi e uno nel mantello.

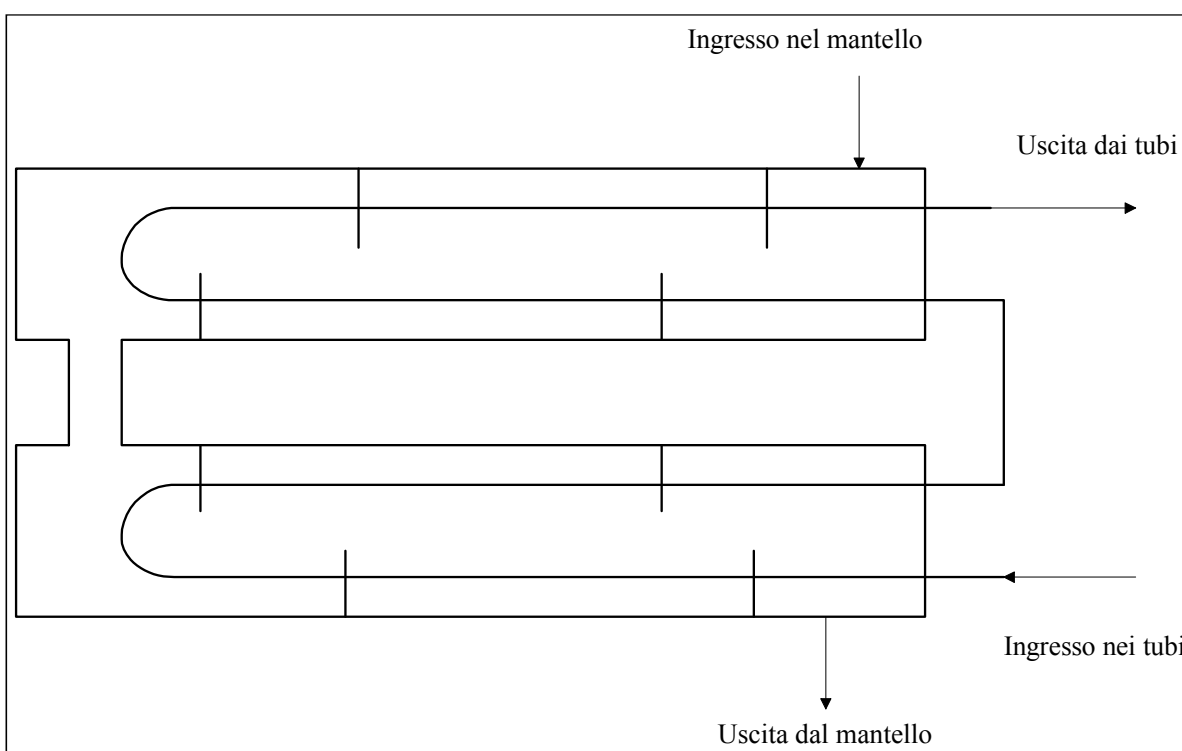


Figura 5-5: Scambiatore a fascio tubiero con quattro passaggi nei tubi e due nel mantello.

Un altro tipo di scambiatori sono quelli a piastre. La geometria è rappresentata in Figura 5-6. Sono formati da tante piastre corrugate in modo da aumentare lo scambio termico, che vengono impaccettate assieme tramite tiranti. La tenuta è ottenuta per mezzo di guarnizioni. Il fluido caldo e quello freddo passano alternativamente nei canali formati dalle piastre.

Presentano il vantaggio che il loro sviluppo è verticale e non orizzontale. Inoltre, sia le piastre, sia i supporti rimangono gli stessi all'interno di una fascia di potenze termiche molto ampia; per tanto il produttore può personalizzare lo scambiatore secondo la potenza necessaria, aggiungendo semplicemente piastre, con costi, quindi, contenuti. Presentano lo svantaggio di non essere facilmente manutenzionabili.

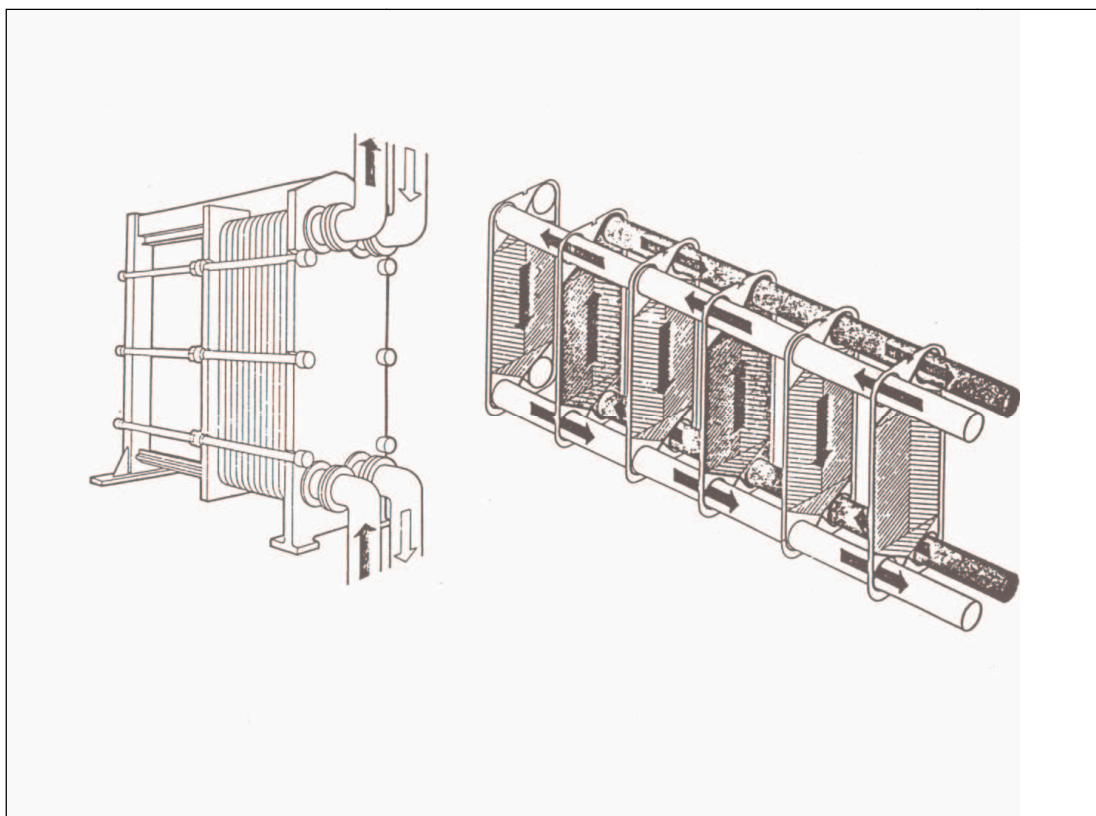


Figura 5-6: Scambiatore a piastre.

Nelle applicazioni in cui il peso e le dimensioni sono importanti si utilizzano gli scambiatori compatti in cui la superficie di scambio termico per unità di volume è superiore ai $700 \frac{m^2}{m^3}$

Sono utilizzati principalmente nel campo del trasporto terrestre ed aereo. Di solito uno dei fluidi è aria, per cui sono caratterizzati da valori piuttosto piccoli del coefficiente di scambio termico globale.

5.2 Il coefficiente globale di scambio termico.

La determinazione della trasmittanza è estremamente importante per la valutazione dell'efficienza di uno scambiatore.

Purtroppo è un'operazione spesso incerta.

In fase di progettazione non conosciamo l'area di scambio e quindi la geometria del sistema; pertanto non siamo in grado di calcolare la trasmittanza. In questo caso siamo obbligati a valutare un valore statisticamente probabile e con questo dato calcoliamo le dimensioni dello scambiatore. In seguito dobbiamo verificare che il valore della trasmittanza supposta sia vicino a quello reale e se questo non accade si deve ricalcolare lo scambiatore utilizzando il nuovo valore della trasmittanza, fino a che il metodo converge.

L'altro problema, e probabilmente il più importante, è che le superfici di scambio si sporcano durante il funzionamento (fouling), generando una resistenza aggiuntiva che non è possibile conoscere esattamente.

In Tabella 5-1 sono riportati i valori statistici della resistenza di fouling, R_f'' , espressa in $\left[\frac{m^2 K}{W} \right]$ per alcuni casi comuni.

Fluido	$R_f'' \left[\frac{m^2 K}{W} \right]$
Acqua di mare ($T < 50^\circ C$)	0,000088
Acqua di fiume ($T < 50^\circ C$)	0,0002-0,0001
Acqua di condensa ($T < 50^\circ C$)	0,00035
Olio combustibile	0,00088
Olio vegetale	0,00053
Vapor d'acqua	0,00018
Aria industriale	0,00035
Liquidi refrigeranti	0,00018
Liquidi organici	0,00018
Vapori refrigeranti	0,00035

Tabella 5-1: Valori indicativi della resistenza di fouling.

Come esempio consideriamo uno scambiatore a fascio tubiero.

La resistenza totale R_{tot} vale:

$$R_{tot} = \frac{1}{h_i A_i} + \frac{R_{f,i}''}{A_i} + \frac{\ln\left(\frac{D_e}{D_i}\right)}{2\pi k L} + \frac{R_{f,e}''}{A_e} + \frac{1}{h_e A_e} = \frac{1}{U_i A_i} = \frac{1}{U_e A_e} \quad (5-1)$$

dove i pedici 'i' ed 'e' si riferiscono alle superfici interna ed esterna del tubo.

In Tabella 5-2 sono riportati i valori indicativi della trasmittanza per alcune combinazioni di fluidi.

Combinazione dei fluidi	$U_i - U_e \left[\frac{W}{m^2 K} \right]$
Acqua – acqua	850 - 1700
Acqua – olio	110 - 350
Vapor d'acqua condensante - acqua	1000 - 6000
Vapor d'acqua condensante - aria	700 – 800
Vapor d'ammoniaca – acqua	800 – 1400
Acqua in tubo alettato - aria	25 - 50

Tabella 5-2: Valori statistici della trasmittanza.

5.3 **Progetto di uno scambiatore con il metodo della temperatura media logaritmica.**

Le considerazioni che faremo valgono solo per gli scambiatori in equicorrente e in controcorrente. Consideriamo uno scambiatore in equicorrente, come schematizzato in Figura 5-7.

I pedici i ed u indicano rispettivamente l'ingresso e l'uscita dallo scambiatore e quelli f e c indicano il fluido freddo e quello caldo.

Con i si indica l'entalpia per non confonderla con il coefficiente convettivo.

Utilizzeremo le seguenti ipotesi:

- Supponiamo trascurabile il calore disperso all'esterno
- Consideriamo trascurabili le variazioni di energia cinetica e potenziale.

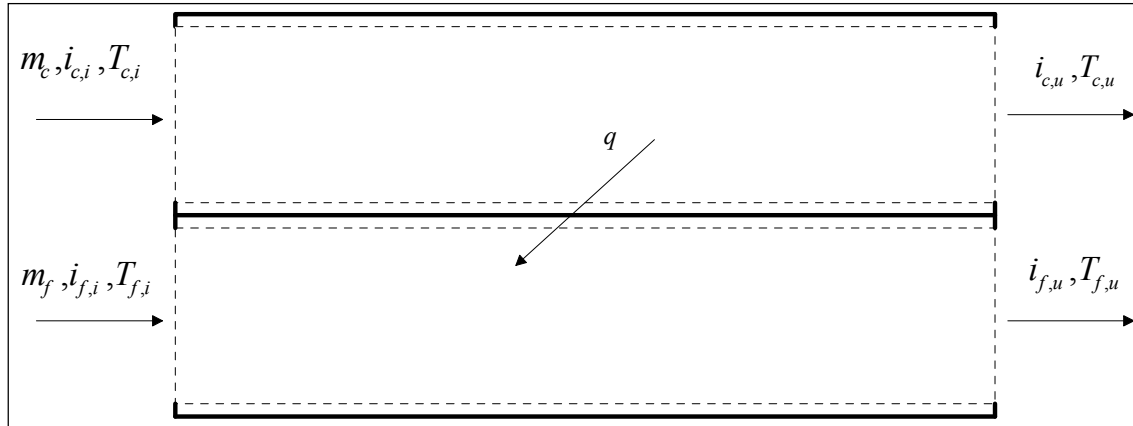


Figura 5-7: Schema di uno scambiatore in equicorrente.

