RECAP :

controllo ottimo LQ per sistemi a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = F x(t) + G u(t) \qquad x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^m$$
$$x(0) = x_0$$

① modello di sistema da controllare

orizzonte finito $t \in [0, T]$

② funzionale costo

$$J_T(t) = x(T)^T S x(T) + \int_0^T x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t) \, dt$$

$S, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sdp

$R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ dp

orizzonte infinito $t \in [0, +\infty)$

$$J_\infty(t) = \int_0^\infty x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t) \, dt$$

$Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sdp

$R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ dp

il caso a orizzonte infinito può essere trattato come il caso a orizzonte finito posto $T \to +\infty$ se (F, G) stabilizzabile e (F, Q) rivelabile con $Q = H^T H$

teorema principale

$$u_T^*(t) = \underset{t \in [0,T]}{\arg\min} \ J_T(t) = -K_T^*(t) x(t)$$

con $K_T^*(t) = R^{-1} G^T M_T(t)$

dove $M_T(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ unica soluzione sdp di

$$\text{(EDR)} \quad -\dot{M}(t) = F^T M(t) + M(t) F - M(t) G R^{-1} G^T M(t) + Q$$
$$M(T) = S$$

$$u_\infty^*(t) = \underset{t \in [0,+\infty)}{\arg\min} \ J_\infty(t) = -K_\infty^* x(t)$$

con $K_\infty^* = R^{-1} G^T M_\infty$

dove $M_\infty \in \mathbb{R}^{n \times n}$ unica soluzione sdp di

$$\text{(EAR)} \quad 0 = F^T M + M F - M G R^{-1} G^T M + Q$$

se (F, G) stabilizzabile e (F, Q) rivelabile con $Q = H^T H$

allora $\lim_{T \to \infty} M_T(t) = M_\infty$

$M_\infty \to$ soluzione di EAR

$M_T(t) \to$ soluzione di EDR

matrice hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} F & -G R^{-1} G^T \\ -Q & -F^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

se (F, G) stabilizzabile e (F, Q) rivelabile con $Q = H^T H$ allora lo spettro della matrice $\mathcal{H}$ è reale e simmetrico rispetto all'asse immaginario

$$\exists \ W = \left[W^- \,\vdots\, W^+ \right] = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

tale che $W^{-1} \mathcal{H} W = \begin{bmatrix} D^- & \\ & D^+ \end{bmatrix}$

dove $D^- = \mathrm{diag}(\{\lambda_i < 0\}) \quad \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$D^+ = \mathrm{diag}(\{\lambda_i > 0\}) = -D^- \in \mathbb{R}^{n \times n}$

ruolo della matrice hamiltoniana nel calcolo della soluzione dell'eq. di Riccati

$$M_T(t) = \left(W_{21} + W_{22} e^{D^+(t-T)} P e^{D^+(t-T)}\right) \left(W_{11} + W_{12} e^{D^+(t-T)} P e^{D^+(t-T)}\right)^{-1}$$

con

$$P = -(W_{22} - S W_{12})^{-1} (W_{21} - S W_{11}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$M_\infty = X_2 \cdot X_1^{-1}$$

con $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times n}$

matrice le cui colonne sono autovettori generalizzati associati agli autovalori stabili di $\mathcal{H}$

gli autovalori del sistema retroazionato coincidono con gli autovalori stabili della matrice hamiltoniana

•) $\Lambda(\mathcal{H}) = \Lambda(D^+) \cup \Lambda(D^-)$

$\overset{!}{=} \Lambda(A) \cup \Lambda(-A)$

$A = F - G K^*_\infty$

•) $u^*_\infty(t)$ è stabilizzante

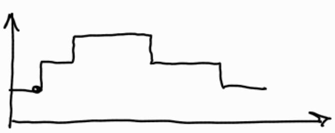
$\longrightarrow \Lambda(A) = \Lambda(D^-)$

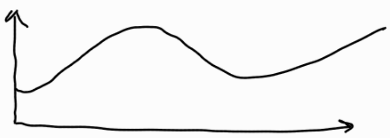
$x(t) : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$

