SEGNALI E SISTEMI
Secondo appello 2024
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2023-2024)
2024
SOLUZIONI

Esercizio 1 Proprietà dei Sistemi– [punti 7]

Dato il sistema a tempo discreto definito dall'equazione:

$$y(n) = \begin{cases} |x(n)| & n \neq 0 \\ x^2(n) & \text{n=0.} \end{cases}$$

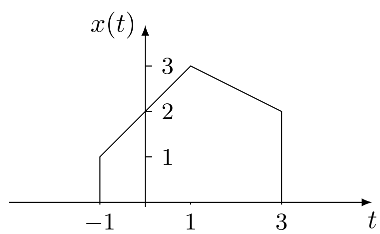
1. Dire se è statico, causale, lineare, tempo-invariante e BIBO stabile [5 punti], giustificando opportunamente le risposte.
2. Calcolare la risposta impulsiva [1 punto].
3. Calcolare la risposta al gradino [1 punto].

Soluzione.

1. E' statico e quindi causale. Non è lineare perchè nè il modulo nè il quadrato sono funzioni lineari. Non è tempo-invariante a causa della condizione su n. E' chiaramente BIBO stabile.
2. La risposta impulsiva è $h(n) = \delta(n)$.
3. La risposta al gradino è $h_{-1}(n) = 1(n)$.

Esercizio 2 – Trasformata di Fourier [punti 7]

Si calcoli la trasformata di Fourier $X(j\omega)$ del segnale $x(t)$ illustrato in figura [5 punti].



Quindi si disegni la sua ripetizione periodica [2 punti]

$$y(t) = \mathrm{rep}_2 x(t) \ .$$

Soluzione. Sfruttando la regola di derivazione si ha

$$z(t) = x'(t) = \delta(t+1) + \mathrm{rect}(\tfrac{t}{2}) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{rect}(\tfrac{1}{2}(t-2)) - 2\delta(t-3)$$

la cui trasformata di Fourier è

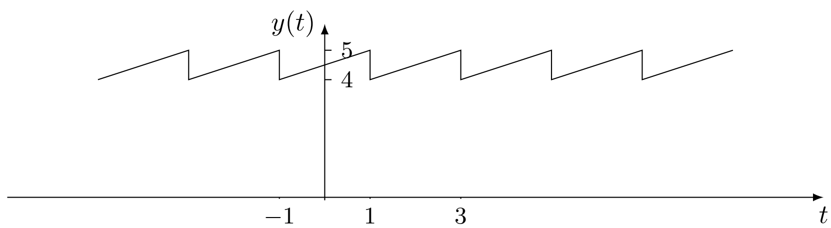
$$Z(j\omega) = e^{j\omega} + \mathrm{sinc}(\tfrac{\omega}{\pi})\,\left(2 - e^{-2j\omega}\right) - 2e^{-3j\omega} = j\omega\,X(j\omega)$$

e invertendo la regola di derivazione si ottiene

$$X(j\omega) = \frac{e^{j\omega} + \mathrm{sinc}(\frac{\omega}{\pi})\,\left(2 - e^{-2j\omega}\right) - 2e^{-3j\omega}}{j\omega}$$

in cui non va sommato alcun contributo per $\omega = 0$ in quanto il valore medio di $x(t)$ è nullo.

Per il segnale periodizzato, esso è illustrato in figura,



Esercizio 3 – Trasformata Zeta [punti 7]

Dato il sistema LTI causale descritto dall'equazione alle differenz:

$$y(n) - y(n-2) = 3x(n) + x(n-1)$$

1. Determinare $H(z)$ [1 punto].
2. Dire se il sistema è BIBO-stabile [2 punti].
3. Trovare la risposta forzata all'ingresso $x(n) = (-1)^n \cdot 1(n)$ [4 punti].

Soluzione.