Possiamo, allora considerare tre volumi di controllo diversi, tratteggiati in Figura 5-7.

Il primo volume di controllo corrisponde al canale in cui scorre il fluido caldo, il secondo quello in cui scorre il fluido freddo e il terzo è la parete di separazione tra i due fluidi.

Per ognuno di questi volumi di controllo si può applicare il primo principio. Ovviamente la potenza termica scambiata sarà la stessa in tutti i tre volumi di controllo, poiché il sistema è adiabatico verso l'esterno.

Per i primi due volumi di controllo si ottiene:

$$q = \dot{m}_c (i_{c,i} - i_{c,u}) \quad (5-2)$$

$$q = \dot{m}_f (i_{f,u} - i_{f,i}) \quad (5-3)$$

Se i fluidi non si trovano in condizioni di cambiamento di fase si può scrivere che:

$$q = \dot{m}_c c_{p,c} (T_{c,i} - T_{c,u}) \quad (5-4)$$

$$q = \dot{m}_f c_{p,f} (T_{f,u} - T_{f,i}) \quad (5-5)$$

Se ci riferiamo invece alla parete possiamo scrivere che:

$$q = UA(T_c - T_f) = UA\Delta T_m \quad (5-6)$$

dove:

ΔT_m è un valore medio del salto di temperatura tra il fluido caldo e quello freddo che varia lungo lo scambiatore.

L'equazione (5-6) ci permette, una volta noto il salto termico e valutato q con l'equazione (5-4) o (5-5), di calcolare l'area di scambio termico.

Il problema è proprio quello di ricavare un valore appropriato di questo salto medio di temperatura. Per risolvere il problema andremo a considerare uno scambiatore di lunghezza infinitesima, scriveremo le rispettive equazioni di bilancio e poi integreremo su tutto lo scambiatore.

Formuleremo le seguenti ipotesi:

- Adiabaticità dello scambiatore verso l'esterno.
- Conduzione assiale trascurabile lungo la parete del tubo.
- Variazioni trascurabili dell'energia cinetica e potenziale.
- Calori specifici costanti.
- Trasmittanza costante.

In Figura 5-8 è schematizzato il problema.

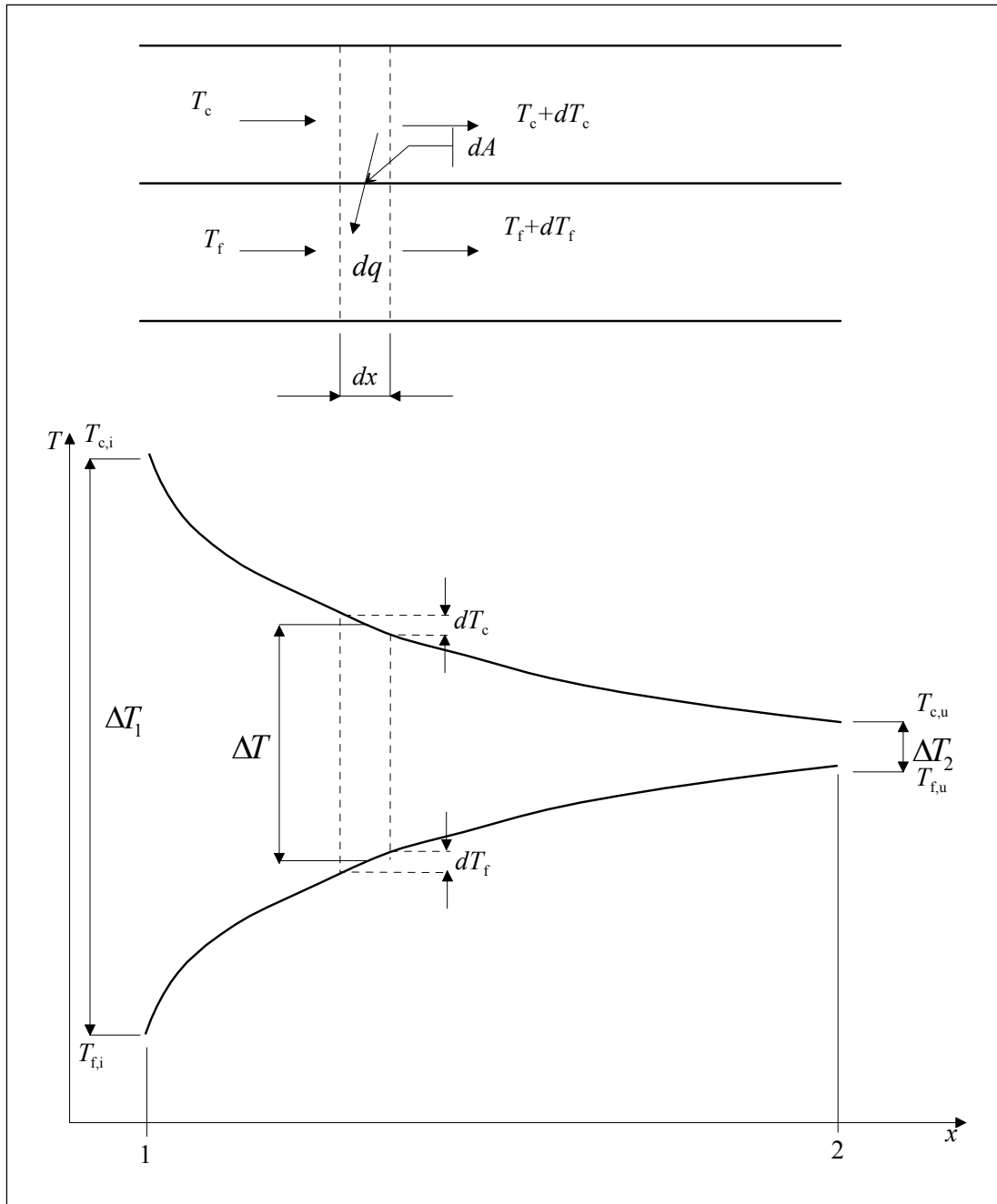


Figura 5-8: Distribuzione della temperatura in uno scambiatore in equicorrente.

Con il pedice 1 indichiamo la sezione d'ingresso dello scambiatore e con 2 quella d'uscita. Applicando il primo principio ai tre volumi di controllo infinitesimi si ottiene:

$$dq = -\dot{m}_c c_{p,c} dT_c = -C_c dT_c \quad (5-7)$$

$$dq = \dot{m}_f c_{p,f} dT_f = C_f dT_f \quad (5-8)$$

$$dq = U \Delta T dA \quad (5-9)$$

dove con C è indicato il prodotto $\dot{m} c_p$

Ricordiamo che:

$$\Delta T = T_c - T_f \quad (5-10)$$

Se differenziamo la (5-10), si ottiene:

$$d(\Delta T) = dT_c - dT_f \quad (5-11)$$

Sostituendo dT_c e dT_f ricavate dalle (5-7) e (5-8) avremo che:

$$d(\Delta T) = -dq \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right) \quad (5-12)$$

Sostituendo dq ricavato dalla (5-9) ed integrando lungo lo scambiatore si ottiene:

$$\int_1^2 \frac{d(\Delta T)}{\Delta T} = -U \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right) \int_1^2 dA \quad (5-13)$$

e risolvendo gli integrali:

$$\ln \left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} \right) = -UA \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_f} \right) \quad (5-14)$$

Ora, ricavando C_c e C_f in funzione di q e T dalle (5-4) e (5-5), si può scrivere:

$$\ln \left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} \right) = -UA \left(\frac{T_{c,i} - T_{c,u}}{q} + \frac{T_{f,u} - T_{f,i}}{q} \right) \quad (5-15)$$

Riordinando questa equazione si giunge, infine, alla relazione:

$$q = UA \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln \left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} \right)} = UA \Delta T_{ml} \quad (5-16)$$

Definiremo, dunque, la temperatura media logaritmica, ΔT_{ml} come:

$$\Delta T_{ml} = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln \left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} \right)} \quad (5-17)$$

Se avessimo ragionato su uno scambiatore in controcorrente saremmo giunti alle medesime conclusioni, solo con le differenze di temperatura definite come:

$$\begin{aligned}\Delta T_1 &= T_{c,i} - T_{f,u} \\ \Delta T_2 &= T_{c,u} - T_{f,i}\end{aligned}\quad (5-18)$$

In Figura 5-9 è riportato l'andamento di temperatura in uno scambiatore in controcorrente.

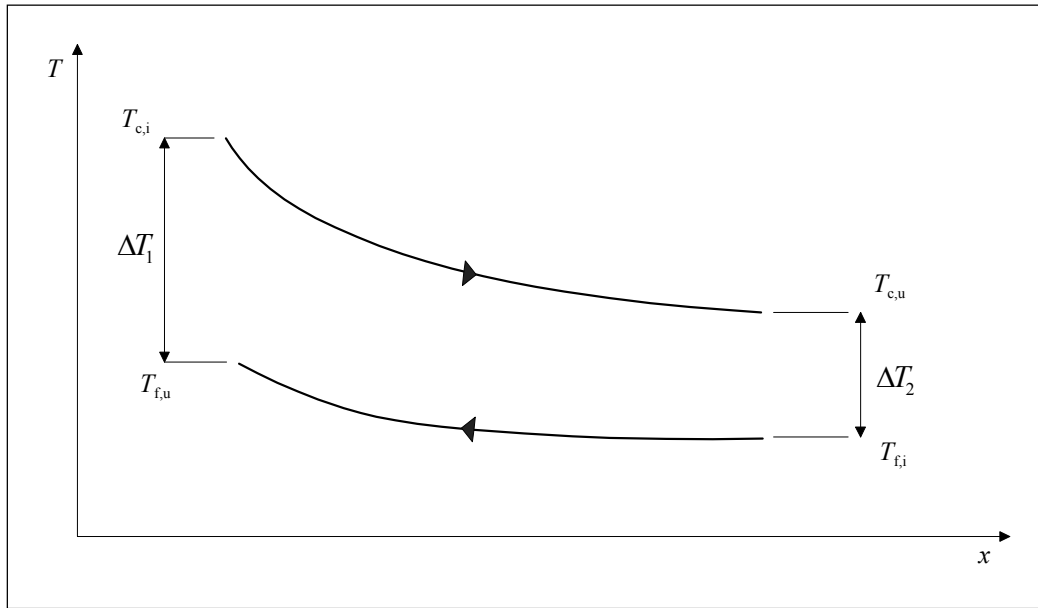


Figura 5-9: Andamento delle temperature in uno scambiatore in controcorrente.

Per dimostrarlo basta pensare che per uno scambiatore in controcorrente l'equazione (5-8) si trasforma in:

$$dq = -C_f dT_f \quad (5-19)$$

Il segno meno è dovuto al fatto che il calore assorbito è positivo mentre in controcorrente dT_f è negativa.

L'equazione (5-12) diviene quindi:

$$d(\Delta T) = -dq \left(\frac{1}{C_c} - \frac{1}{C_f} \right) \quad (5-20)$$

Eseguendo gli stessi passaggi fatti in precedenza, si giunge alla stessa relazione ricavata per il caso in equicorrente.

È bene ricordare che gli scambiatori in controcorrente scambiano meglio di quelli in equicorrente.

