Proiettività : $F: \mathbb{P}^n(K) \longrightarrow \mathbb{P}^n(K)$ sono biiezioni che rispettano i birapporti

Sono determinate a meno di un $\alpha \in K^*$ da una $\varphi: K^{n+1} \longrightarrow K^{n+1}$ K-lineare. isomorfismo

Per studiare F ⇝ studio $A \in GL_{n+1}(K)$ (a meno di proporz)

$A = \alpha_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(F)$ matrice di F nel s.d.r. $\{P_0, \dots, P_n, U\} = \mathcal{R}$, $P_0 = \langle v_0 \rangle$

A ha le proprietà che se $\underline{x}$ sono le coord di $P \in \mathbb{P}^n(K)$ risp a $\mathcal{R}$ allora $A\underline{x}$ sono le coord di $F(P)$ resp. a $\mathcal{R}$.

Assumiamo che A sia triangolarizzabile (ad es $K = \mathbb{C}$)

Posso usare teoria di Jordan!

NB Elenco sotto i casi $n=1,2$ ma non li ho ricordati tutti a lezione.

$n=1$ $\quad \mathbb{P}^1(K)$

- $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ $\quad$ F identità

- $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ $\quad$ φ autospazio di α ha dim 1 $\quad V_\alpha(\varphi) \subset K^2$ ⇝ $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pto unito di F

  unico pto unito P_0 di coord $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

  È una omologia (speciale : il pto unito appartiene all'iperp. unito)

- $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ $\alpha \neq \beta$ $\quad$ 2 punti uniti

  $V_\alpha(\varphi)$ dim 1 $\longrightarrow$ $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pto unito

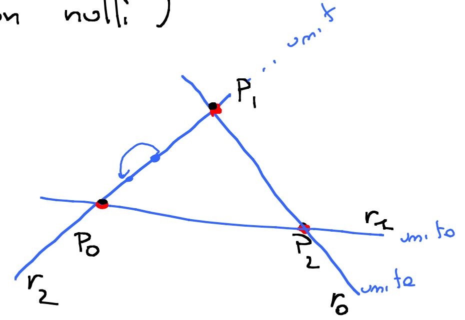
  $V_\beta(\varphi)$ dim 1 ⇝ $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . . .

$n=2$ $\quad \mathbb{P}^2(K) \xrightarrow{F} \mathbb{P}^2(K)$ $\quad$ K alg chiuso (o $A \in GL_3(K)$ triangolarizz.)

Casi possibili

- $\begin{pmatrix} \alpha & & 0 \\ & \beta & \\ 0 & & \gamma \end{pmatrix}$ $\quad \alpha, \beta, \gamma$ distinti (non nulli)

  dim $V_\alpha(\varphi) = 1$ $\longrightarrow$ P_0, P_1, P_2 $\Big\}$ 3 punti uniti



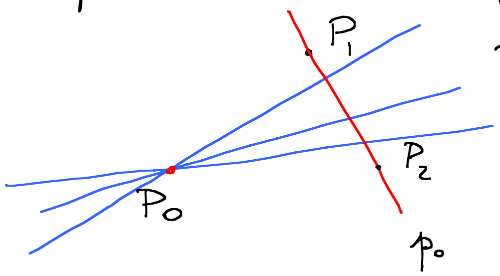
Per dualità (o geometria!) 3 rette unite r_0, r_1, r_2 e sono le uniche rette unite!

- $\begin{pmatrix} \alpha & & 0 \\ & \beta & \\ 0 & & \beta \end{pmatrix}$ $\quad \alpha \neq \beta \quad$ P_0 punto unito $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ($\dim V_\alpha(\varphi) = 1$)

($\dim V_\beta(\varphi) = 2$) $\rightsquigarrow$ $P_1 \vee P_2$ retta di pti uniti p_0, $x_0 = 0$

Per dualità ho una retta unita p_0 e

ho un fascio di rette unite passanti per lo stesso punto P_0



È omologia generale di centro P_0 e asse $P_1 \vee P_2$

- $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ $\quad \alpha \neq \beta$ non nulli

