SEGNALI E SISTEMI
Primo appello 2024
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2023-2024)
2024
SOLUZIONI

Esercizio 1 [punti 7]

Sia dato il sistema a tempo continuo definito dall'equazione

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t-2} e^{5(t-\tau)}\, x(\tau+2)\, d\tau + 3\, x(t-7)\ .$$

1. Dire se è statico, causale, lineare, tempo-invariante e BIBO stabile, giustificando opportunamente le risposte [1 punto per ogni risposta corretta].
2. Calcolare la risposta impulsiva [2 punti].

Soluzione.

Il sistema non è statico in quanto non è possibile calcolare l'uscita al tempo t conoscendo l'ingresso solo al tempo t. Il sistema è causale, infatti, operando un cambio di variabile, $\alpha = \tau + 2$, si ha

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{5(t-\alpha+2)}\, x(\alpha)\, d\alpha + 3\, x(t-7)$$

Il sistema è inoltre convoluzionale (LTI), infatti

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{5(t-\alpha+2)}\, u(t-\alpha)\, x(\alpha)\, d\alpha + 3\, x(t-7)$$

in cui $u(t) = 1(t)$ indica il gradino, con risposta impulsiva

$$h(t) = e^{5(t+2)}\, u(t) + 3\, \delta(t-7)\ .$$

Poiché $h(t)$ diverge per $t \to \infty$, il sistema non è BIBO stabile.

Esercizio 2 [punti 7]

Dato il sistema a tempo continuo con risposta impulsiva:

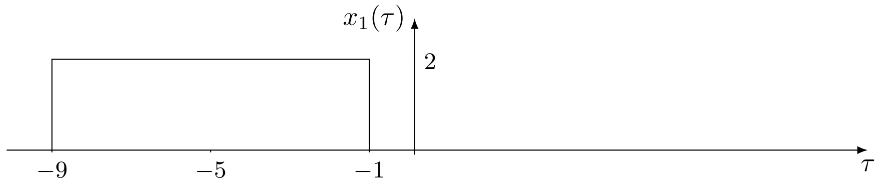
$$h(t) = \tfrac{1}{2} e^{-t/2}\, u(t)$$

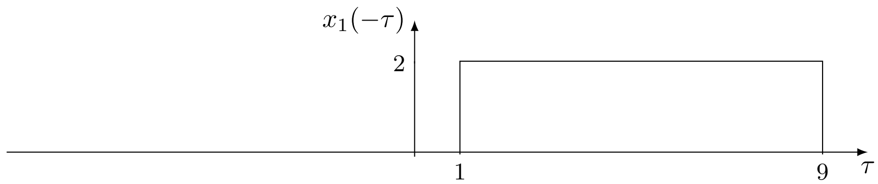
Trovare le uscite corrispondenti agli ingressi:

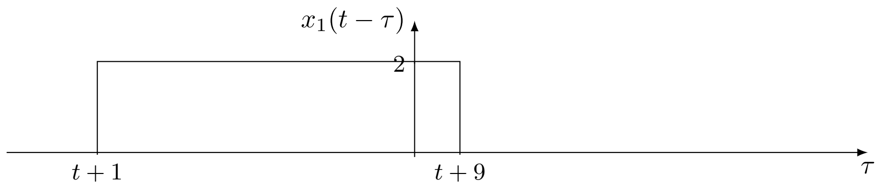
1. $x_1(t) = 2\,\mathrm{rect}(\frac{t+5}{8})$ [4 punti]
2. $x_2(t) = e^{j3t}$ [3 punti]

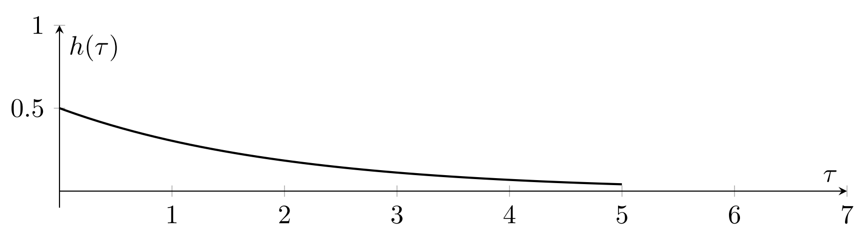
Soluzione.

1. Disegnando $x_1(\tau)$, $x_1(-\tau)$, $x_1(t-\tau)$ e $h(\tau)$ si ha









e pertanto il risultato della convoluzione (per integrazione) diventa

$$y_1(t) = \begin{cases} 0 & t < -9 \\ \int_0^{t+9} e^{-\tau/2}\, d\tau = 2 - 2e^{-\frac{t+9}{2}} & -9 \leq t < -1 \\ \int_{t+1}^{t+9} e^{-\tau/2}\, d\tau = 2e^{-\frac{t+1}{2}} - 2e^{-\frac{t+9}{2}} & t \geq -1 \end{cases}.$$

2. La risposta in pulsazione del sistema è
$$H(j\omega) = \int_0^\infty \tfrac{1}{2} e^{-t/2} e^{-j\omega t}\, dt = \frac{1}{1+2j\omega}$$
Essendo l'ingresso un esponenziale complesso alla pulsazione $\omega = 3$, l'uscita si calcola come
$$y_2(t) = H(j3) \cdot e^{j3t} = \frac{1}{1+6j} \cdot e^{j3t} = \frac{1-6j}{37} \cdot e^{j3t}$$

Esercizio 3 [punti 7]

Sia dato il sistema LTI, causale con funzione di trasferimento:
$$H(s) = \frac{s^2+\alpha^2}{(s^2+9)(s+1)}$$
con α reale e positivo.

