Analisi Matematica 2A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 24/6/2024

Esercizio 1 (8 punti) Consideriamo sul rettangolo $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, |y| \leq 1\}$ la funzione $f : Q \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \varphi(x) + x\log(1+y^2), \quad (x,y) \in Q,$$

dove $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ è una funzione data. Stabilire se esiste $\varphi \in C^2([0,1])$ tale che f sia convessa su Q ed in caso affermativo esibire un esempio di tale φ.

Risposte. φ esiste si/no: NO Se sì, ad esempio $\varphi =$

Esercizio 2 (12 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$f(x,y) = \frac{|x|^\alpha \sin(y/x)}{x^4 + y^2}, \quad \text{per } x \neq 0,$$

ed $f(0,y) = 0$ per $y \in \mathbb{R}$.

i) Determinare tutti i valori del parametro $\alpha > 0$ tali che f sia continua in $0 \in \mathbb{R}^2$.

ii) Determinare tutti i valori del parametro $\alpha > 0$ tali che f sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

Risposte: i) f cont. in 0 per $\alpha \in (3, \infty)$ ii) f diff. in 0 per $\alpha \in (4, \infty)$

Esercizio 3 (12 punti) Sia F l'insieme di tutte le funzioni $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ della forma, per $x \in [0,1]$,

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(a_n x), \qquad \text{con } a_n \in \mathbb{R} \text{ e } |a_n| \leq \frac{1}{n}.$$

i) Provare che $F \subset C([0,1])$, ovvero che tutte le funzioni in F sono continue.

ii) Provare che F è equicontinuo ed equilimitato.

iii) Stabilire se $F \subset C([0,1])$ è compatto (per la metrica indotta da $\|\varphi\| = \max_{x\in[0,1]} |\varphi(x)|$).

Risposte: iii) F compatto si/no: Sì

2 ore e 30 minuti a disposizione

Esercizio Consideriamo sul rettangolo $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } |y| \leq 1\}$ la funzione $f : Q \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \phi(x) + x \log(1+y^2),$$

dove $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$. Stabilire se esiste $\phi \in C^2([0,1])$ tale che f sia convessa su Q.

Risoluzione. Le derivate prime e seconde di f sono

$$f_x = \phi'(x) + \log(1+y^2)$$

$$f_y = \frac{2xy}{1+y^2}$$

$$f_{xx} = \phi''(x)$$

$$f_{xy} = \frac{2y}{1+y^2}$$

$$f_{yy} = 2x \frac{1+y^2-2y^2}{(1+y^2)^2} = 2x \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}$$

La traccia e il determinante della matrice Hessiana di f sono

$$\operatorname{tr} Hf(x,y) = f_{xx} + f_{yy} = \phi''(x) + 2x \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}$$

$$\det Hf(x,y) = \phi''(x)\, 2x \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2} - \frac{4y^2}{(1+y^2)^2}.$$

Affinché f sia convessa su Q deve essere $\operatorname{tr} Hf \geq 0$ e $\det Hf \geq 0$ su Q. Mentre è facile trovare ϕ tale che $\operatorname{tr} Hf(x,y) \geq 0$ su Q (ad es. $\phi(x) = 1000 \cdot x^2$). Si ha sempre $(\forall \phi)$

$$\det Hf(x, \pm 1) = 0 - 1 = -1 < 0.$$

Quindi la ϕ richiesta non esiste. $\square$

Esercizio Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione così definita

$$f(x,y) = \frac{|x|^{\alpha} \sin(y/x)}{x^4 + y^2} \qquad \text{per } x \neq 0$$

e $f(0,y) = 0$.

i) Determinare tutti i valori del parametro $\alpha > 0$ tali che f sia continua in $0 \in \mathbb{R}^2$.

ii) Determinare tutti i valori del parametro $\alpha > 0$ tali che f sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

Risoluzione i) Col test delle rette $y = mx$ si trova

$$f(x, mx) = \frac{|x|^{\alpha} \sin(m)}{x^4 + m^2 x^2} = |x|^{\alpha - 2} \frac{\sin(m)}{x^2 + m^2}$$

Dunque per $m \neq 0$ ed $\alpha \leq 2$: $\lim_{x \to 0} f(x, mx) \neq 0$.

Conclusione: $\alpha \leq 2 \Rightarrow f$ non è continua in 0.

Col test delle parabole $y = mx^2$ si trova

$$f(x, mx^2) = \frac{|x|^{\alpha} \sin(mx)}{x^4(1+m^2)} = |x|^{\alpha-4} \frac{mx\,(1+o(1))}{1+m^2}$$

Dunque per $m \neq 0$ ed $\alpha \leq 3$: $\lim_{x \to 0} f(x, mx^2) \neq 0 = f(0)$

Conclusione migliore: $\alpha \leq 3 \Rightarrow f$ non è continua in 0.