P_0 e P_1 punti uniti (unici)

per dualità 2 rette unite : $P_0 \vee P_1 \quad (0\ 0\ 1)$

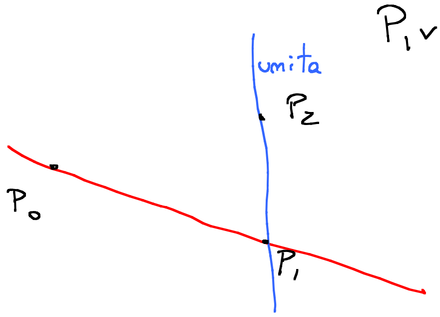
$P_1 \vee P_2 \quad (1\ 0\ 0)$

- $\begin{pmatrix} \alpha & & 0 \\ & \alpha & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix}$ $\quad \alpha \neq 0 \quad$ identità

- $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ $\quad$ P_0 e P_1 punti uniti

$P_0 \vee P_1$ retta di punti uniti $(0\ 0\ 1)$

$P_1 \vee P_2$ retta unita $\rightsquigarrow$ $(1\ 0\ 0)$



Per dualità c'è punto unito P e tutte le rette del fascio di centro quel punto sono unite $\alpha x_0 + \mu x_2 = 0$

È omologia speciale di asse $P_0 \vee P_1$ e centro P_1

Verifico "a mano" che tutte le rette per P_1 sono unite

$s : P_1 \vee Q \quad$ con $Q \in P_0 \vee P_2$, $Q = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$

$$s \ni \begin{pmatrix} a \\ x_1 \\ b \end{pmatrix} \overset{F}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha x_1 + b \\ \alpha b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ x_1 + \frac{b}{\alpha} \\ b \end{pmatrix} \in s$$

oppure osservo $(\lambda\ 0\ \mu) A = \alpha(\lambda\ 0\ \mu)$ [vedere sotto perché funziona]

• $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ $\alpha \neq 0$; 1 punto unito P_0 — 1 retta unita $P_0 \vee P_1$

$\dim V_\alpha = 1$ ms $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ unico

non ce ne sono altri perché non vi sono altri autovettori l. ind con $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq K^3$ è φ-stabile

Per dualità non ci sono altre rette unite!

$n = 3$ Tante...

Analizziamo alcune che ci servono più tardi (non fatto a lezione, ma leggetelo!)

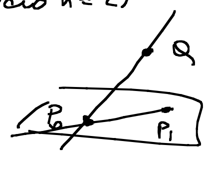
Caso 1 $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \alpha & 1 & \\ & & \alpha & 1 \\ & & & \alpha \end{pmatrix}$ 1 pto unito (unico) P_0 $\xleftarrow{\text{dualità}}$ 1 piano unito $P_0 \vee P_1 \vee P_2$ $(0\,0\,0\,1)$ cons. autovettore della trasposta.

$r: P_0 \vee P_1$ è retta unita (unica)

$\pi: P_0 \vee P_1 \vee P_2$ è iperpiano unito (unico)

Non vi sono altre rette unite in π (vedi studio $n=2$)

Dunque se c'è un'altra retta unita r' interseca π solo in P_0



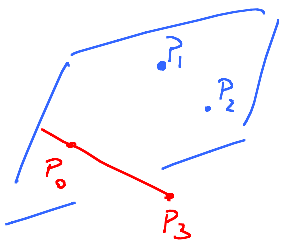
$P_0 \vee P_1 \vee Q$ sarebbe piano unito ↯

Caso 2 $\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \alpha \end{array}\right)$

$r: P_0 \vee P_3$ retta di pti uniti ⇝ fascio di piani uniti di asse $P_0 \vee P_1$

$t: P_0 \vee P_1$ retta unita

$\pi: P_0 \vee P_1 \vee P_2$ piano unito del fascio



Vi sono rette unite oltre a r e t?

St le rette del piano $P_0 \vee P_1 \vee P_3 = \sigma$ passanti per P_0. $F|_\sigma$ ha matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & \\ & \alpha & \\ & & \alpha \end{pmatrix}$ omologia speciale.

Vi sono altre rette unite? No. Se s retta unita, $s \not\subseteq \sigma$, $s \not\subseteq \pi$ allora $s \cap \pi = \{P_0\} = s \cap \sigma$. Il piano $s \vee r$ è unito e contiene $P_3 \Rightarrow s \vee r = \sigma$ ↯

Esercizio 4 8/9/2023

Esercizio 4. Una proiettività φ (F) di uno spazio proiettivo di dimensione 4 ha come punti uniti esattamente quelli di una retta. Determinare le possibili forme di Jordan della proiettività, e per ciascuna determinare la configurazione di iperpiani, rette e piani uniti.
Per ogni retta unita, siano P, Q due punti non uniti; determinare il birapporto $(P\,\varphi P\,Q\,\varphi Q)$ (φ corretto in F).

