6 STIMA DELLO STATO

Esercizio 1

Si consideri il sistema lineare autonomo a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) \\ y(t) = \mathbf{h}^\top \mathbf{x}(t) \end{cases} \qquad \text{con} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si costruisca, se possibile, uno stimatore dello stato in modo che l'errore di stima converga a zero come combinazione lineare dei modi $e^{-t}\sin(t)$, $e^{-t}\cos(t)$, e e^{-t}.

Soluzione

Il sistema è osservabile per cui lo stimatore richiesto esiste. Il guadagno dello stimatore è $\mathbf{l} = \begin{bmatrix} -4 & -5 & -5 \end{bmatrix}^\top$.

Esercizio 2

Si consideri il sistema lineare autonomo a tempo discreto

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) \\ y(t) = \mathbf{h}^\top \mathbf{x}(t) \end{cases} \qquad \text{con} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si porti il sistema in forma standard di osservabilità e si determini, se esiste, uno stimatore dead-beat dello stato del sistema.

Soluzione

Usando il cambio base (non unico) $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ applicato al sistema duale $(\mathbf{F}^T, \mathbf{h})$ si ottiene la forma canonica di osservabilità (non unica)

$$\mathbf{F}' = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

I guadagni dello stimatore $\mathbf{l} = (\mathbf{T}^\top)^{-1}\mathbf{l}' = \begin{bmatrix} \alpha & \frac{1}{2} - \alpha & -1 - \alpha \end{bmatrix}^\top$, $\alpha \in \mathbb{R}$, posizionano tutti gli autovalori in zero.

Esercizio 3

Si consideri il sistema lineare autonomo a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) \\ y(t) = \mathbf{h}^\top x(t) \end{cases} \qquad \text{con} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si costruisca, se possibile, uno stimatore dello stato in modo che l'errore di stima converga a zero come combinazione lineare dei modi e^{-t}, te^{-t}.

Soluzione

Il sistema non è osservabile, ma il sottosistema non osservabile ha un autovalore in -1 per cui il problema ha soluzione. Il guadagno dello stimatore desiderato è $\mathbf{l} = \begin{bmatrix} -9 & -6 & 0 \end{bmatrix}^\top$.

Esercizio 4

Si consideri il sistema lineare autonomo a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) \\ y(t) = \mathbf{h}^\top x(t) \end{cases} \qquad \text{con} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si discuta la rivelabilità del sistema al variare di α. Per $\alpha = -1$ si costruisca, se possibile, uno stimatore dello stato il cui guadagno $\mathbf{l}$ allochi gli autovalori di $\mathbf{F} + \mathbf{l}\mathbf{h}^\top$ in -1, -2, -3.

Soluzione

Il sistema è rivelabile se e solo se $\alpha < 0$. Lo stimatore richiesto esiste e ha guadagno $\mathbf{l} = \begin{bmatrix} 0 & -7 & -12 \end{bmatrix}^\top$.

Esercizio 5

Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t) \\ y(t) = \mathbf{h}^\top \mathbf{x}(t) \end{cases} \qquad \text{con} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si costruisca, se esiste, un regolatore dead-beat per il sistema.

Soluzione

Il sistema è controllabile e ricostruibile, per cui un regolatore dead-beat esiste. Il regolatore richiesto ha guadagno dello stimatore $\mathbf{l} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^\top$ e vettore di retroazione $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^\top$ con $k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ qualsiasi.

Esercizio 6

Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t) \\ y(t) = \mathbf{h}^\top \mathbf{x}(t) \end{cases} \qquad \text{con} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Si costruisca, se esiste, un regolatore dead-beat per il sistema. Se esiste più di una matrice di retroazione, si calcoli quella che manda a zero lo stato del sistema retroazionato nel numero minimo di passi.

Soluzione

Il sistema è controllabile e ricostruibile, per cui un regolatore dead-beat esiste. Il regolatore richiesto ha guadagno dello stimatore $\mathbf{l} = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 3 \end{bmatrix}^\top$ e vettore di retroazione $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}^\top$.

Esercizio 7

Si consideri il sistema lineare a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t) \\ y(t) = \mathbf{h}^\top \mathbf{x}(t) \end{cases} \qquad \text{con} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si determini, se possibile, un regolatore per il sistema che abbia modi del sistema retroazionato e^{-t}, te^{-t}, $\frac{t^2}{2}$ e e^{-t} e un errore di stima che tende a zero come combinazione lineare dei modi $e^{-\frac{1}{2}t}$, e^{-t}, $e^{-\frac{3}{2}t}$.

Soluzione

Il sistema è raggiungibile e osservabile per cui il regolatore richiesto esiste. Il regolatore richiesto ha guadagno dello stimatore $\mathbf{l} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & -\frac{19}{4} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}^\top$ e vettore di retroazione $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}^\top$.