Calcolo Numerico per Matematica
A.A. 2023-24
prof. S. De Marchi, dott. G. Elefante
primo appello: 24 gennaio 2024

- **Durata esame:** 2h30
- La prima parte dell'esame deve essere svolta su carta scrivendo le risposte sui fogli consegnati. Non consegnate la brutta copia.
- Per la parte Matlab è richiesto l'upload in Moodle nella sezione dedicata di due file Matlab: la function `CL_pts.m` e lo script il cui nome deve essere `CognomeNome_matricola.m` .

  Lo script consegnato deve essere eseguibile. Non verranno valutati script con errori di esecuzione.

---

1 Ricerca di zeri di funzione

Teoria

Si enunci e si dimostri il Teorema di Banach-Caccioppoli per la convergenza del metodo di punto fisso. Qual è la condizione necessaria e sufficiente perché un metodo di punto fisso sia convergente?

Esercizio

Data l'equazione $f(x) = 0$ con

$$f(x) = e^{-x} - \sin(\pi x) - 1$$

si ricavi

- l'equivalente problema di punto fisso convergente e la funzione g di punto fisso convergente;
- la terza iterata del metodo di punto fisso partendo dal valore iniziale $x_0 = 0.5$.

2 Algebra Lineare Numerica

Teoria

Si dica quando una matrice simmetrica è definita positiva e si elenchino alcune delle proprietà delle matrici definite positive.
Per risolvere un sistema $Ax = b$ con A simmetrica definita positiva, quale metodo numerico è opportuno usare? Se ne descriva il suo funzionamento e la complessità computazionale.

Esercizio

Dati

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 21 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 24 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- Si decomponga A usando un'opportuna decomposizione deducibile dalla struttura di A.
- Risolvere il sistema $Ax = b$, usando la decomposizione appena calcolata.

3 Interpolazione e approssimazione di funzioni

Teoria

Si diano le definizioni di funzione e costante di Lebesgue. Cosa rappresenta la costante di Lebesgue? Essa dipende dai valori della funzione da approssimare? Si spieghi se questa è affermazione vera o meno.

Esercizio

Si considerino le seguenti coppie di valori relativi ad una funzione f e i corrispondenti valori perturbati $\tilde{f}$

$$\begin{array}{cccc} f & (-1, 2) & (0, 5) & (1, -1) \\ \tilde{f} & (-1, 1.7) & (0, 4.7) & (1, -1.3). \end{array}$$

Si dia quindi una stima dal basso della costante di Lebesgue usando la stima dell'errore tra il polinomio interpolante f e il polinomio interpolante $\tilde{f}$ nell'intervallo individuato da dati.

4 Quadratura

Teoria

Quando una formula di quadratura di tipo interpolatorio è esatta? Dati $n+1$ punti equispaziati qual è l'errore di quadratura per formule di tipo interpolatorio su n pari e n dispari? Le formule del trapezio e di Simpson sono esatte per quali famiglie di funzioni?

Esercizio
Si trovino i valori dei pesi a, b, c della seguente formula di quadratura

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = af\left(\frac{1}{2}\right) + bf\left(\frac{3}{5}\right) + cf\left(\frac{3}{2}\right),$$

affinché sia esatta per polinomi di grado minore o uguale a 2.

---

5 Matlab

Lo script consegnato deve essere eseguibile.
Non verranno valutati script con errori di esecuzione.

Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, ed un insieme di n punti $X_n = \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$, è possibile approssimare tale funzione con un polinomio p interpolante la funzione in quei punti, detti nodi, ovvero soddisfacente la relazione

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Inoltre, nel caso si cerchi un polinomio di grado $n-1$, dati n nodi distinti, allora il polinomio soddisfacente tale relazione esiste ed è unico.
Un possibile insieme di punti utilizzabili come nodi (ma meno preferibili) sono i punti equispaziati (in un intervallo generico $[a, b]$)

$$x_i^e = a + \frac{(b-a)}{n-1} \cdot i, \qquad i = 0, \ldots, n-1,$$

ma, a causa del loro mal condizionamento, è preferibile utilizzare punti come quelli di Chebyshev-Lobatto (definiti qui in $[-1, 1]$)

$$x_i^{cl} = \cos\left(\frac{i}{n-1}\pi\right), \qquad i = 0, \ldots, n-1.$$

Si sottolinea che l'ultimo insieme di punti è definito nell'intervallo $[-1, 1]$, ma per spostarli in un generico intervallo $[a, b]$ è sufficiente effettuare la trasformazione

$$y = (x+1) \cdot \frac{b-a}{2} + a.$$

A partire dalla funzione **equi_pts.m**, si costruisca la funzione **CL_pts.m**, che costruisce n punti di Chebyshev-Lobatto in un generico intervallo $[a, b]$. I parametri, `a`, `b` e `n` saranno dati in input e in output dovrà esserci il solo vettore `x` contenente gli n punti.
In seguito, si scriva uno script denominato **CognomeNome_matricola.m** dove utilizzare la funzione appena creata e quella data.
In particolare, si richiedere di definire nell'intervallo $[a, b] = [-1, 1]$ un vettore di 200 punti equispaziati denominato `x_eval` (che sarà utilizzato in seguito), e la funzione

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}},$$

che vorremo approssimare attraverso dei polinomi interpolanti.

Si generino 10 punti per entrambi gli insiemi di punti definiti sopra (attraverso la function creata e quella data) e si faccia un plot limitando lo spazio al rettangolo $[-1, 1] \times [-2, 2]$, dove disegnare i punti appena generati in righe diverse (un insieme di punti sulla retta $y = 1$ e uno sulla retta $y = -1$), ovvero andando a disegnare i punti

$$(x_i^e, 1), \qquad (x_i^{cl}, -1).$$

Si chiede, in aggiunta, che i vari insiemi di punti siano disegnati attraverso dei cerchi e utilizzando un colore differente per ciascun insieme di punti differente. Si aggiunga, inoltre, una legenda e una griglia al grafico.

In seguito, considerando un numero di punti che va da `n=1` a `n=Nmax`, con `Nmax=25`, si generi, per ciascun n, i polinomi interpolanti sui n nodi equispaziati e n di Chebyshev-Lobatto e si valutino, poi, i due polinomi sui punti contenuti nel vettore `x_eval` (ad esempio, attraverso i comandi `polyfit` e `polyval`).

Per ciascun n si calcoli inoltre l'errore assoluto massimo tra le valutazioni di ciascun polinomio di grado $n-1$ sul vettore `x_eval` e il valore esatto di f sui punti contenuti in tale vettore e si immagazzinino tali valori su due vettori `errE`, `errCL`, uno per ciascun polinomio interpolante sui due insiemi di punti (rispettivamente equispaziati e Chebyshev-Lobatto). Ciascun elemento di tali vettori sarà quindi l'errore assoluto del polinomio di grado $n - 1$ con la funzione.

Infine, si faccia il grafico, in scala semilogaritmica, dei due errori dei polinomi relativi ad insiemi di punti diversi, entrambi sovrapposti nello stesso grafico e dati in funzione di n. Si richiede di disegnarli in due colori diversi e utilizzando come stile grafico il cerchietto collegato da una linea. Si aggiunga la legenda al grafico.

Attenzione: Lo script consegnato deve essere eseguibile. Non verranno valutati script con errori di esecuzione.