(sott. che $K = \overline{K} \Rightarrow A$ matrice di F triangolarizzabile)

$F: \mathbb{P}^4(K) \longrightarrow \mathbb{P}^4(K)$

$\cong$ ~~$\mathbb{P}(V)$ di dim 4~~

Ogni pto unito corrisponde ad un blocco di J nella matrice A

c'è retta di punti uniti

P, Q

$\updownarrow \quad \updownarrow$

$\langle v \rangle \quad \langle w \rangle$ $\quad v$ e w sono autovettori di $\varphi: K^5 \longrightarrow K^5$ (associata a F) relativi allo stesso autovalore α.

NB $\langle v, w \rangle \leftrightsquigarrow P \vee Q$ in $\mathbb{P}^4(K)$

$\updownarrow$ autovettori di autov. $\alpha \leftrightsquigarrow$ pti uniti

NB Non vi sono altri pti uniti $\Longrightarrow$ non vi sono autovalori $\neq \alpha$; non vi sono altri blocchi di Jordan.

Dunque 1 autovalore e 2 blocchi

$5 = 4+1$
$= 3+2$
~~$= 2+3$~~
~~$= 1+4$~~

a) $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & & & 0 \\ & \alpha & 1 & & 0 \\ & & \alpha & 1 & 0 \\ & & & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ $\qquad$ b) $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & & 0 & 0 \\ & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ & & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & \alpha \end{pmatrix}$

Scelto opportunamente il s.d.r. su $\mathbb{P}^4(K)$ A avrà la forma a) / b)

Caso a) $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono pti uniti

e inoltre $\underbrace{P_0 \vee P_4}_{r}$ è la retta di punti uniti

$s: P_0 \vee P_1$ è retta unita con 1 pto unito $\quad$ è unica?

$\pi: P_0 \vee P_1 \vee P_2$ è piano unito $\quad$ è unico?

$H: P_0 \vee P_1 \vee P_2 \vee P_3$ è iperpiano unito. è unico? No

per dualità devo avere un fascio di iperpiani che contengono lo stesso piano unito

Per trovarli devo guardare agli autospazi della matrice A^t

A^t ha gli stessi autovalori di A ma non gli stessi autovettori

Se considero $A^t \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_4 \end{pmatrix}$ autovettore

$\uparrow$ coordinate dell'iperpiano unito $\cdot\ a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_4x_4 = 0$

Trasponendo

$(e_0\ e_1\ e_2\ e_3\ e_4)A = \alpha(e_0\ e_1\ e_2\ e_3\ e_4)$

Cerco $(e_0\ e_1\ e_2\ e_3\ e_4)\begin{pmatrix} \alpha & 1 & & & \\ & \alpha & 1 & & \\ & & \alpha & 1 & \\ & & & \alpha & \\ & & & & \alpha \end{pmatrix} = \alpha(e_0\ e_1 \dots e_4)$

$(\underline{\alpha e_0} \quad \underbrace{e_0+\alpha e_1}_{=0} \quad \underbrace{e_1+\alpha e_2}_{=0} \quad \underbrace{e_2+\alpha e_3}_{=0} \quad \underline{\alpha e_4}) = (\underline{\alpha e_0}\ \alpha e_1\ \alpha e_2\ \alpha e_3\ \underline{\alpha e_4})$

autovettori relativi all'autovalore 0 di A^t $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix}$

ossia gli iperpiani uniti sono quelli di eq.

$e_3x_3 + e_4x_4 = 0$ È un fascio di asse il piano $P_0 \vee P_1 \vee P_2$

di eq $\begin{cases} x_3 = 0 \text{ cioè } P_3^* \text{ nel duale} \\ x_4 = 0 \text{ cioè } P_4^* \text{ nel duale.} \end{cases}$

In alternativa A^t $\left(\begin{array}{cccc|c} \alpha & & & & \\ 1 & \alpha & & & 0 \\ & 1 & \alpha & & \\ & & 1 & \alpha & \\ \hline & & 0 & & \alpha \end{array}\right)$

cerco gli autovettori di autovalore α in A^t cioè $\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}}_{P_3^*}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}}_{P_4^*} \rangle \subseteq (K^5)^*$

iperpiano $x_3=0$; $x_4=0$; coordinate dell'iperpiano

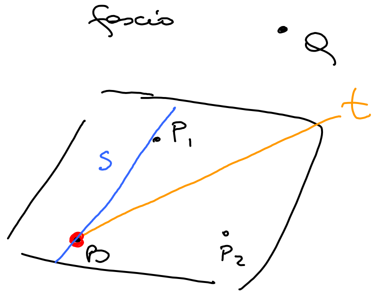
N.B. $\mathbb{M}$ (eq $x_4=0$) iperpiano unito, $\mathbb{L}: \pi \vee P_4$ ($x_3=0$) è unito