$\mathcal{C} \subseteq \mathbb{N}$
valori discreti

$\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}$
valori continui

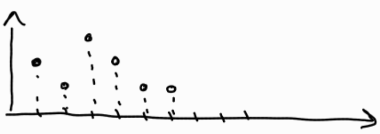
$\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$
tempo continuo



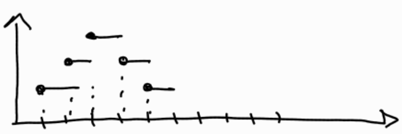


SEGNALE ANALOGICO

$\mathcal{D} \subseteq \mathbb{N}$
tempo discreto



SEGNALE DIGITALE



CONTROLLO OTTIMO LQ per SISTEMI a TEMPO DISCRETO

1. modello di sistema da controllare (lineare)

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \qquad x \in \mathbb{R}^n, \; u \in \mathbb{R}^m$$

$$x(0) = x_0 \qquad t \in \mathbb{N}$$

2. funzionale costo da ottimizzare (quadratico)

- •) orizzonte finito : $t \in [0, T]$ $\quad T \in \mathbb{N}$

$$J_T(t) = x(T)^T S\, x(T) + \sum_{t=0}^{T-1} \left(x(t)^T Q\, x(t) + u(t)^T R\, u(t) \right)$$

$S, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sdp, $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ dp

$$\boxed{u_T^*(t) = \underset{t \in [0, T-1]}{\arg\min} \; J_T(t)}$$

- •) orizzonte infinito : $t \in [0, +\infty)$

$$J_\infty(t) = \sum_{t=0}^{\infty} \left(x(t)^T Q\, x(t) + u^T(t) R\, u(t) \right)$$

$Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sdp, $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ dp

$$\boxed{u_\infty^*(t) = \underset{t \in [0, +\infty)}{\arg\min} \; J_\infty(t)}$$

esempio : caso scalare

1. modello di sistema

$$x(t+1) = x(t) + u(t) \qquad f = g = 1$$

$$x(0) = x_0 \neq 0$$

$$u(t) = -K \cdot x(t)$$

2. funzionale costo

$$J_\infty(t) = \sum_{t=0}^{\infty} x^2(t) + r u^2(t) \qquad q = 1, \; r > 0$$

problema di regolazione : $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$

osservazioni :

$$x(t+1) = x(t) + u(t)$$

$$\overset{!}{=} x(t) - Kx(t) = (1-K)\,x(t) = a \cdot x(t) \qquad \text{con } a = 1-K$$

- $K = 1$ allora $x(1) = 0 \cdot x(0) = 0$ $\Rightarrow$ controllore dead-beat (soluzione a orizzonte finito minimo)
- $|1-K| < 1 \leftrightarrow 0 < K < 2$ allora sistema retroazionato asintoticamente stabile

k qualsiasi

$$x(t) = (1-k)^t x_0$$
$$u(t) = -k(1-k)^t x_0$$

$$J_\infty(t) = \sum_{t=0}^{+\infty} x^2(t) + r\,u^2(t)$$
$$= \sum_{t=0}^{+\infty} \left((1-k)^t x_0\right)^2 + r\left(-k(1-k)^t x_0\right)^2$$
$$= \sum_{t=0}^{+\infty} \left((1-k)^t\right)^2 x_0^2 + rk^2\left((1-k)^t\right)^2 x_0^2$$
$$= (1+rk^2)\,x_0^2 \sum_{t=0}^{+\infty} \left((1-k)^t\right)^2$$
$$= (1+rk^2)\,x_0^2 \sum_{t=0}^{+\infty} \left((1-k)^2\right)^t$$

serie geometrica $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ se $|x| < 1$

$$\boxed{|1-k| < 1 \;;\; 0 < k < 2}$$

$$= (1+rk^2)\,x_0^2 \cdot \frac{1}{\underbrace{1-(1-k)^2}_{1-1+2k-k^2}} = (1+rk^2)\,x_0^2 \cdot \frac{1}{k(2-k)}$$