Esaminiamo il caso $\alpha > 3$:

$$\frac{|x|^\alpha |\sin(y/x)|}{x^4+y^2} \leq \frac{|x|^{\alpha-1}|y|}{x^4+y^2} \overset{x^2=z}{=} \frac{|z|^{\frac{\alpha-1}{2}}|y|}{z^2+y^2}$$

$$= r^{\frac{\alpha-1}{2}+1-2} |\cos\theta|^{\frac{\alpha-1}{2}} |\sin\theta| \leq r^{\frac{\alpha-3}{2}} \xrightarrow[r\to 0]{} 0 \quad \text{per } \alpha>3$$

$z = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

uniformemente in $\theta \in [0, 2\pi)$.

Questo prova: $\alpha > 3 \Rightarrow f$ è continua in 0.

ii) Chiaramente $f_x(0,0) = 0$ e $f_y(0,0) = 0$.
La differenziabilità in $0 \in \mathbb{R}^2$ è equivalente a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha \sin(y/x)}{(x^4+y^2)\cdot\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Proviamo direttamente con $y = mx^2$:

$$\frac{|x|^\alpha \sin(mx)}{x^4(1+m^2)|x|\sqrt{1+m^2x^2}} = |x|^{\alpha-5} mx\,(1+o(1))$$

Deduciamo: $\alpha \leq 4 \Rightarrow f$ non è differenziabile in 0.

Per $\alpha > 4$

$$\frac{|x|^\alpha |\sin(y/x)|}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|x|^{\alpha-1}|y|}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x|^{\alpha-1}}{\underbrace{\sqrt{x^4+y^2}\,\sqrt{x^2+y^2}}_{\geq |x|^3}} \underbrace{\frac{|y|}{\sqrt{x^4+y^2}}}_{\leq 1}$$

$$\leq |x|^{\alpha-4}$$

Quindi: $\alpha > 4 \Rightarrow f$ è differenziabile in 0.

□

Esercizio Sia F l'insieme di tutte le funzioni $\phi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ della forma

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(a_n x) \qquad \text{con } |a_n| \leq \frac{1}{n} \text{ per } n \in \mathbb{N}.$$

i) Provare che $F \subset C([0,1])$, ovvero che tutte le funzioni di F sono continue su $[0,1]$.

ii) Provare che F è equilimitato ed equicontinuo.

iii) Stabilire se F è compatto (per la topologia della convergenza uniforme)

Risoluzione i) Abbiamo

Usiamo: $|\sin t| \leq |t|$

$$|\phi(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, |\sin(a_n x)|$$

$$\leq \underbrace{|x|}_{\leq 1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Per il criterio di Weierstrass la serie che definisce ϕ converge uniformemente e dunque definisce una funzione continua.

ii) Formalmente:

$$\phi'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(a_n x)$$

$$\overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{d}{dx} \sin(a_n x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \cos(a_n x)$$

Siccome $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 |\cos(a_n x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$,

la serie delle derivate converge uniformemente.

Questo prova che i passaggi sopra sono leciti

e che $\phi \in C^1([0,1])$ con

$$|\phi'(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < +\infty.$$

Quindi $\phi \in Lip([0,1])$ con $Lip(\phi) \leq \frac{\pi^2}{6}$.

Questo prova che F è "equi-Lipschitziano"

e dunque equicontinuo.

Siccome $\phi(0) = 0$. $\forall \phi \in F$ segue che

F è equilimitato:

$$|\phi(x)| = |\phi(x) - \phi(0)| \leq L|x-0| \leq L := \frac{\pi^2}{6}.$$

iii) Se $F \subset C([0,1])$ è chiuso (per la convergenza uniforme), dal Teorema di Ascoli-Arzelà segue che è compatto.

Proviamo che F è sequenzialmente chiuso.

Siano $\phi^k \in F$ per $k \in \mathbb{N}$:

$$\phi^k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^k \sin(a_n^k x)$$

e supponiamo che $\|\phi^k - \phi\|_\infty \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Dobbiamo provare che $\phi \in F$.

Con un argomento di selezione diagonale di Cantor
a meno di estrarre una sottosuccessione di K
possiamo supporre che

$$a_n^K \xrightarrow[K \to \infty]{\exists} a_n^\infty \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

finato

Siccome la serie che definisce ϕ^K converge
uniformemente in K si può portare il limite
dentro la serie

$$\phi(x) \underset{\text{ipotesi}}{=} \lim_{K \to \infty} \phi^K(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{K \to \infty} a_n^K \sin(a_n^K x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^\infty \sin(a_n^\infty x)$$

con $|a_n^\infty| \leq \frac{1}{n}$. Quindi $\phi \in F$.

$\square$