Dalla teoria so che c'è fascio di iperpiani uniti ma posso concludere che è quello generato da $\mathbb{M}$ e $\mathbb{L}$

Iperpiani uniti (del fascio) $\overbrace{\underbrace{P_0 \vee P_1 \vee P_2}_{\pi} \vee Q}^{\dim 3}$ $\begin{cases} Q = P_4 \\ Q \neq P_4 \end{cases}$

π asse del fascio

• Caso $Q \neq P_4$



s unita

Vi sono altre t unite? $\begin{cases} t \subseteq P_0 \vee P_1 \vee P_2 \quad \text{NO} \ \text{c'è solo } P_0 \vee P_1 \ (\text{vedi studio } n=2) \\ t \not\subseteq \underbrace{P_0 \vee P_1 \vee P_2}_{\pi} \end{cases}$

⚠ Ne esistono infinite.

Ad es. se considero $P_0 \vee P_1 \vee P_4 = \sigma$ $F_{|\sigma}$ è omologia special dunque esistono ∞ rette unite.

- I° caso $P_4 = Q$ Cerco rette unite in $P_0 \vee P_1 \vee P_2 \vee P_4 = \mathbb{L}$
  - $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{unito}}}{\mathbb{L}}$ $F_{|\mathbb{L}}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & & \\ & \alpha & 1 & \\ & & \alpha & \\ \hline & & & \alpha \end{array}\right)$ ..... posso ragionare analog. vedi sopra caso non trattato a lezione per n=3

Caso b) $\left(\begin{array}{ccc|cc} \alpha & 1 & & & \\ & \alpha & 1 & \multicolumn{2}{c}{O} \\ & & \alpha & & \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{O} & \alpha & 1 \\ & & & & \alpha \end{array}\right)$ $P_0 \vee P_3$ retta di punti uniti

vedo $P_0 \vee P_1$ e $P_3 \vee P_4$ sono rette unite con unico pto unito.

- π : $P_0 \vee P_1 \vee P_2$ piano unito non è unico!

- $\mathbb{L}$: $P_0 \vee P_1 \vee P_2 \vee P_3$ iperpiano unito. Non è unico

Per dualità.
Sicuramente esiste un fascio di iperpiani uniti di asse un piano e poi vi sono piani uniti che non sono l'asse del fascio

Studiamo iperpiani uniti $\rightsquigarrow$ autovettori della trasposta.

$$(a_0 \; a_1 \; a_2 \; a_3 \; a_4) \left(\begin{array}{ccc|cc} \alpha & 1 & & & \\ & \alpha & 1 & & \\ & & \alpha & & \\ \hline & & & \alpha & 1 \\ & & & & \alpha \end{array}\right) = \alpha(a_0 \; — \; a_4)$$

$(0 \; 0 \; 1 \; 0 \; 0)$
$(0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 1)$ $\rightsquigarrow$ fascio di iperpiani uniti è dato dagli iperpiani $(0 \; 0 \; a_2 \; 0 \; a_4)$ di eq. $a_2 x_2 + a_4 x_4 = 0$ che ha per asse $P_0 \vee P_1 \vee P_3 =: \pi'$

Ora osservo che $\underset{P_0 \vee P_1 \vee P_2}{\pi}$, π' sono piani uniti

Ma anche π'' $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{pto unito}}}{P_0} \vee \underbrace{P_3 \vee P_4}_{\text{retta unita}}$ è unito

Considero la retta $\underbrace{P_0 \vee P_1}_{s}$ retta unita ma non fatta da punti uniti

$F_{|s}$ ha matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ — matrice di $F_{|s}$ nel s.d.r. $\mathcal{R}$ sotto

Siano P, Q in s. Calcolare $(P, F(P), Q, F(Q))$

non uniti

$\mathcal{R}: \left\{ P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$P = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} \quad F(P) = \text{"}\begin{pmatrix} \alpha + a \\ \alpha a \end{pmatrix}\text{"} \quad F(Q) = \text{"}\begin{pmatrix} \alpha + b \\ \alpha b \end{pmatrix}\text{"}$

