Calcolo Numerico per Matematica
A.A. 2023-24
prof. S. De Marchi, dott. G. Elefante
terzo appello: 21 giugno 2024

- **Durata esame:** 2h30
- La prima parte dell'esame deve essere svolta su carta scrivendo le risposte sui fogli consegnati. Non consegnate la brutta copia.
- Per la parte Matlab è richiesto l'upload in Moodle nella sezione dedicata di due file Matlab: la function `boole_composta.m` e lo script il cui nome deve essere
  `CognomeNome_matricola.m` .

  Lo script consegnato deve essere eseguibile. Non verranno valutati script con errori di esecuzione.

---

1 Condizionamento e stabilità

Teoria

Si discuta del condizionamento del problema "soluzione di un sistema lineare $Ax = b$" (con A quadrata di ordine n e b vettore colonna di lunghezza n). In particolare si dica come viene maggiorato l'errore relativo sulla soluzione perturbando sia la matrice A che il termine noto b.

Esercizio

Si ottenga una stima dell'errore relative in norma infinito sulla soluzione perturbata rispetto alla soluzione esatta del sistema lineare $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -4 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 21 \\ 23 \end{pmatrix};$$

dove il sistema perturbato $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ consiste nelle matrici

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2.0001 & 1 & -3 \\ -4 & 5.0001 & 5 \\ -2 & 5 & 5.0001 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 21 \\ 23.0001 \end{pmatrix}.$$

2 Algebra Lineare Numerica

Teoria
A cosa serve fattorizzare una matrice A (anche rettangolare)? Si discutano le fattorizzazioni $A = QR$ e $A = UWV^T$,

Esercizio
Si dimostri che i valori singolari di una matrice rettangolare $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sono i medesimi di A^t.
In seguito, sapendo che $A^{-1} = A^t = A$, si trovi la matrice V della decomposizione in valori singolari $A = UWV^t$, avendo la matrice U già fissata.
Infine, si calcoli la norma 2 della seguente matrice, sfruttando la sua decomposizione in valori singolari.

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \end{pmatrix}.$$

3 Interpolazione e approssimazione di funzioni

Teoria
Fissato $n \in \mathbb{N}$, si discuta del problema d'interpolazione di una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con un polinomio di grado $\leq n$. In particolare si facciano vedere 3 modi equivalenti di scrivere il polinomio d'interpolazione come combinazione lineare di funzioni elementari o fondamentali.

Esercizio
Si mostri che, per $x \neq x_i$, con $i = 0, \dots, n$, il polinomio interpolante può essere scritto nella forma

$$p_n(x) = \ell(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(x - x_i)\ell'(x_i)} f_i,$$

con

$$\ell(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

Si verifichi inoltre che il limite per $x \to x_k$ è f_k.

4 Quadratura

Teoria
Come si costruiscono le formule di quadratura di tipo interpolatorio? Come si stima l'errore di quadratura con dette formule?

Esercizio
Si trovino i valori dei pesi della seguente formula di quadratura

$$\int_0^{3h} f(x)\mathrm{d}x = a\, f(0) + b\, f(h) + c\, f(2h)$$

affinché sia esatta per polinomi di grado minore o uguale a 2.

---

5 Matlab

Lo script consegnato deve essere eseguibile.
Non verranno valutati script con errori di esecuzione.

Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, è possibile approssimare l'integrale

$$\int_a^b f(y)\mathrm{d}y$$

sostituendo con f un polinomio interpolante in alcuni punti. Usando polinomi di grado 1 e 2 è possibile generare le formule di quadratura note come formula del trapezio

$$\int_a^b f(y)\mathrm{d}y \approx \frac{1}{2}h\Big(f(y_0) + f(y_1)\Big)$$

con $h = (b - a)$ e $y_0 = a$ e $y_1 = b$, oppure formula della parabola (o di Simpson).

$$\int_a^b f(y)\mathrm{d}y \approx \frac{1}{3}h\Big(f(y_0) + 4f(y_1) + f(y_2)\Big)$$

con $h = (b - a)/2$ e $y_i = a + i \cdot h, i = 0, 1, 2$.
Altre formule di quadratura possono essere ricavate utilizzando polinomi di grado superiore, come può essere la formula di Boole

$$\int_a^b f(y)\mathrm{d}y \approx \frac{2}{45}h\Big(7f(y_0) + 32f(y_1) + 12f(y_2) + 32f(y_3) + 7f(y_4)\Big)$$

con $h = (b - a)/4$ e $y_i = a + i \cdot h, i = 0, \dots, 4$.
Tali formule sono descritte per l'intero intervallo di integrazione, nonostante ciò, possono essere utilizzate, come la formula dei trapezi e di Simpson, in maniera composita andando a suddividere l'intervallo $[a, b]$ in N sotto-intervalli e utilizzando tali formule in ciascun sotto-intervallo.
Andando quindi a prendere alcuni punti in ciascun sotto-intervallo (in una quantità necessaria per usare le formule) avremmo una formula di quadratura che utilizzerà dei nodi x_i e un certo peso associato w_i, con cui si andrà a descrivere la formula di quadratura Q_N su tutto l'intervallo $[a, b]$, che sarà del tipo

$$Q_N(f) = \sum_i w_i f(x_i)$$

Si faccia attenzione che in ciascun sotto-intervallo, gli estremi di tale sotto-intervallo sono contenuti in due sotto-intervalli (tranne i punti a e b, ovvero il primo e l'ultimo), da cui si ha che i pesi relativi allo stesso nodo si sommano.
Per capire meglio, ricordiamo che la formula composita delle parabole risulta essere

$$Q_N^{simps}(f) = \sum_{i=0}^{2N} w_i f(x_i) = \frac{h}{3}f(x_0) + \frac{4h}{3}f(x_1) + \left(\frac{h}{3} + \frac{h}{3}\right)f(x_2) + \frac{4h}{3}f(x_3) + \cdots + \frac{h}{3}f(x_{2N})$$

da cui si ricavano i seguenti pesi

$$w_0 = w_{2N} = \frac{h}{3}, \quad w_i = \frac{2h}{3}, i \text{ è pari} \quad w_i = \frac{4h}{3}, i \text{ è dispari}$$

e con $h = (b-a)/(2N)$ e $x_i = a + i \cdot h, i = 0, \ldots, 2N$.
Partendo dalla funzione `simpson_composta` allegata si generi la funzione `boole_composta`, dove implementare la formula descritte sopra ma in maniera composta.
Similmente alla funzione `simpson_composta`, la funzione dovrà avere come input gli estremi di integrazione `a`,`b` e il numero di subintervalli `N` in cui viene suddiviso l'intervallo di integrazione $[a, b]$ e come output i nodi di integrazione `x` e i pesi relativi ai nodi `w`.
In seguito, in uno script denominato `CognomeNome_Matricola`, si utilizzino la funzione creata e le funzioni `simpson_composta` e `trapezi_composta` per approssimare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1} \mathrm{d}x = \operatorname{atan}(e) - \frac{\pi}{4}.$$

Si generi quindi l'errore assoluto tra le varie approssimazioni e il valore reale usando un numero di sotto-intervalli $N = 1, \ldots, 15$.
Si salvino questi errori nei vettore `err_trape`, `err_simps`, `err_boole`.
Si faccia il grafico, in scala semilogaritmica, dei vari errori sovrapposti disegnati in colori diversi e usando come stile del grafico il cerchietto collegato da una linea. Si aggiunga la legenda al grafico.

Attenzione: Lo script consegnato deve essere eseguibile. Non verranno valutati script con errori di esecuzione.