Prima di considerare come progettare gli altri tipi di scambiatori, soffermiamoci a fare alcune considerazioni sull'andamento del salto di temperatura negli scambiatori.

Generalizziamo la (5-20) in modo che valga sia per gli scambiatori in equicorrente che per quelli in controcorrente.

$$d(\Delta T) = -dq \left(\frac{1}{C_c} \pm \frac{1}{C_f} \right) \quad (5-21)$$

Dove il segno + vale per l'equicorrente e il – per il controcorrente.
Sostituendo nella (5-21) la (5-9) si ottiene:

$$d(\Delta T) = -U\Delta T \left(\frac{1}{C_c} \pm \frac{1}{C_f} \right) dA \quad (5-22)$$

Separando le variabili si ricava:

$$\frac{d\Delta T}{\Delta T} = -\frac{1}{C_f} \left(\frac{C_f}{C_c} \pm 1 \right) U dA \quad (5-23)$$

ed integrando si ottiene:

$$\ln \frac{\Delta T}{\Delta T_1} = -\frac{1}{C_f} \left(\frac{C_f}{C_c} \pm 1 \right) UA(x) \quad (5-24)$$

Esplicitando ΔT si giunge, infine, a:

$$\Delta T = \Delta T_1 e^{-\frac{1}{C_f} \left(\frac{C_f}{C_c} \pm 1 \right) UA(x)} \quad (5-25)$$

Da questa relazione si vede che negli scambiatori in equicorrente il ΔT diminuisce sempre, mentre negli scambiatori in controcorrente l'andamento del salto di temperatura dipende dal rapporto $\frac{C_f}{C_c}$.

- Se $\frac{C_f}{C_c} > 1$ il salto termico tende a diminuire.
- Se $\frac{C_f}{C_c} < 1$ il salto termico tende ad aumentare.
- Se $\frac{C_f}{C_c} = 1$ il salto termico rimane costante.

In Figura 5-10 viene riportato l'andamento delle temperature in uno scambiatore in contro corrente.

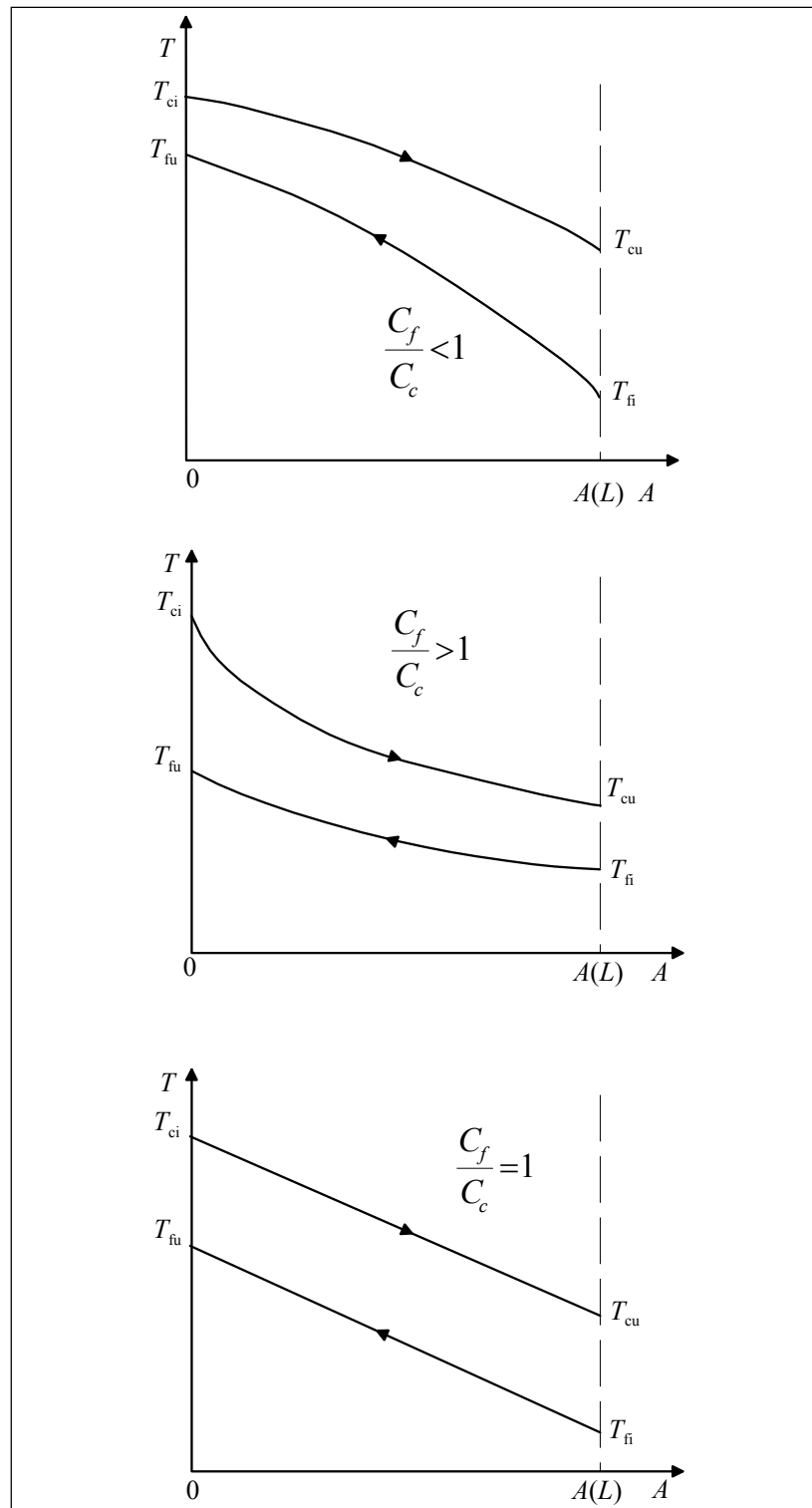


Figura 5-10: Andamento delle temperature negli scambiatori in controcorrente al variare del rapporto delle capacità termiche

Esempio 5-1

Determinare la superficie di scambio di uno scambiatore a tubi concentrici in controcorrente in cui si devono raffreddare 25000 kg/h di alcol etilico ($c_p = 3,8 \text{ kJ/kg K}$) mediante 20000 kg/h di acqua. Le temperature note sono:

$$T_{c,i} = 66^{\circ}C$$

$$T_{c,u} = 40^{\circ}C$$

$$T_{f,i} = 10^{\circ}C$$

Il tubo interno ha un diametro esterno pari a $D_e = 25 \text{ mm}$.

Si assuma una trasmittanza totale uguale a $U = 582 \frac{W}{m^2 K}$

Svolgimento

Per prima cosa bisogna ricavare la temperatura di uscita dell'acqua.

Dal bilancio termico tra il circuito primario e quello secondario si ottiene la relazione:

$$\dot{m}_c c_{pc} (t_{c,i} - t_{c,u}) = \dot{m}_f c_{pf} (t_{f,u} - t_{f,i})$$

Da cui si ricava:

$$t_{f,u} = \frac{\dot{m}_c c_{pc} (t_{c,i} - t_{c,u})}{\dot{m}_f c_{pf}} + t_{f,i} = 39,5^{\circ}C$$

e

$$q = \dot{m}_c c_{pc} (t_{c,i} - t_{c,u}) = \frac{25000}{3600} \cdot 3,8 \cdot (66 - 40) = 686 \text{ kW}$$

per cui:

$$\Delta T_1 = 66 - 39,5 = 26,5^{\circ}C$$

$$\Delta T_2 = 40 - 10 = 30^{\circ}C$$

La temperatura media logaritmica vale allora:

$$\Delta T_{ml} = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln\left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}\right)} = \frac{30 - 26,5}{\ln\left(\frac{30}{26,5}\right)} = 28,2^{\circ}C$$

L'area di scambio è uguale a:

$$A = \frac{q}{U \Delta T_{ml}} = 41,8 \text{ m}^2$$

Il che significa che il tubo deve essere lungo:

$$L = \frac{A}{\pi D} = \frac{41,8}{\pi \cdot 25 \cdot 10^{-3}} \cong 532 \text{ m}$$

Come si è visto nell'esempio appena svolto, è impossibile utilizzare degli scambiatori a tubi concentrici nella maggior parte dei casi. Si deve, quindi ricorrere ad altre geometrie.

Analizziamo, ora, il metodo per progettare gli scambiatori che non sono in equicorrente o in controcorrente.

Un metodo molto semplice è quello di correggere con valori statistici la temperatura media logaritmica.

Operativamente si considera che lo scambiatore lavori in controcorrente e si valuta la temperatura media logaritmica. La temperatura media logaritmica che effettivamente utilizzeremo nella (5-16) sarà pari a:

$$\Delta T_{ml} = F \Delta T_{ml,cc} \quad (5-26)$$

dove:

F è un opportuno fattore di correzione ricavabile in letteratura.

$\Delta T_{ml,cc}$ è la temperatura media logaritmica valutata come se lo scambiatore lavorasse in controcorrente.

La ΔT_1 e la ΔT_2 si calcolano con le seguenti formule:

$$\begin{aligned} \Delta T_1 &= T_{c,i} - T_{f,u} \\ \Delta T_2 &= T_{c,u} - T_{f,i} \end{aligned} \quad (5-27)$$

Nelle Figure 5-11 e 5-12 sono riportati come esempio dei grafici per il calcolo di F per alcune geometrie di scambiatore.

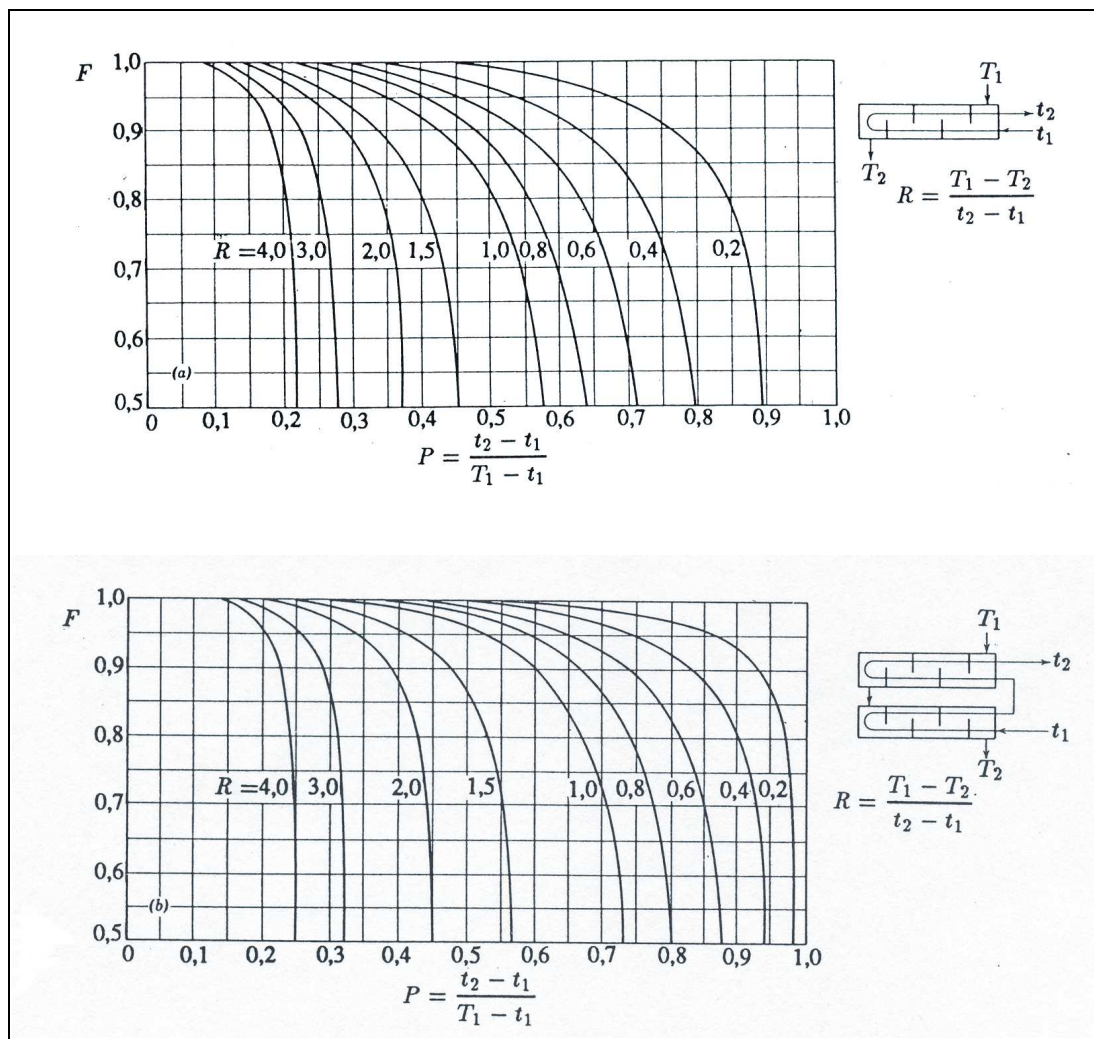


Figura 5-11: Diagrammi per la valutazione di F in scambiatori a fascio tubiero (1 passaggio nel mantello e 2 o multipli di 2 passaggi nei tubi- 2 passaggi nel mantello e multipli di 4 passaggi nei tubi).