$a \neq 0 \qquad b \neq 0$ risp a $\mathcal{R}$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha + a \\ \alpha a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha + b \\ \alpha b \end{pmatrix} \right) = \left(a \quad \frac{\alpha a}{\alpha + a} \quad b \quad \frac{\alpha b}{\alpha + b} \right) =$$

$$= \frac{\left(\frac{\alpha b}{\alpha + b} - \frac{\alpha a}{\alpha + a} \right)(b - a)}{\left(\frac{\alpha b}{\alpha + b} - a \right)\left(b - \frac{\alpha a}{\alpha + a} \right)} = \frac{(\alpha^2 b + \cancel{\alpha a b} - \alpha^2 a - \cancel{\alpha a b})(b - a)}{(\alpha b - a\alpha - ab)(\alpha b + ba - \alpha a)}$$

$$= \frac{\alpha^2 (b - a)(b - a)}{(\alpha(b - a) - ab)} = \frac{1}{1 - \frac{a^2 b^2}{\alpha^2 (b - a)^2}}$$

Esercizio 3. In uno spazio proiettivo di dimensione 3 sono dati quattro punti P_0, P_1, P_2, P_3 in posizione generale, siano π_i i piani generati dai punti P_j con $j \neq i$, e un punto O non appartenente ai piani π_i. Siano P_i' per $i = 0, 1, 2, 3$ punti sulle rette $O \vee P_i$ distinti da quelli già dati e π_i' i piani generati dai punti P_j' con $j \neq i$.

Mostrare che le rette date dalle intersezioni $\pi_i \wedge \pi_i'$ per $i = 0, 1, 2, 3$ sono complanari, sia σ tale piano.

Siano S_i i punti di intersezione del piano σ con le rette $O \vee P_i$; mostrare che i birapporti $(O\ P_i\ P_i'\ S_i)$ sono tutti uguali per $i = 0, 1, 2, 3$.

Dualizzare costruzione e risultati precedenti.

Soluzione ideale considerare il s. d. r. $P_0\ P_1\ P_2\ P_3\ O$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

π_0: $x_0 = 0$

π_i: $x_i = 0$

$P_0' \in O \vee P_0 \rightsquigarrow \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle$. $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad P_0' = \begin{pmatrix}1+a\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\neq O, P_0$

$P_1' = \begin{pmatrix}1\\1+b\\1\\1\end{pmatrix}$ $\quad P_2' = \begin{pmatrix}1\\1\\1+c\\1\end{pmatrix}$ $\quad P_3' \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1+d\end{pmatrix}$

π_0' : $P_1' \vee P_2' \vee P_3'$ eq. $\left\langle \begin{pmatrix}1\\1+b\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1+c\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1+d\end{pmatrix} \right\rangle$

eq $\begin{vmatrix} x_0 & 1 & \\ x_1 & 1+b & \text{ecc} \\ x_2 & 1 & \\ x_3 & 1 & \end{vmatrix}$ ..

$\boxed{\ldots}\, x_0 - cd\,x_1 - bd\,x_2 - bc\,x_3 = 0$

fascio indicato

$\pi_0 \wedge \pi_0'$ $\quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ \cancel{\ldots x_0} - cd\,x_1 - bd\,x_2 - bc\,x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ +\frac{1}{b}x_1 + \frac{1}{c}x_2 + \frac{1}{d}x_3 = 0 \end{cases}$

$\in$ fascio $\lambda x_0 + \mu\left(\frac{1}{b}x_1 \ldots \frac{1}{d}x_3\right) = 0$ $\quad \lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$

per simmetria

$\pi_1 \wedge \pi_1'$ $\quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ \frac{1}{a}x_0 + \frac{1}{c}x_2 + \frac{1}{d}x_3 = 0 \end{cases}$ . . . . $\in$ fascio $\delta x_1 + \gamma\left(\frac{1}{a}x_0 \ldots\right)$

Mostrare che le rette $\pi_i \wedge \pi_i'$ sono contenute nello stesso piano:

•) lo vedo subito $\frac{1}{a}x_0 + \frac{1}{b}x_1 + \frac{1}{c}x_2 + \frac{1}{d}x_3 = 0$.

2ª possib •) c'è piano del 1° fascio che è anche piano del 2° fascio

$\lambda x_0 + \mu(\qquad) = \delta x_0 + \gamma(\qquad)$ - e lo trovo.