1. Trovare l'equazione differenziale associata al sistema [1 punto].
2. Dire per quali α il sistema è BIBO stabile [2 punti].
3. Si consideri $\alpha = 1$. Trovare la risposta impulsiva [3 punti].
4. Sempre per $\alpha = 1$, trovare un ingresso limitato che porga un'uscita illimitata, motivando la risposta [1 punto].

Soluzione.

1. Svolgendo la funzione di trasferimento
$$H(s) = \frac{s^2+\alpha^2}{s^3+s^2+9s+9}$$
si ha
$$y'''(t) + y''(t) + 9y'(t) + 9y(t) = x''(t) + \alpha^2 x(t)\ .$$
2. I poli sono $\pm j3$ e -1. Il poli immaginari rendono il sistema non BIBO-stabile, per cui affichè il sistema sia BIBO-stabile gli zeri devono cancellare quei poli. Per cui deve essere $\alpha = 3$
3. Nel caso $\alpha = 1$ si ha:
$$H(s) = \frac{s^2+1}{(s^2+9)(s+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+9}$$
e risolvendo si ottiene la scomposizione in fratti semplici
$$H(s) = \tfrac{1}{5}\frac{1}{s+1} + \tfrac{4}{5}\frac{s}{s^2+9} - \tfrac{4}{15}\frac{3}{s^2+9}$$
da cui
$$h(t) = \left(\tfrac{1}{5}e^{-t} + \tfrac{4}{5}\cos(3t) - \tfrac{4}{15}\sin(3t)\right)\, u(t)$$

4. I poli sono puramente immaginari. Per ottenere un'uscita illimitata usando un ingresso limitato bisogna sollecitare i poli puramente immaginari (con parte reale nulla). Per esempio $x(t) = \sin(3t)u(t)$ che ha trasformata di Laplace $\frac{3}{s^2+9}$ genera un'uscita forzata del tipo

$$y_f(t) = \big(c_1\, e^{-t} + c_2\, t\, \cos(3t) + c_3\, t\, \sin(3t) + c_4\, \cos(3t) + c_5\, \sin(3t)\big)\; u(t)$$

che diverge per $t \to \infty$.

Esercizio 4 [punti 3]

Dato il segnale $x(t) = 4\,\mathrm{sinc}^2(2t) \cdot \cos(2\pi t)$

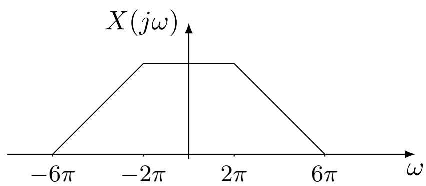
1. Calcolare e disegnare $X(j\omega)$ [2 punti].
2. Dire per quali passi di campionamento T_s è possibile ricostruire $x(t)$ dai suoi campioni $x(nT)$ [1 punto].

Soluzione.

1. La trasformata di Fourier risulta

$$X(j\omega) = \mathrm{triang}(\tfrac{\omega-2\pi}{4\pi}) + \mathrm{triang}(\tfrac{\omega+2\pi}{4\pi})$$

come illustrato in figura



2. $\omega_M = 6\pi$. Dal terorema di Shannon deve essere $\omega_s \geq 2\omega_M = 12$, da cui $T_s \leq \frac{2\pi}{12\pi} = \frac{\pi}{6\pi} = \frac{1}{6}$. In alternativa, si richiede che $6\pi < \pi/T_s$, che restituisce lo stesso risultato.

Esercizio 5 [punti 3]

Il segnale a tempo discreto

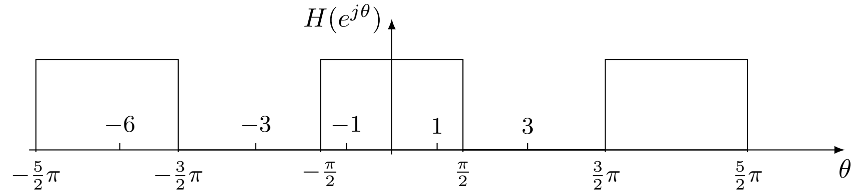
$$x(n) = \cos(n) + \sin(3n) + e^{-j6n}$$

viene filtrato da un filtro (a tempo discreto) passabasso ideale con risposta in frequenza $H(e^{j\theta})$, descritta nell'intervallo $\theta \in [-\pi, \pi]$ da:

$$H(e^{j\theta}) = \begin{cases} 1 & |\theta| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si calcoli l'uscita $y(n)$.

Soluzione. $H(e^{j\theta})$, estesa per periodicità, è rappresentata in figura.



Pertanto, il filtro annulla la sola componente del seno, ovvero:

$$y(n) = \cos(n) + e^{-j6n}$$

Esercizio 6 [punti 3]

Si consideri un segnale reale a tempo continuo $x(t)$ ad estensione limitata, i cui campioni, collezionati con passo di campionamento `T`, siano contenuti nel vettore `x`.

Si chiede di ideare un semplice script MatLab che derivi numericamente la trasformata di Fourier $X(j\omega)$ e le pulsazioni associate, quindi ne dia una rappresentazione grafica.

Soluzione Lo script potrebbe essere

```
Nx = length(x); % numero di campioni del segnale
omx = (0:Nx-1)*2*pi/(Nx*T); % campioni nel dominio della frequenza
X = T*fft(x); % trasformata di Fourier
semilogy(omx,abs(X)); % plot della trasformata di Fourier
```