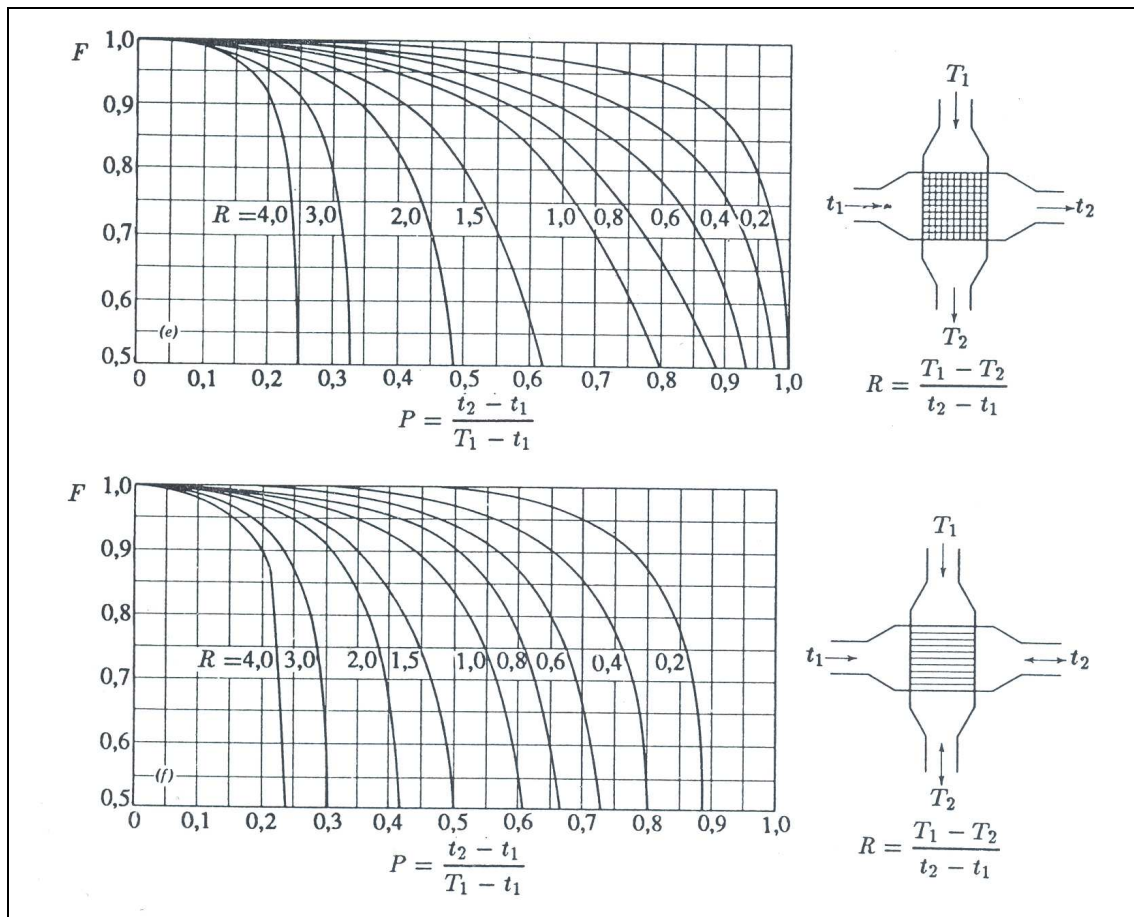


Figura 5-12: Diagrammi per la valutazione di F in scambiatori a flusso incrociato.

Esempio 5-2

Basandosi sui dati dell'esempio 5-1 calcolare l'area di scambio termico per uno scambiatore a fascio tubero con 72 passaggi nei tubi

Si utilizza il primo dei due diagrammi di Figura 5-11.

$$R = \frac{66 - 40}{39,5 - 10} = 0,88$$

$$P = \frac{39,5 - 10}{66 - 10} = 0,53$$

Dal diagramma si ricava

$$F = 0,83$$

Quindi:

$$A = \frac{q}{U F \Delta T_{ml}} = 50,4 \, m^2$$

Da cui

$$L = \frac{A}{\pi D N} = \frac{50,4}{\pi 25 \cdot 10^{-3} 72} = 8,9 \text{ m}$$

5.4 Metodo dell'efficienza

Il metodo della temperatura media logaritmica è un classico metodo di progetto. Partendo dai dati della specifica (caratteristiche dei fluidi, portate, temperature d'ingresso ed uscita del fluido primario, temperatura d'ingresso del fluido secondario), si suppone un valore accettabile della trasmittanza e si calcola l'area di scambio termico. A questo punto, nota la geometria del sistema, si calcola U e si ripete il calcolo fino a convergenza.

Qualche volta, però, sono note solo le portate e le temperature d'ingresso dei due fluidi, oppure conosciamo già i dati geometrici dello scambiatore (perché lo abbiamo in magazzino), ma vogliamo calcolare come si comporta in condizioni diverse da quelle di progetto.

In questi casi per utilizzare il metodo della temperatura media logaritmica sarebbe necessario ricorrere a dei metodi iterativi.

Per ovviare a questa difficoltà si ricorre al metodo dell'efficienza.

Si definisce efficienza di uno scambiatore il rapporto tra la potenza termica effettivamente scambiata e quella massima.

$$\varepsilon = \frac{q}{q_{\max}} \quad (5-28)$$

La potenza termica massima è quella che verrebbe scambiata in uno scambiatore in controcorrente di area infinita.

Elaborando l'equazione (5-25) si giunge alle seguenti equazioni

$$\Delta T = \Delta T_1 e^{KA(x)} \quad \text{per } \frac{C_f}{C_c} < 1 \quad (5-29)$$

$$\Delta T = \Delta T_1 e^{-KA(x)} \quad \text{per } \frac{C_f}{C_c} > 1 \quad (5-30)$$

Dove

$$K = \left| \frac{1}{C_f} \left(\frac{C_f}{C_c} - 1 \right) U \right|$$

Se l'area di scambio diventa infinita avremo che:

$$\begin{aligned} \Delta T_1 &= 0 \quad \text{per } \frac{C_f}{C_c} < 1 \\ \Delta T_2 &= 0 \quad \text{per } \frac{C_f}{C_c} > 1 \end{aligned} \quad (5-31)$$

L'andamento delle temperature è rappresentato in Figura 5-13.

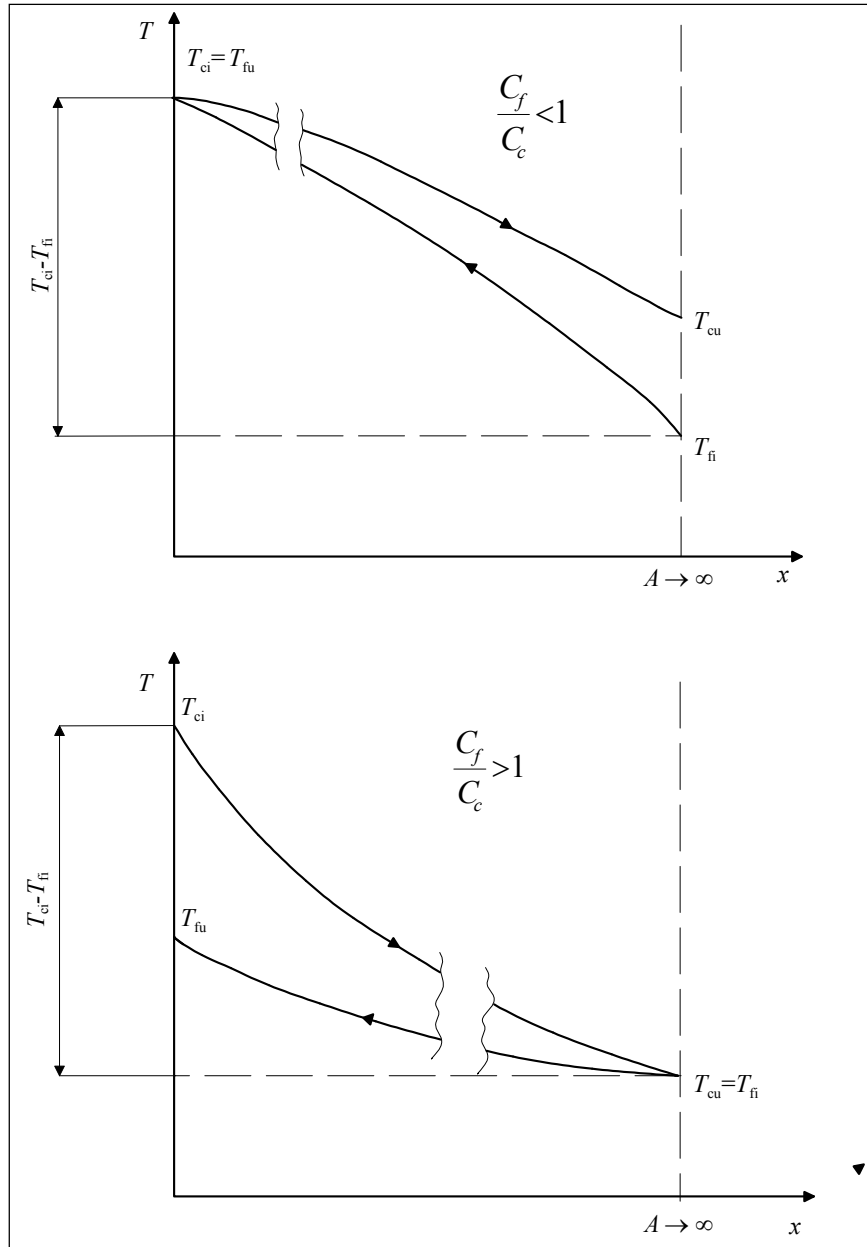


Figura 5-13: Andamento delle temperature negli scambiatori in controcorrente di superficie infinita.

Se consideriamo il salto termico massimo che in tutti i due casi è uguale a $\Delta T_{\max} = T_{ci} - T_{fi}$, avremo:

$$q_{\max} = C_f (T_{ci} - T_{fi}) \quad \text{per } \frac{C_f}{C_c} < 1 \quad (5-32)$$

$$q_{\max} = C_c (T_{ci} - T_{fi}) \quad \text{per } \frac{C_f}{C_c} > 1 \quad (5-33)$$

In termini più generali si può scrivere:

$$q_{\max} = C_{\min} (T_{ci} - T_{fi}) \quad (5-34)$$

Dove:

$C_{\min}$ è la capacità termica minore tra quella del fluido caldo e quella del fluido freddo.