$$\frac{dJ_\infty(t)}{dk} = \frac{d}{dk}\,\frac{(1+rk^2)}{k(2-k)}\cdot x_0^2 = \left(\frac{2k(2k-k^2)-(2-2k)(1+rk^2)}{k^2(2-k)^2}\right)\cdot x_0^2$$
$$\vdots$$
$$= \frac{2x_0^2}{k^2(2-k)^2}\cdot\left(rk^2+k-1\right) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$rk^2+k-1 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad k = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4r}}{2r}$$

$$k = \frac{-1+\sqrt{1+4r}}{2r} \in (0,2) \quad \forall r > 0$$

caso limite $r \to 0^+$: $k_\infty^* = 1$

CONTROLLO OTTIMO LQ di SISTEMI a TEMPO DISCRETO nel CASO a ORIZZONTE FINITO

① modello di sistema

$$x(t+1) = F\,x(t) + G\,u(t) \qquad x \in \mathbb{R}^n,\; u \in \mathbb{R}^m$$
$$x(0) = x_0 \qquad t \in [0,T],\quad t, T \in \mathbb{N}$$

② funzionale costo

$$J_T(t) = x(T)^T S\,x(T) + \sum_{t=0}^{T-1} x(t)^T Q\,x(t) + u(t)^T R\,u(t)$$

$Q, S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sdp
$R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ dp

$$u_T^*(t) = \arg\min_{t\in[0,T]} J_T(t)$$

Teorema principale

> Per i sistemi a tempo discreto, la legge di controllo ottimo a orizzonte finito è data da
>
> $$u_T^*(t) = -K_T^*(t)\,x(t) \qquad \text{con} \qquad K_T^*(t) = \left(R + G^T M_T(t+1)\,G\right)^{-1} G^T M_T(t+1)\,F$$
>
> dove la sequenza $M_T(0) \dots M_T(T)$ di matrici simmetriche, sdp, di dimensione $n\times n$

Soluzione dell' Equazione di Riccati alle differenze

$$(ERD)\quad \begin{cases} M(t) = F^T M(t+1) F - F^T M(t+1) G \left(R + G^T M(t+1) G\right)^{-1} G^T M(t+1) F + Q \\ M(T) = S \end{cases}$$

In corrispondenza all' ingresso di controllo $u_T^\star(t)$ il funzionale costo assume il valore minimo

$$J_T^\star = x_0^T M_T(0)\, x_0$$

(EDR è legata a ERD e viceversa poiché $\dot{M}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{M(t+\Delta t) - M(t)}{\Delta t}$)

dimostrazione (cenni)

- •) sequenza $M_T(0) \dots M_T(T)$ soluzione di ERD
- •) $0 = -x^T(T) M_T(T) x(T) + x(0)^T M_T(0) x(0) + \sum_{t=0}^{T-1} x(t+1)^T M_T(t+1) x(t+1) - x(t)^T M_T(t)\, x(t)$
- •) equazioni della dinamica $x(t+1) = F x(t) + G u(t)$

$$J_T(t) = x(T)^T S\, x(T) + \sum_{t=0}^{T-1} \begin{bmatrix} u^T(t) & x(t)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$$