1. Per ispezione:

$$H(z) = \frac{3 + z^{-1}}{1 - z^{-2}} = \frac{3 + z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})}$$

2. I poli sono $p_1 = 1$ e $p_2 = -1$. Essendo $|p_{1,2}| = 1$, il sistema non è BIBO-stabile.

3.
$$X(z) = \frac{1}{1+z^{-1}}$$

per cui
$$Y_f(z) = \frac{3+z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+z^{-1})^2}$$

La scomposizione in fratti semplici porge
$$Y_f(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{(1+z^{-1})^2} + \frac{1}{1+z^{-1}}$$

la cui antitrasformata è
$$y_f(t) = 1(n) + (n+1)\,(-1)^n\,1(n) + (-1)^n\,1(n)$$

Esercizio 4 – Filtraggio [punti 3]

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e giustificare le risposte:

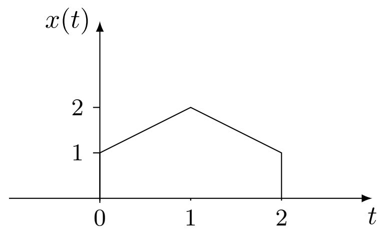
1. dato $x(t) = \cos(\frac{\pi}{3}t)$ esiste un sistema LTI che trasformi $x(t)$ in $y(t) = \sqrt(3)e^{j(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{3})}$ [1.5 punti];
2. dato $x(t) = \mathrm{sinc}(\frac{t}{2})$ esiste un sistema LTI che trasformi $x(t)$ in $y(t) = \mathrm{sinc}(2t)$ [1.5 punti].

Soluzione.

1. Vera. Il segnale è la somma di due componenti, una alla pulsazione $\frac{\pi}{3}$ ed una alla pulsazione $-\frac{\pi}{3}$. Il filtro LTI può cancellare la componente alla pulsazione $\frac{\pi}{3}$ e modulare in ampiezza e sfasare l'altra.
2. Falsa. La trasformata di Fourier di $x(t)$ è $X(j\omega) = 2\,\mathrm{rect}(\frac{\omega}{\pi})$, che ha estensione in $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, mentre la trasformata di $y(t)$ è $Y(j\omega) = \frac{1}{2}\,\mathrm{rect}(\frac{\omega}{4\pi})$ che ha estensione in $[-2\pi; 2\pi]$. Il filtro LTI può solo sopprimere, o modulare le pulsazioni già presenti nel segnale di ingresso, ma non crearne di nuove.

Esercizio 5 – [punti 3]

Sia dato il segnale



Si identifichino i coefficienti della serie di Fourier Y_k della sua ripetisione periodica
$$y(t) = \mathrm{rep}_4 x(t)\ .$$

Soluzione Il segnale risulta

$$x(t) = \mathrm{rect}(\tfrac{1}{2}(t-1)) + \mathrm{triang}(t-1)$$

con trasformata di Fourier

$$X(j\omega) = \left[2\,\mathrm{sinc}(\tfrac{\omega}{\pi}) + \mathrm{sinc}^2(\tfrac{\omega}{2\pi})\right]\, e^{-j\omega}$$

e pertanto i coefficienti risultano

$$Y_k = \frac{1}{T_p} X(jk\omega_0)\ , \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_p} = \tfrac{1}{2}\pi$$

per cui

$$Y_k = \left[\tfrac{1}{2}\,\mathrm{sinc}(\tfrac{k}{2}) + \tfrac{1}{4}\mathrm{sinc}^2(\tfrac{k}{4})\right]\, e^{-j\frac{\pi}{2}k}$$

Esercizio Matlab [punti 3]

Si considerino i segnali reali a tempo continuo $x(t)$ e $y(t)$ ad estensione limitata, i cui campioni siano rappresentati in MatLab dai vettori `x` e `y`, con rispettivi tempi di campionamento `tx` e `ty` e con passo di campionamento comune `T` scelto opportunamente.

Si chiede di ideare un semplice script MatLab per calcolare e poi disegnare il segnale convoluzione $z(t) = x * y(t)$.

Soluzione Lo script potrebbe essere

```
tz = tx(1)+ty(1):T:tx(end)+ty(end); % regola di estensione della conv.
z = T*conv(x,y); % operazione di convoluzione

plot(tz,z); % plot della convoluzione
```