Una volta nota l'efficienza si ricava immediatamente la potenza termica effettivamente scambiata:

$$q = \varepsilon q_{\max} \quad (5-35)$$

Si può dimostrare che l'efficienza è funzione di due numeri adimensionali e, ovviamente, della geometria del sistema.

$$\varepsilon = f(NTU, C_r, \text{geometria del sistema}) \quad (5-36)$$

NTU (Number of Transfer Unit) è definito come:

$$NTU = \frac{UA}{C_{\min}} \quad (5-37)$$

Questo numero adimensionale rappresenta il rapporto tra la potenza termica trasmessa per unità di salto termico tra i due fluidi e quella corrispondente ad una variazione unitaria di temperatura del fluido con capacità termica minore. A parità del rapporto $U/C_{\min}$, NTU è rappresentativo della superficie di scambio e quindi delle dimensioni dello scambiatore.

C_r , invece, è uguale al rapporto tra la capacità termica minima e quella massima dei due fluidi.

$$C_r = \frac{C_{\min}}{C_{\max}} \quad (5-38)$$

In letteratura si trova la forma della funzione f per molte geometrie degli scambiatori, sia in forma analitica, sia grafica.

In tabella 5-3 sono riportate, a titolo d'esempio, le funzioni analitiche dell'efficienza per le geometrie più comuni.

Geometria dello scambiatore	ε
Flusso parallelo in equicorrente	$\varepsilon = \frac{1 - e^{-NTU(1+C_r)}}{1 + C_r}$
Flusso parallelo in controcorrente	$\varepsilon = \frac{1 - e^{-NTU(1-C_r)}}{1 - C_r e^{-NTU(1-C_r)}}$
Scambiatori a fascio tubiero 1 passaggio nel mantello 2, 4, ... passaggi nei tubi	$\varepsilon_1 = 2 \left[\frac{1 + C_r + (1 + C_r^2)^{\frac{1}{2}} \frac{1 + e^{-NTU(1+C_r^2)^{\frac{1}{2}}}}{1 - e^{-NTU(1+C_r^2)^{\frac{1}{2}}}} \right]^{-1}$
Scambiatori a fascio tubiero n passaggi nel mantello $2n, 4n, \dots$ passaggi nei tubi	$\varepsilon = \left[\left(\frac{1 - \varepsilon_1 C_r}{1 - \varepsilon_1} \right)^n - 1 \right] \left[\left(\frac{1 - \varepsilon_1 C_r}{1 - \varepsilon_1} \right)^n - C_r \right]^{-1}$
Scambiatori a correnti incrociate non miscelate	$\varepsilon = 1 - e^{\frac{NTU^{0,22} e^{-C_r NTU^{0,78}} - 1}{C_r}}$
Scambiatori a correnti incrociate miscelate	$\varepsilon = NTU \left(\frac{NTU}{1 - e^{-NTU}} + \frac{NTU C_r}{1 - e^{-NTU C_r}} - 1 \right)^{-1}$
Scambiatori a correnti incrociate con $C_{\max}$ miscelato e $C_{\min}$ non miscelato	$\varepsilon = \frac{1}{C_r} \left(1 - e^{-C_r(1 - e^{-NTU})} \right)$
Scambiatori a correnti incrociate con $C_{\max}$ non miscelato e $C_{\min}$ miscelato	$\varepsilon = 1 - e^{\frac{1 - e^{-C_r NTU}}{C_r}}$
Tutti gli scambiatori in ebollizione o condensazione ($C_r = 0$)	$\varepsilon = 1 - e^{-NTU}$

Tabella 5-3: Equazioni dell'efficienza per le principali geometrie di scambiatore.

Esempio 5-3

In un scambiatore di calore a flussi incrociati non miscelati il fluido primario è aria ed il secondario acqua. Il fluido secondario entra ad una temperatura di 20°C con una portata di $6 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$, mentre il fluido primario entra a 120°C con una portata di $10 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$. Supponendo che la trasmittanza valga $220 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$ e l'area di scambio sia pari a 240 m^2 , calcolare la temperatura di uscita dell'aria.

Svolgimento

Per prima cosa bisogna calcolare le capacità termiche. Assumiamo

$$c_{p,aria} = 1,004 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$$

$$c_{p,acqua} = 4,184 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$$

Quindi:

$$C_{aria} = \dot{m}_{aria} c_{paria} = 10 \cdot 1,004 = 10,04 \frac{kW}{K}$$

$$C_{acqua} = \dot{m}_{acqua} c_{pacqua} = 6 \cdot 4,184 = 25,10 \frac{kW}{K}$$

Da cui si ricava:

$$C_r = \frac{C_{\min}}{C_{\max}} = \frac{10,04}{25,10} = 0,40$$

Inoltre

$$NTU = \frac{UA}{C_{\min}} = \frac{0,220 \cdot 240}{10,04} = 5,26$$

Dalla formula dell'efficienza si ricava:

$$\varepsilon = 0,94$$

Il potenza trasmessa è allora uguale a:

$$q = \varepsilon C_{\min} (T_{ci} - T_{fi}) = 0,94 \cdot 10,04 \cdot (120 - 20) = 943,76 \text{ kW}$$

Facendo il bilancio di energia sul lato aria si ottiene:

$$q = C_{aria} (T_{ci} - T_{cu})$$

Da cui:

$$T_{cu} = T_{ci} - \frac{q}{C_{aria}} = 120 - \frac{943,76}{10,04} = 26 \text{ } ^\circ C$$

Appendice : Tabelle delle proprietà dei fluidi

Proprietà dell'R-134a allo stato di liquido saturo

t [°C]	p [kPa]	ρ [kg/m ³]	c_p [kJ/(kg K)]	k [W/(m K)]	α [m ² /s]	μ [kg/(m s)]	ν [m ² /s]	Pr	$g\beta/\nu^2$ [1/(m ³ K)]
-40	51,21	1418	1,255	0,1106	6,21 10 ⁻⁸	4,72 10 ⁻⁴	3,33 10 ⁻⁷	5,36	1,87 10 ¹¹
-35	66,14	1403	1,264	0,1082	6,10 10 ⁻⁸	4,38 10 ⁻⁴	3,12 10 ⁻⁷	5,11	2,16 10 ¹¹
-30	84,38	1388	1,273	0,1058	5,99 10 ⁻⁸	4,07 10 ⁻⁴	2,93 10 ⁻⁷	4,89	2,47 10 ¹¹
-25	106,4	1373	1,283	0,1034	5,87 10 ⁻⁸	3,79 10 ⁻⁴	2,76 10 ⁻⁷	4,70	2,82 10 ¹¹
-20	132,7	1358	1,293	0,1011	5,76 10 ⁻⁸	3,53 10 ⁻⁴	2,60 10 ⁻⁷	4,51	3,21 10 ¹¹
-15	163,9	1343	1,304	0,0988	5,64 10 ⁻⁸	3,30 10 ⁻⁴	2,46 10 ⁻⁷	4,35	3,63 10 ¹¹
-10	200,6	1327	1,316	0,0965	5,53 10 ⁻⁸	3,09 10 ⁻⁴	2,33 10 ⁻⁷	4,21	4,37 10 ¹¹
-5	243,3	1311	1,328	0,0942	5,41 10 ⁻⁸	2,90 10 ⁻⁴	2,21 10 ⁻⁷	4,07	4,92 10 ¹¹
0	292,8	1295	1,341	0,0920	5,30 10 ⁻⁸	2,71 10 ⁻⁴	2,09 10 ⁻⁷	3,95	5,53 10 ¹¹
5	349,7	1278	1,355	0,0898	5,19 10 ⁻⁸	2,54 10 ⁻⁴	1,99 10 ⁻⁷	3,84	6,59 10 ¹¹
10	414,6	1261	1,370	0,0876	5,07 10 ⁻⁸	2,38 10 ⁻⁴	1,89 10 ⁻⁷	3,73	7,38 10 ¹¹
15	488,4	1243	1,387	0,0854	4,95 10 ⁻⁸	2,24 10 ⁻⁴	1,80 10 ⁻⁷	3,64	8,73 10 ¹¹
20	571,7	1225	1,405	0,0833	4,84 10 ⁻⁸	2,11 10 ⁻⁴	1,72 10 ⁻⁷	3,55	9,74 10 ¹¹
25	665,4	1207	1,425	0,0811	4,72 10 ⁻⁸	1,98 10 ⁻⁴	1,64 10 ⁻⁷	3,48	1,09 10 ¹²
30	770,2	1187	1,446	0,0790	4,60 10 ⁻⁸	1,86 10 ⁻⁴	1,57 10 ⁻⁷	3,4	1,35 10 ¹²
35	887	1168	1,471	0,0769	4,48 10 ⁻⁸	1,74 10 ⁻⁴	1,49 10 ⁻⁷	3,34	1,43 10 ¹²
40	1017	1147	1,498	0,0747	4,35 10 ⁻⁸	1,63 10 ⁻⁴	1,42 10 ⁻⁷	3,28	1,77 10 ¹²
45	1160	1125	1,530	0,0726	4,22 10 ⁻⁸	1,53 10 ⁻⁴	1,36 10 ⁻⁷	3,23	2,07 10 ¹²
50	1318	1102	1,566	0,0704	4,08 10 ⁻⁸	1,43 10 ⁻⁴	1,30 10 ⁻⁷	3,18	2,43 10 ¹²
55	1492	1078	1,609	0,0683	3,94 10 ⁻⁸	1,34 10 ⁻⁴	1,24 10 ⁻⁷	3,15	2,85 10 ¹²
60	1682	1053	1,660	0,0661	3,78 10 ⁻⁸	1,24 10 ⁻⁴	1,18 10 ⁻⁷	3,12	3,35 10 ¹²
65	1890	1026	1,723	0,0639	3,61 10 ⁻⁸	1,15 10 ⁻⁴	1,12 10 ⁻⁷	3,11	4,10 10 ¹²
70	2117	996	1,804	0,0617	3,43 10 ⁻⁸	1,07 10 ⁻⁴	1,07 10 ⁻⁷	3,11	5,14 10 ¹²
75	2364	964	1,911	0,0594	3,22 10 ⁻⁸	9,74 10 ⁻⁵	1,01 10 ⁻⁷	3,14	6,36 10 ¹²
80	2633	928	2,065	0,0572	2,98 10 ⁻⁸	8,90 10 ⁻⁵	9,59 10 ⁻⁸	3,22	8,25 10 ¹²