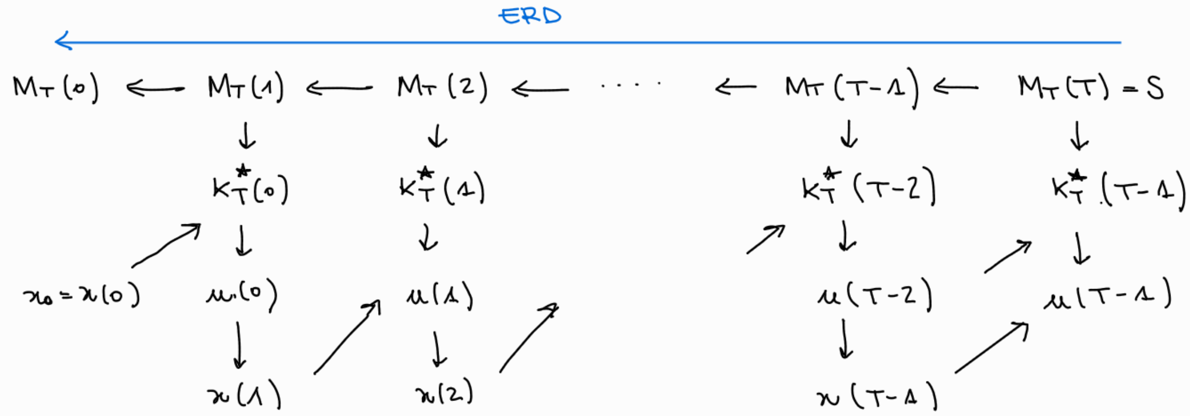
$\vdots$

$$= x(0)^T M_T(0)\, x(0) + \sum_{t=0}^{T-1} v(t)^T \left(R + G^T M_T(t+1) G\right)^{-1} v(t)$$

con $v(t) = \left(R + G^T M_T(t+1) G\right) u(t) + G^T M_T(t+1) F\, x(t)$

$\boxtimes$

$\Rightarrow$ la determinazione di $u_T^\star(t)$ richiede la soluzione di ERD (equazione ricorsive all' indietro)



esempio : caso scalare

① modello di sistema

$$x(t+1) = x(t) + u(t) \qquad f = g = 1 \qquad t \in [0, 2]$$

$$x(0) = x_0 = 1 \qquad T = 2$$

$$u(t) = -k(t)\, x(t)$$

② funzionale costo

$$J_T(t) = 2 \cdot x(T)^2 + \sum_{t=0}^{T-1} x^2(t) + u^2(t) \qquad s = 2,\ q = 1,\ r = 1$$

$|$

$$= 2 \cdot x(2)^2 + \sum_{t=0}^{1} x^2(t) + u^2(t)$$

$$= 2 \cdot x(2)^2 + \left(x^2(1) + u(1)^2 \right) + \left(x(0)^2 + u(0)^2 \right)$$

$$(\text{ERD}) \begin{cases} M(t) = F^T M(t+1) F - F^T M(t+1) G \left(R + G^T M(t+1) G \right)^{-1} G^T M(t+1) F + Q \\ M(T) = S \end{cases}$$

$$f = g = q = r = 1 \quad , \quad s = 2$$

$$\begin{cases} m(t) = m(t+1) - m(t+1)\left(1 + m(t+1)\right)^{-1} m(t+1) + 1 \\ m(2) = 2 \end{cases}$$

$$m(2) = 2$$

$$m(1) = m(2) - m(2)\left(1 + m(2)\right)^{-1} m(2) + 1$$

$$\overset{!}{=} 2 - 2(1+2)^{-1} \cdot 2 + 1 = \frac{5}{3}$$

$$m(0) = m(1) - m(1)\left(1 + m(1)\right)^{-1} m(1) + 1$$

$$= \dots = \frac{13}{8}$$

$$K_T^*(t) = \left(R + G^T M_T(t+1) G \right)^{-1} G^T M_T(t+1) F$$

$$K_T^*(t) = \left(1 + m_T(t+1) \right)^{-1} m_T(t+1)$$

$$K_T^*(1) = \left(1 + m_T(2) \right)^{-1} m_T(2)$$

$$\overset{!}{=} \dots = \frac{2}{3}$$

$$K_T^*(0) = \left(1 + m_T(1) \right)^{-1} m_T(1)$$

$$= \dots = \frac{5}{8}$$

$$u_T^*(0) = - K_T^*(0) \cdot x(0) = -\frac{5}{8}$$

$$u_T^*(1) = - K_T^*(1) \cdot x(1) = - K_T^*(1) \left(x(0) + u_T^*(0) \right) = -\frac{1}{4}$$

$\boxtimes$