Calcolo Numerico per Matematica
A.A. 2023-24

prof. S. De Marchi, dott. G. Elefante

secondo appello: 16 febbraio 2024

- **Durata esame:** 2h30
- La prima parte dell'esame deve essere svolta su carta scrivendo le risposte sui fogli consegnati. Non consegnate la brutta copia.
- Per la parte Matlab è richiesto l'upload in Moodle nella sezione dedicata di due file Matlab: la function `corde.m` e lo script il cui nome deve essere `CognomeNome_matricola.m` .

  Lo script consegnato deve essere eseguibile. Non verranno valutati script con errori di esecuzione.

---

1 Ricerca di zeri di funzione

Teoria Dopo aver descritto come si deriva il metodo di Newton per la ricerca di zeri di funzioni, si dimostri che converge localmente con ordine quadratico se la radice cercata è semplice

Esercizio
Data la funzione $f(x) = x^2 - x - 6$, si mostri quali dei seguenti metodi iterativi

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= g_1(x_k), \qquad & g_1(x) &= -\sqrt{x+6}, \\ x_{k+1} &= g_2(x_k), \qquad & g_2(x) &= \frac{x^2+6}{2x-1}, \\ x_{k+1} &= g_3(x_k), \qquad & g_3(x) &= -\sqrt{2x+6}, \end{aligned}$$

sono metodi di punto fisso convergenti localmente alla radice di segno negativo di f. Nel caso ci sia convergenza, si determini inoltre l'ordine di convergenza.

2 Algebra Lineare Numerica

Teoria Si descriva la costruzione delle matrici elementari di Gauss e che il loro prodotto, nella fattorizzazione LU, equivale all'inversa della matrice L.

Esercizio
Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si sfrutti la decomposizione LU per calcolare $\det(A^{-2})$ senza calcolare le matrici A^{-1}, L^{-1} e U^{-1} e $\det(A)$.

3 Interpolazione e approssimazione di funzioni

Teoria Si dimostri che: "dati $n+1$ punti distinti $x_0, \dots, x_n$ esiste ed unico il polinomio $p_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ che interpola una funzione f, nota negli stessi punti."

Esercizio
Si consideri la funzione e^x su un intervallo $[0, b]$ e la sua approssimazione attraverso un polinomio di interpolazione. Per $n \geq 1$, si consideri $h = b/n$ e i nodi equispaziati $x_j = jh$, $j = 0, \dots, n$ e sia $P_n(x)$ il polinomio di grado minore o uguale a n interpolante e^x nei nodi $x_0, \dots, x_n$. Si dimostri quindi che

$$\max_{x \in [0,b]} |e^x - P_n(x)| \to 0, \qquad \text{se } n \to \infty.$$

4 Quadratura

Teoria Si descriva come determinare i pesi di quadratura nelle formule di tipo interpolatorio. In particolare si dicano quali sono i pesi dalla formula del trapezio e di Simpson.

Esercizio
Si trovino i valori dei pesi della seguente formula di quadratura

$$\int_{-h}^{2h} f(x)\mathrm{d}x = a\, f(-h) + b\, f(0) + c\, f(h)$$

affinché sia esatta per polinomi di grado minore o uguale a 2.

---

5 Matlab

Lo script consegnato deve essere eseguibile.
Non verranno valutati script con errori di esecuzione.

Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contenente un unico zero in $I = [a, b]$, è possibile approssimare la posizione di tale zero attraverso i metodi di bisezione o di Newton visti già a lezione.
Il metodo delle corde (o delle secanti con estremo fisso) è anch'esso un metodo per approssimare lo zero in un intervallo $[a, b]$ contenente un unico zero. Esso parte da un punto iniziale x_0 e utilizzando la precedente va a generare l'iterata successiva. Per costruire l'iterata successiva, sia per esempio x_{n+1}, si procede andando ad intersecare la funzione sempre con la stessa retta che unisce i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ passante però da x_n . Questo corrisponde a costruire le iterate seguendo la seguente formula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x_n).$$

A partire dalla function **bisezione.m** si generi la function `corde.m` dove viene implementato il metodo descritto sopra, modificando gli input in modo tale che contenga anche il punto di partenza `x0`. Si scelga come criterio di arresto il momento in cui o $|x_{n+1} - x_n| <$ `tol` o vengano raggiunte le iterate massime preassegnate. Nel costruire la function si mantengano entrambi gli errori iniziali descritti prima di applicare il metodo delle corde.
In seguito, si scriva uno script denominato **CognomeNome_matricola.m** dove utilizzare i vari metodi per la ricerca dello zero (bisezione e corde).
Si definisca la funzione

$$f(x) = \cos^2(2x) - x^2,$$

e si calcoli la derivata, inserendola nello script come anonymous functions associata alla variabile `Df`.
Si faccia un plot, in una prima finestra dedicata, della funzione f sovrapposta alla derivata prima f'. Si utilizzino colori diversi per ciascuna di esse e come stili grafici si usino rispettivamente: la linea continua e il punto-linea tratteggianto. Si limiti lo spazio del plot al rettangolo $[0, 1] \times [-7, 7]$. Si aggiunga un cerchio colorato (di un colore diverso dai due scelti precedentemente) per indicare il punto dello zero di f nel grafico, tale zero avrà come ascissa la posizione della soluzione *esatta* ottenuta attraverso il comando `fzero(f,0.5)` (dove `f` è la variabile associata alla funzione f). Si aggiunga inoltre la legenda per le due funzioni e il titolo al grafico "*Grafico delle funzioni*".
In seguito si approssimi lo zero della funzione usando i metodi della corda e di bisezione utilizzando la function creata e quella assegnata. Per i due metodi si consideri l'intervallo utilizzato per disegnare il grafico, ovvero `a=0`, `b=1`. Per il metodo della corda si parta dal valore `x0 = 0.1`, e per tutti i metodi si utilizzino come parametri di tolleranza `tol = 1e-8` e di numero massimo di iterate `nMax = 1000`.
Si stampi a schermo il numero di iterate impiegate da tutti i metodi aggiungendo al valore anche una frase indicante a cosa corrisponda il valore stampato a schermo.
Si generino i vettori `errC`, `errB` dove immagazzinare i valori degli errori assoluti tra la soluzione *esatta* e tutte le iterate dei due metodi, ciascun metodo nel vettore

corrispondente alla iniziale in maiuscolo, e dove la soluzione *esatta* è ottenuta con il comando descritto sopra.
Si crei inoltre un ulteriore grafico, in una ulteriore finestra separate, in scala semilogaritmica. Esso conterrà gli errori dei metodi della corda e di bisezione in funzione dell'iterata. Si faccia la legenda e si utilizzi come stile grafico un cerchietto unito da una linea in colori diversi per i due metodi.
Infine, si stampi a schermo la seguente frase completando i puntini con il metodo che ha impiegato meno iterate e aggiungendo dopo i due punti il valore della soluzione ottenuta con tale metodo, il valore deve essere espresso in formato decimale con una cifra prima della virgola e sei dopo

```
Soluzione ottenuta con il metodo ...  :
```

Attenzione: Lo script consegnato deve essere eseguibile. Non verranno valutati script con errori di esecuzione.