Proprietà dell'acqua allo stato di liquido saturo

t [°C]	p [kPa]	ρ [kg/m ³]	c_p [kJ/(kg K)]	k [W/(m K)]	α [m ² /s]	μ [kg/(m s)]	ν [m ² /s]	Pr	$g\beta/\nu^2$ [1/(m ³ K)]
0	0,611	1000	4,217	0,569	$1,35 \cdot 10^{-7}$	$1,75 \cdot 10^{-3}$	$1,75 \cdot 10^{-6}$	12,97	$-2,18 \cdot 10^8$
5	0,882	1000	4,203	0,579	$1,38 \cdot 10^{-7}$	$1,51 \cdot 10^{-3}$	$1,51 \cdot 10^{-6}$	10,94	$7,30 \cdot 10^7$
10	1,240	1000	4,192	0,587	$1,40 \cdot 10^{-7}$	$1,30 \cdot 10^{-3}$	$1,30 \cdot 10^{-6}$	9,27	$5,18 \cdot 10^8$
15	1,721	999	4,186	0,595	$1,42 \cdot 10^{-7}$	$1,13 \cdot 10^{-3}$	$1,13 \cdot 10^{-6}$	7,98	$1,16 \cdot 10^9$
20	2,358	998	4,182	0,603	$1,44 \cdot 10^{-7}$	$1,00 \cdot 10^{-3}$	$1,01 \cdot 10^{-6}$	6,96	$2,01 \cdot 10^9$
25	3,193	997	4,180	0,610	$1,46 \cdot 10^{-7}$	$8,94 \cdot 10^{-4}$	$8,96 \cdot 10^{-7}$	6,12	$3,16 \cdot 10^9$
30	4,275	996	4,178	0,617	$1,48 \cdot 10^{-7}$	$8,01 \cdot 10^{-4}$	$8,04 \cdot 10^{-7}$	5,42	$4,61 \cdot 10^9$
35	5,663	994	4,178	0,625	$1,51 \cdot 10^{-7}$	$7,22 \cdot 10^{-4}$	$7,27 \cdot 10^{-7}$	4,83	$6,43 \cdot 10^9$
40	7,425	992	4,179	0,632	$1,52 \cdot 10^{-7}$	$6,55 \cdot 10^{-4}$	$6,60 \cdot 10^{-7}$	4,33	$8,69 \cdot 10^9$
45	9,643	990	4,180	0,638	$1,54 \cdot 10^{-7}$	$5,97 \cdot 10^{-4}$	$6,03 \cdot 10^{-7}$	3,91	$1,14 \cdot 10^{10}$
50	12,41	988	4,181	0,643	$1,56 \cdot 10^{-7}$	$5,46 \cdot 10^{-4}$	$5,53 \cdot 10^{-7}$	3,55	$1,47 \cdot 10^{10}$
55	15,83	985	4,190	0,648	$1,57 \cdot 10^{-7}$	$5,03 \cdot 10^{-4}$	$5,11 \cdot 10^{-7}$	3,25	$1,85 \cdot 10^{10}$
60	20,01	983	4,189	0,654	$1,59 \cdot 10^{-7}$	$4,66 \cdot 10^{-4}$	$4,74 \cdot 10^{-7}$	2,99	$2,28 \cdot 10^{10}$
65	25,11	981	4,187	0,658	$1,60 \cdot 10^{-7}$	$4,32 \cdot 10^{-4}$	$4,41 \cdot 10^{-7}$	2,75	$2,80 \cdot 10^{10}$
70	31,28	978	4,190	0,665	$1,62 \cdot 10^{-7}$	$4,01 \cdot 10^{-4}$	$4,10 \cdot 10^{-7}$	2,52	$3,42 \cdot 10^{10}$
75	38,70	975	4,194	0,668	$1,63 \cdot 10^{-7}$	$3,74 \cdot 10^{-4}$	$3,84 \cdot 10^{-7}$	2,35	$4,09 \cdot 10^{10}$
80	47,53	972	4,198	0,670	$1,64 \cdot 10^{-7}$	$3,51 \cdot 10^{-4}$	$3,61 \cdot 10^{-7}$	2,20	$4,83 \cdot 10^{10}$
85	57,99	969	4,202	0,673	$1,65 \cdot 10^{-7}$	$3,31 \cdot 10^{-4}$	$3,42 \cdot 10^{-7}$	2,07	$5,72 \cdot 10^{10}$
90	70,31	965	4,207	0,676	$1,67 \cdot 10^{-7}$	$3,13 \cdot 10^{-4}$	$3,24 \cdot 10^{-7}$	1,95	$6,57 \cdot 10^{10}$
95	84,75	962	4,212	0,678	$1,67 \cdot 10^{-7}$	$2,95 \cdot 10^{-4}$	$3,07 \cdot 10^{-7}$	1,83	$7,50 \cdot 10^{10}$
100	101,3	958	4,217	0,680	$1,68 \cdot 10^{-7}$	$2,79 \cdot 10^{-4}$	$2,91 \cdot 10^{-7}$	1,73	$8,67 \cdot 10^{10}$
105	121,1	955	4,224	0,682	$1,69 \cdot 10^{-7}$	$2,65 \cdot 10^{-4}$	$2,78 \cdot 10^{-7}$	1,64	$9,97 \cdot 10^{10}$
110	143,6	951	4,230	0,684	$1,70 \cdot 10^{-7}$	$2,52 \cdot 10^{-4}$	$2,65 \cdot 10^{-7}$	1,56	$1,13 \cdot 10^{11}$
115	169,4	947	4,236	0,685	$1,71 \cdot 10^{-7}$	$2,41 \cdot 10^{-4}$	$2,55 \cdot 10^{-7}$	1,49	$1,26 \cdot 10^{11}$
120	200,2	943	4,244	0,687	$1,72 \cdot 10^{-7}$	$2,31 \cdot 10^{-4}$	$2,45 \cdot 10^{-7}$	1,43	$1,41 \cdot 10^{11}$
125	233,3	939	4,253	0,687	$1,72 \cdot 10^{-7}$	$2,21 \cdot 10^{-4}$	$2,35 \cdot 10^{-7}$	1,37	$1,57 \cdot 10^{11}$
130	272,2	934	4,263	0,688	$1,73 \cdot 10^{-7}$	$2,12 \cdot 10^{-4}$	$2,26 \cdot 10^{-7}$	1,31	$1,75 \cdot 10^{11}$
135	314,5	930	4,274	0,688	$1,73 \cdot 10^{-7}$	$2,03 \cdot 10^{-4}$	$2,18 \cdot 10^{-7}$	1,26	$1,94 \cdot 10^{11}$
140	363,8	926	4,286	0,688	$1,73 \cdot 10^{-7}$	$1,95 \cdot 10^{-4}$	$2,11 \cdot 10^{-7}$	1,22	$2,14 \cdot 10^{11}$
145	417,2	921	4,298	0,688	$1,74 \cdot 10^{-7}$	$1,88 \cdot 10^{-4}$	$2,04 \cdot 10^{-7}$	1,17	$2,36 \cdot 10^{11}$
150	478,9	916	4,311	0,687	$1,74 \cdot 10^{-7}$	$1,81 \cdot 10^{-4}$	$1,98 \cdot 10^{-7}$	1,14	$2,55 \cdot 10^{11}$
155	545,3	912	4,326	0,686	$1,74 \cdot 10^{-7}$	$1,75 \cdot 10^{-4}$	$1,92 \cdot 10^{-7}$	1,11	$2,82 \cdot 10^{11}$
160	621,4	907	4,340	0,684	$1,74 \cdot 10^{-7}$	$1,70 \cdot 10^{-4}$	$1,87 \cdot 10^{-7}$	1,08	$3,02 \cdot 10^{11}$
165	703,1	903	4,355	0,683	$1,74 \cdot 10^{-7}$	$1,64 \cdot 10^{-4}$	$1,82 \cdot 10^{-7}$	1,05	$3,30 \cdot 10^{11}$
170	795,9	898	4,373	0,681	$1,73 \cdot 10^{-7}$	$1,59 \cdot 10^{-4}$	$1,77 \cdot 10^{-7}$	1,02	$3,58 \cdot 10^{11}$
175	895,2	892	4,393	0,678	$1,73 \cdot 10^{-7}$	$1,54 \cdot 10^{-4}$	$1,72 \cdot 10^{-7}$	1,00	$3,93 \cdot 10^{11}$
180	1007	887	4,413	0,676	$1,73 \cdot 10^{-7}$	$1,49 \cdot 10^{-4}$	$1,68 \cdot 10^{-7}$	0,97	$4,28 \cdot 10^{11}$
185	1127	882	4,433	0,674	$1,72 \cdot 10^{-7}$	$1,45 \cdot 10^{-4}$	$1,64 \cdot 10^{-7}$	0,95	$4,63 \cdot 10^{11}$
190	1260	876	4,453	0,671	$1,72 \cdot 10^{-7}$	$1,41 \cdot 10^{-4}$	$1,61 \cdot 10^{-7}$	0,93	$4,90 \cdot 10^{11}$
195	1402	870	4,473	0,668	$1,72 \cdot 10^{-7}$	$1,37 \cdot 10^{-4}$	$1,58 \cdot 10^{-7}$	0,92	$5,17 \cdot 10^{11}$
200	1561	865	4,496	0,665	$1,71 \cdot 10^{-7}$	$1,34 \cdot 10^{-4}$	$1,55 \cdot 10^{-7}$	0,90	$5,73 \cdot 10^{11}$

Proprietà dell'ammoniaca allo stato di liquido saturo

t [°C]	ρ [kg/m ³]	c_p [kJ/(kg K)]	k [W/(m K)]	α [m ² /s]	μ [kg/(m s)]	ν [m ² /s]	Pr	$g\beta/\nu^2$ [1/(m ³ K)]
-73	728	4,227	0,803	$2,61 \cdot 10^{-7}$	$5,07 \cdot 10^{-4}$	$6,967 \cdot 10^{-7}$	2,67	$2,97 \cdot 10^{10}$
-53	706	4,342	0,733	$2,39 \cdot 10^{-7}$	$3,4710^{-4}$	$4,912 \cdot 10^{-7}$	2,05	$6,71 \cdot 10^{10}$
-33	682	4,488	0,665	$2,19 \cdot 10^{-7}$	$2,5510^{-4}$	$3,738 \cdot 10^{-7}$	1,70	$1,28 \cdot 10^{11}$
-13	656	4,548	0,600	$2,01 \cdot 10^{-7}$	$1,9710^{-4}$	$3,007 \cdot 10^{-7}$	1,50	$2,18 \cdot 10^{11}$
7	629	4,656	0,539	$1,84 \cdot 10^{-7}$	$1,5810^{-4}$	$2,514 \cdot 10^{-7}$	1,37	$3,49 \cdot 10^{11}$
27	600	4,8	0,480	$1,67 \cdot 10^{-7}$	$1,2910^{-4}$	$2,156 \cdot 10^{-7}$	1,29	$5,44 \cdot 10^{11}$
47	568	5,018	0,425	$1,49 \cdot 10^{-7}$	$1,0710^{-4}$	$1,882 \cdot 10^{-7}$	1,26	$8,48 \cdot 10^{11}$
67	532	5,385	0,372	$1,30 \cdot 10^{-7}$	$8,8510^{-5}$	$1,663 \cdot 10^{-7}$	1,28	$1,37 \cdot 10^{12}$
87	490	6,082	0,319	$1,07 \cdot 10^{-7}$	$7,2810^{-5}$	$1,485 \cdot 10^{-7}$	1,39	$2,41 \cdot 10^{12}$
107	436	7,818	0,267	$7,82 \cdot 10^{-8}$	$5,8310^{-5}$	$1,337 \cdot 10^{-7}$	1,71	$5,22 \cdot 10^{12}$
127	345	22,728	0,216	$2,75 \cdot 10^{-8}$	$4,1910^{-5}$	$1,214 \cdot 10^{-7}$	4,40	$3,24 \cdot 10^{13}$

Proprietà dell'R-134a allo stato di vapore saturo

t [°C]	p [kPa]	ρ [kg/m ³]	c_p [kJ/(kg K)]	k [W/(m K)]	α [m ² /s]	μ [kg/(m s)]	ν [m ² /s]	Pr	$g\beta/\nu^2$ [1/(m ³ K)]
-40	51,21	2,769	0,749	0,0082	3,95 10 ⁻⁶	9,11 10 ⁻⁶	3,29 10 ⁻⁶	0,84	3,88 10 ⁹
-35	66,14	3,521	0,765	0,0086	3,19 10 ⁻⁶	9,33 10 ⁻⁶	2,65 10 ⁻⁶	0,83	5,88 10 ⁹
-30	84,38	4,426	0,781	0,0090	2,60 10 ⁻⁶	9,52 10 ⁻⁶	2,15 10 ⁻⁶	0,83	8,72 10 ⁹
-25	106,4	5,506	0,798	0,0094	2,14 10 ⁻⁶	9,75 10 ⁻⁶	1,77 10 ⁻⁶	0,83	1,27 10 ¹⁰
-20	132,7	6,784	0,816	0,0098	1,77 10 ⁻⁶	9,90 10 ⁻⁶	1,46 10 ⁻⁶	0,82	1,81 10 ¹⁰
-15	163,9	8,287	0,835	0,0102	1,47 10 ⁻⁶	1,01 10 ⁻⁵	1,22 10 ⁻⁶	0,83	2,54 10 ¹⁰
-10	200,6	10,04	0,854	0,0107	1,25 10 ⁻⁶	1,03 10 ⁻⁵	1,03 10 ⁻⁶	0,83	3,52 10 ¹⁰
-5	243,3	12,08	0,875	0,0111	1,05 10 ⁻⁶	1,05 10 ⁻⁵	8,72 10 ⁻⁷	0,83	4,82 10 ¹⁰
0	292,8	14,43	0,897	0,0115	8,88 10 ⁻⁷	1,07 10 ⁻⁵	7,44 10 ⁻⁷	0,84	6,50 10 ¹⁰
5	349,7	17,13	0,921	0,0120	7,61 10 ⁻⁷	1,09 10 ⁻⁵	6,39 10 ⁻⁷	0,84	8,65 10 ¹⁰
10	414,6	20,23	0,946	0,0124	6,48 10 ⁻⁷	1,11 10 ⁻⁵	5,51 10 ⁻⁷	0,85	1,14 10 ¹¹
15	488,4	23,76	0,972	0,0129	5,59 10 ⁻⁷	1,14 10 ⁻⁵	4,78 10 ⁻⁷	0,86	1,49 10 ¹¹
20	571,7	27,78	1,001	0,0133	4,78 10 ⁻⁷	1,16 10 ⁻⁵	4,17 10 ⁻⁷	0,87	1,93 10 ¹¹
25	665,4	32,35	1,032	0,0138	4,13 10 ⁻⁷	1,18 10 ⁻⁵	3,65 10 ⁻⁷	0,88	2,47 10 ¹¹
30	770,2	37,54	1,065	0,0143	3,58 10 ⁻⁷	1,21 10 ⁻⁵	3,21 10 ⁻⁷	0,89	3,15 10 ¹¹
35	887	43,42	1,103	0,0149	3,11 10 ⁻⁷	1,23 10 ⁻⁵	2,83 10 ⁻⁷	0,91	3,98 10 ¹¹
40	1017	50,09	1,145	0,0154	2,69 10 ⁻⁷	1,26 10 ⁻⁵	2,51 10 ⁻⁷	0,93	4,99 10 ¹¹
45	1160	57,66	1,192	0,0161	2,34 10 ⁻⁷	1,28 10 ⁻⁵	2,22 10 ⁻⁷	0,95	6,24 10 ¹¹
50	1318	66,27	1,246	0,0167	2,02 10 ⁻⁷	1,31 10 ⁻⁵	1,98 10 ⁻⁷	0,98	7,75 10 ¹¹
55	1492	76,10	1,310	0,0175	1,76 10 ⁻⁷	1,35 10 ⁻⁵	1,77 10 ⁻⁷	1,01	9,59 10 ¹¹
60	1682	87,38	1,387	0,0183	1,51 10 ⁻⁷	1,38 10 ⁻⁵	1,58 10 ⁻⁷	1,04	1,18 10 ¹¹
65	1890	100,4	1,482	0,0193	1,30 10 ⁻⁷	1,42 10 ⁻⁵	1,41 10 ⁻⁷	1,09	1,45 10 ¹¹
70	2117	115,6	1,605	0,0205	1,10 10 ⁻⁷	1,47 10 ⁻⁵	1,27 10 ⁻⁷	1,15	1,78 10 ¹¹
75	2364	133,5	1,771	0,0219	9,26 10 ⁻⁸	1,52 10 ⁻⁵	1,14 10 ⁻⁷	1,23	2,18 10 ¹¹
80	2633	155,1	2,012	0,0237	7,59 10 ⁻⁸	1,58 10 ⁻⁵	1,02 10 ⁻⁷	1,34	2,66 10 ¹¹

Proprietà dell'aria a pressione atmosferica (1,013 bar)

t [°C]	ρ [kg/m ³]	c_p [kJ/(kg K)]	k [W/(m K)]	α [m ² /s]	μ [kg/(m s)]	ν [m ² /s]	Pr	$g\beta/\nu^2$ [1/(m ³ K)]
-50	1,583	1,007	0,0200	1,26 10 ⁻⁵	1,45 10 ⁻⁵	9,16 10 ⁻⁶	0,729	5,24 10 ⁸
-40	1,513	1,006	0,0209	1,37 10 ⁻⁵	1,51 10 ⁻⁵	9,95 10 ⁻⁶	0,725	4,25 10 ⁸
-30	1,443	1,006	0,0217	1,50 10 ⁻⁵	1,56 10 ⁻⁵	1,08 10 ⁻⁵	0,722	3,46 10 ⁸
-20	1,380	1,006	0,0226	1,62 10 ⁻⁵	1,61 10 ⁻⁵	1,17 10 ⁻⁵	0,719	2,84 10 ⁸
-10	1,333	1,006	0,0234	1,74 10 ⁻⁵	1,66 10 ⁻⁵	1,25 10 ⁻⁵	0,716	2,40 10 ⁸
0	1,287	1,006	0,0242	1,87 10 ⁻⁵	1,71 10 ⁻⁵	1,33 10 ⁻⁵	0,713	2,03 10 ⁸
10	1,240	1,007	0,0250	2,00 10 ⁻⁵	1,76 10 ⁻⁵	1,42 10 ⁻⁵	0,711	1,72 10 ⁸
20	1,193	1,007	0,0258	2,14 10 ⁻⁵	1,81 10 ⁻⁵	1,52 10 ⁻⁵	0,709	1,45 10 ⁸
30	1,151	1,007	0,0265	2,29 10 ⁻⁵	1,86 10 ⁻⁵	1,62 10 ⁻⁵	0,706	1,24 10 ⁸
40	1,118	1,008	0,0273	2,42 10 ⁻⁵	1,91 10 ⁻⁵	1,71 10 ⁻⁵	0,705	1,08 10 ⁸
50	1,084	1,008	0,0280	2,56 10 ⁻⁵	1,96 10 ⁻⁵	1,80 10 ⁻⁵	0,704	9,33 10 ⁷
60	1,051	1,008	0,0288	2,71 10 ⁻⁵	2,00 10 ⁻⁵	1,90 10 ⁻⁵	0,702	8,12 10 ⁷
70	1,018	1,009	0,0295	2,87 10 ⁻⁵	2,05 10 ⁻⁵	2,01 10 ⁻⁵	0,701	7,05 10 ⁷
80	0,987	1,009	0,0302	3,04 10 ⁻⁵	2,10 10 ⁻⁵	2,12 10 ⁻⁵	0,699	6,16 10 ⁷
90	0,962	1,010	0,0310	3,19 10 ⁻⁵	2,14 10 ⁻⁵	2,22 10 ⁻⁵	0,697	5,46 10 ⁷
100	0,938	1,011	0,0318	3,35 10 ⁻⁵	2,18 10 ⁻⁵	2,33 10 ⁻⁵	0,695	4,85 10 ⁷
110	0,913	1,012	0,0325	3,52 10 ⁻⁵	2,23 10 ⁻⁵	2,44 10 ⁻⁵	0,693	4,30 10 ⁷
120	0,888	1,013	0,0333	3,70 10 ⁻⁵	2,27 10 ⁻⁵	2,56 10 ⁻⁵	0,691	3,82 10 ⁷
130	0,865	1,014	0,0340	3,88 10 ⁻⁵	2,31 10 ⁻⁵	2,68 10 ⁻⁵	0,690	3,40 10 ⁷
140	0,846	1,016	0,0347	4,04 10 ⁻⁵	2,36 10 ⁻⁵	2,79 10 ⁻⁵	0,689	3,06 10 ⁷
150	0,826	1,017	0,0354	4,22 10 ⁻⁵	2,40 10 ⁻⁵	2,90 10 ⁻⁵	0,688	2,76 10 ⁷
200	0,738	1,025	0,0389	5,14 10 ⁻⁵	2,60 10 ⁻⁵	3,52 10 ⁻⁵	0,685	1,67 10 ⁷
250	0,667	1,035	0,0422	6,11 10 ⁻⁵	2,79 10 ⁻⁵	4,18 10 ⁻⁵	0,684	1,07 10 ⁷
300	0,609	1,045	0,0453	7,12 10 ⁻⁵	2,97 10 ⁻⁵	4,87 10 ⁻⁵	0,684	7,21 10 ⁶
350	0,560	1,057	0,0482	8,15 10 ⁻⁵	3,14 10 ⁻⁵	5,60 10 ⁻⁵	0,687	5,02 10 ⁶
400	0,518	1,069	0,0510	9,20 10 ⁻⁵	3,30 10 ⁻⁵	6,37 10 ⁻⁵	0,692	3,59 10 ⁶
450	0,482	1,081	0,0536	1,03 10 ⁻⁴	3,46 10 ⁻⁵	7,18 10 ⁻⁵	0,699	2,63 10 ⁶
500	0,451	1,093	0,0560	1,14 10 ⁻⁴	3,62 10 ⁻⁵	8,02 10 ⁻⁵	0,706	1,97 10 ⁶
550	0,424	1,104	0,0584	1,25 10 ⁻⁴	3,77 10 ⁻⁵	8,89 10 ⁻⁵	0,712	1,51 10 ⁶
600	0,399	1,115	0,0607	1,36 10 ⁻⁴	3,91 10 ⁻⁵	9,79 10 ⁻⁵	0,718	1,17 10 ⁶
650	0,377	1,126	0,0631	1,48 10 ⁻⁴	4,04 10 ⁻⁵	1,07 10 ⁻⁴	0,722	9,26 10 ⁵
700	0,358	1,136	0,0654	1,61 10 ⁻⁴	4,17 10 ⁻⁵	1,17 10 ⁻⁴	0,725	7,42 10 ⁵
750	0,341	1,145	0,0678	1,74 10 ⁻⁴	4,30 10 ⁻⁵	1,26 10 ⁻⁴	0,726	6,02 10 ⁵
800	0,325	1,154	0,0702	1,87 10 ⁻⁴	4,42 10 ⁻⁵	1,36 10 ⁻⁴	0,727	4,94 10 ⁵
850	0,311	1,163	0,0726	2,01 10 ⁻⁴	4,55 10 ⁻⁵	1,46 10 ⁻⁴	0,728	4,07 10 ⁵
900	0,297	1,171	0,0750	2,15 10 ⁻⁴	4,67 10 ⁻⁵	1,57 10 ⁻⁴	0,728	3,39 10 ⁵
950	0,285	1,178	0,0776	2,31 10 ⁻⁴	4,78 10 ⁻⁵	1,68 10 ⁻⁴	0,726	2,85 10 ⁵
1000	0,274	1,185	0,0805	2,48 10 ⁻⁴	4,90 10 ⁻⁵	1,79 10 ⁻⁴	0,721	2,41 10 ⁵
1100	0,254	1,202	0,0886	2,90 10 ⁻⁴	5,21 10 ⁻⁵	2,05 10 ⁻⁴	0,707	1,70 10 ⁵
1200	0,237	1,224	0,0976	3,37 10 ⁻⁴	5,50 10 ⁻⁵	2,32 10 ⁻⁴	0,690	1,23 10 ⁵
1300	0,222	1,243	0,1044	3,79 10 ⁻⁴	5,77 10 ⁻⁵	2,60 10 ⁻⁴	0,687	9,20 10 ⁴
1400	0,208	1,262	0,1111	4,23 10 ⁻⁴	6,04 10 ⁻⁵	2,90 10 ⁻⁴	0,686	6,98 10 ⁴
1500	0,197	1,281	0,1181	4,69 10 ⁻⁴	6,30 10 ⁻⁵	3,20 10 ⁻⁴	0,683	5,39 10 ⁴
1600	0,186	1,301	0,1259	5,20 10 ⁻⁴	6,56 10 ⁻⁵	3,53 10 ⁻⁴	0,678	4,21 10 ⁴
1700	0,177	1,329	0,1346	5,73 10 ⁻⁴	6,82 10 ⁻⁵	3,86 10 ⁻⁴	0,673	3,33 10 ⁴

1800	0,168	1,363	0,1443	$6,30 \cdot 10^{-4}$	$7,08 \cdot 10^{-5}$	$4,21 \cdot 10^{-4}$	0,669	$2,66 \cdot 10^4$
1900	0,160	1,405	0,1565	$6,95 \cdot 10^{-4}$	$7,33 \cdot 10^{-5}$	$4,58 \cdot 10^{-4}$	0,658	$2,15 \cdot 10^4$
2000	0,153	1,462	0,1710	$7,63 \cdot 10^{-4}$	$7,59 \cdot 10^{-5}$	$4,95 \cdot 10^{-4}$	0,649	$1,76 \cdot 10^4$
2100	0,147	1,537	0,1904	$8,46 \cdot 10^{-4}$	$7,85 \cdot 10^{-5}$	$5,36 \cdot 10^{-4}$	0,634	$1,44 \cdot 10^4$
2200	0,141	1,636	0,2150	$9,35 \cdot 10^{-4}$	$8,11 \cdot 10^{-5}$	$5,77 \cdot 10^{-4}$	0,617	$1,19 \cdot 10^4$
2300	0,135	1,820	0,2606	$1,06 \cdot 10^{-3}$	$8,38 \cdot 10^{-5}$	$6,20 \cdot 10^{-4}$	0,585	$9,92 \cdot 10^3$
2400	0,130	2,032	0,3134	$1,19 \cdot 10^{-3}$	$8,65 \cdot 10^{-5}$	$6,65 \cdot 10^{-4}$	0,561	$8,29 \cdot 10^3$
2500	0,125	2,245	0,3662	$1,30 \cdot 10^{-3}$	$8,93 \cdot 10^{-5}$	$7,14 \cdot 10^{-4}$	0,547	$6,93 \cdot 10^3$

Proprietà dell'azoto a pressione atmosferica (1,013 bar)

t [°C]	T [K]	ρ [kg/m ³]	c_p [kJ/(kg K)]	k [W/(m K)]	α [m ² /s]	μ [kg/(m s)]	ν [m ² /s]	Pr	$g\beta/\nu^2$ [1/(m ³ K)]
-173	100	3,484	1,072	0,0099	$2,65 \cdot 10^{-6}$	$6,79 \cdot 10^{-6}$	$1,95 \cdot 10^{-6}$	0,738	$2,58 \cdot 10^{10}$
-73	200	1,711	1,043	0,0187	$1,05 \cdot 10^{-5}$	$1,29 \cdot 10^{-5}$	$7,54 \cdot 10^{-6}$	0,720	$8,63 \cdot 10^8$
27	300	1,138	1,041	0,0260	$2,19 \cdot 10^{-5}$	$1,80 \cdot 10^{-5}$	$1,58 \cdot 10^{-5}$	0,721	$1,31 \cdot 10^8$
127	400	0,8533	1,044	0,0326	$3,66 \cdot 10^{-5}$	$2,22 \cdot 10^{-5}$	$2,60 \cdot 10^{-5}$	0,711	$3,63 \cdot 10^7$
227	500	0,6826	1,055	0,0388	$5,39 \cdot 10^{-5}$	$2,61 \cdot 10^{-5}$	$3,82 \cdot 10^{-5}$	0,709	$1,34 \cdot 10^7$
327	600	0,5688	1,074	0,0448	$7,33 \cdot 10^{-5}$	$2,95 \cdot 10^{-5}$	$5,19 \cdot 10^{-5}$	0,708	$6,07 \cdot 10^6$
427	700	0,4876	1,096	0,0508	$9,51 \cdot 10^{-5}$	$3,28 \cdot 10^{-5}$	$6,73 \cdot 10^{-5}$	0,708	$3,09 \cdot 10^6$
527	800	0,4266	1,120	0,0567	$1,19 \cdot 10^{-4}$	$3,58 \cdot 10^{-5}$	$8,39 \cdot 10^{-5}$	0,707	$1,74 \cdot 10^6$
627	900	0,3792	1,143	0,0624	$1,44 \cdot 10^{-4}$	$3,87 \cdot 10^{-5}$	$1,02 \cdot 10^{-4}$	0,709	$1,05 \cdot 10^6$
727	1000	0,3413	1,165	0,0680	$1,71 \cdot 10^{-4}$	$4,16 \cdot 10^{-5}$	$1,22 \cdot 10^{-4}$	0,711	$6,59 \cdot 10^5$
827	1100	0,3103	1,184	0,0735	$2,00 \cdot 10^{-4}$	$4,41 \cdot 10^{-5}$	$1,42 \cdot 10^{-4}$	0,712	$4,42 \cdot 10^5$
927	1200	0,2844	1,201	0,0788	$2,31 \cdot 10^{-4}$	$4,66 \cdot 10^{-5}$	$1,64 \cdot 10^{-4}$	0,712	$3,04 \cdot 10^5$
1127	1400	0,2438	1,229	0,0889	$2,97 \cdot 10^{-4}$	$5,17 \cdot 10^{-5}$	$2,12 \cdot 10^{-4}$	0,715	$1,56 \cdot 10^5$
1327	1600	0,2133	1,250	0,0984	$3,69 \cdot 10^{-4}$	$5,63 \cdot 10^{-5}$	$2,64 \cdot 10^{-4}$	0,715	$8,80 \cdot 10^4$

Proprietà dell'anidride carbonica a pressione atmosferica (1,013 bar)

t [°C]	T [K]	ρ [kg/m ³]	c_p [kJ/(kg K)]	k [W/(m K)]	α [m ² /s]	μ [kg/(m s)]	ν [m ² /s]	Pr	$g\beta/\nu^2$ [1/(m ³ K)]
-53	220	2,4733	0,783	0,01090	$5,63 \cdot 10^{-6}$	$1,106 \cdot 10^{-5}$	$4,472 \cdot 10^{-6}$	0,795	$2,23 \cdot 10^9$
-23	250	2,1657	0,804	0,01295	$7,44 \cdot 10^{-6}$	$1,257 \cdot 10^{-5}$	$5,804 \cdot 10^{-6}$	0,780	$1,16 \cdot 10^9$
27	300	1,7973	0,853	0,01677	$1,09 \cdot 10^{-5}$	$1,502 \cdot 10^{-5}$	$8,357 \cdot 10^{-6}$	0,764	$4,68 \cdot 10^8$
77	350	1,5362	0,900	0,02092	$1,51 \cdot 10^{-5}$	$1,741 \cdot 10^{-5}$	$1,133 \cdot 10^{-5}$	0,749	$2,18 \cdot 10^8$
127	400	1,3424	0,942	0,02515	$1,99 \cdot 10^{-5}$	$1,971 \cdot 10^{-5}$	$1,468 \cdot 10^{-5}$	0,738	$1,14 \cdot 10^8$
177	450	1,1918	0,980	0,02938	$2,52 \cdot 10^{-5}$	$2,188 \cdot 10^{-5}$	$1,836 \cdot 10^{-5}$	0,730	$6,47 \cdot 10^7$
227	500	1,0732	1,013	0,03354	$3,09 \cdot 10^{-5}$	$2,402 \cdot 10^{-5}$	$2,238 \cdot 10^{-5}$	0,725	$3,92 \cdot 10^7$
277	550	0,9739	1,047	0,03761	$3,69 \cdot 10^{-5}$	$2,605 \cdot 10^{-5}$	$2,675 \cdot 10^{-5}$	0,725	$2,49 \cdot 10^7$
327	600	0,8938	1,076	0,04159	$4,32 \cdot 10^{-5}$	$2,800 \cdot 10^{-5}$	$3,133 \cdot 10^{-5}$	0,724	$1,67 \cdot 10^7$

Proprietà dell'ossigeno a pressione atmosferica (1,013 bar)

t [°C]	T [K]	ρ [kg/m ³]	c_p [kJ/(kg K)]	k [W/(m K)]	α [m ² /s]	μ [kg/(m s)]	ν [m ² /s]	Pr	$g\beta/\nu^2$ [1/(m ³ K)]
-173	100	3,995	0,9356	0,00930	2,49 10 ⁻⁶	7,39 10 ⁻⁶	1,85 10 ⁻⁶	0,743	2,87 10 ¹⁰
-123	150	2,619	0,9198	0,01415	5,87 10 ⁻⁶	1,13 10 ⁻⁵	4,31 10 ⁻⁶	0,733	3,52 10 ⁹
-73	200	1,956	0,9146	0,01848	1,03 10 ⁻⁵	1,47 10 ⁻⁵	7,54 10 ⁻⁶	0,730	8,63 10 ⁸
-23	250	1,562	0,9150	0,02244	1,57 10 ⁻⁵	1,79 10 ⁻⁵	1,15 10 ⁻⁵	0,729	2,99 10 ⁸
27	300	1,301	0,9199	0,02615	2,19 10 ⁻⁵	2,08 10 ⁻⁵	1,60 10 ⁻⁵	0,730	1,29 10 ⁸
77	350	1,114	0,9291	0,02974	2,87 10 ⁻⁵	2,34 10 ⁻⁵	2,10 10 ⁻⁵	0,731	6,35 10 ⁷
127	400	0,9749	0,9417	0,03324	3,62 10 ⁻⁵	2,59 10 ⁻⁵	2,66 10 ⁻⁵	0,734	3,47 10 ⁷
177	450	0,8665	0,9564	0,03670	4,43 10 ⁻⁵	2,83 10 ⁻⁵	3,26 10 ⁻⁵	0,737	2,05 10 ⁷
227	500	0,7798	0,9722	0,04010	5,29 10 ⁻⁵	3,05 10 ⁻⁵	3,91 10 ⁻⁵	0,739	1,28 10 ⁷
327	600	0,6498	1,003	0,04673	7,17 10 ⁻⁵	3,47 10 ⁻⁵	5,34 10 ⁻⁵	0,745	5,73 10 ⁶
427	700	0,5569	1,031	0,05309	9,25 10 ⁻⁵	3,86 10 ⁻⁵	6,93 10 ⁻⁵	0,750	2,92 10 ⁶
527	800	0,4873	1,054	0,05915	1,15 10 ⁻⁴	4,23 10 ⁻⁵	8,67 10 ⁻⁵	0,753	1,63 10 ⁶
627	900	0,4332	1,073	0,06493	1,40 10 ⁻⁴	4,57 10 ⁻⁵	1,06 10 ⁻⁴	0,757	9,77 10 ⁵
727	1000	0,3899	1,089	0,07046	1,66 10 ⁻⁴	4,91 10 ⁻⁵	1,26 10 ⁻⁴	0,759	6,19 10 ⁵

BIBLIOGRAFIA

- G. Guglielmini C. Pisoni: *Introduzione alla trasmissione del calore*, Casa Editrice Ambrosiana, Milano, 2002.
- F. Kreith: *Principi di Trasmissione del calore*, Liguori Ed., Napoli.
- Gianni Comini – Giovanni Cortella: *Fondamenti di trasmissione del calore*, SGE, Padova.
- F. P. Incropera, D. P. Dewitt: *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, J. Wiley & Sons, New York, 1985.
- E. R. G. Eckert, R. M. Drake, jr.: *Analysis of Heat and Mass Transfer*, Mc Graw-Hill Kogakusha, Ltd., Tokyo, 1972.
- John H. Lienhard IV - John H. Lienhard V: *A Heat Transfer Textbook*, Phlogiston Press, Cambridge Massachusetts