Simulazione seconda prova in-itinere

① controllo in retroazione

sistema a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = F x(t) + G u(t) \qquad \text{con} \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Si progetti, dimostrando che è possibile, un controllore in retroazione dal solo primo ingresso g_1 che attribuisca al sistema retroazionato il polinomio caratteristico $p(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)$

(F, g_1) raggiungibile

$$R_1 = \begin{bmatrix} g_1 & Fg_1 & F^2 g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad : \text{rank } R_1 = 3$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$$

$$\Delta_{F+g_1K_1^T}(\lambda) = \det(\lambda I - F - g_1 K_1^T)$$

$$\overset{!}{=} \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -2 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -2 & \lambda & -1 \\ -a & -b & \lambda+2-c \end{bmatrix} \right)$$

$$\overset{!}{=} \lambda(\lambda^2 + 2\lambda - c\lambda - b) + (-2\lambda - 4 + 2c - a)$$

$$\overset{!}{=} \lambda^3 + (2-c)\lambda^2 + (-b-2)\lambda + (-a+2c-4)$$

$$p(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)$$

$$\overset{!}{=} (\lambda^2 + 3\lambda + 2)(\lambda+3)$$

$$\overset{!}{=} \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$$

$$\begin{cases} 2-c = 6 \\ -b-2 = 11 \\ -a+2c-4 = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -18 \\ b = -13 \\ c = -4 \end{cases} \qquad K_1 = \begin{bmatrix} -18 & -13 & -4 \end{bmatrix}^T$$

b) si progetti, dimostrando che è possibile, un controllore in retroazione dal solo secondo ingresso g_2 che attribuisce al sistema retroazionato il polinomio caratteristico $p(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda+2)$

(F, g_2) non raggiungibile

$$R_2 = \begin{bmatrix} g_2 & Fg_2 & F^2 g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad : \quad \text{rank } R_2 = 2$$

$$\begin{aligned} \Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) &= \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -2 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{bmatrix} \\ &= \lambda(\lambda^2 + 2\lambda) - 2(\lambda+2) \\ &= \lambda^2(\lambda+2) - 2(\lambda+2) \\ &= (\lambda^2 - 2)(\lambda+2) \end{aligned}$$

$$\lambda = -2$$
$$\lambda = \pm\sqrt{2}$$

test PBH

$$\text{rank} \begin{bmatrix} z & -1 & 0 & 0 \\ -2 & z & -1 & 1 \\ 0 & 0 & z+2 & 0 \end{bmatrix} = 2 \quad \text{se} \quad z = -2$$

$$\downarrow$$

$\lambda = -2$: autovalore del sottosistema non raggiungibile

$$F = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -2 \end{array}\right] \qquad g_2 = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}}\right\} \bar{g}_1 \\ \end{matrix}$$

$(\bar{F}_{11}, \bar{g}_1)$ raggiungibile

$\Rightarrow \exists$ controllore tale che $\Lambda_A = \{-1, -1, -2\}$

$$K = \begin{bmatrix} a & b & * \end{bmatrix}^T = \left[\begin{array}{cc|c} a & b & 0 \end{array}\right]^T = \left[\begin{array}{c|c} \bar{K} & 0 \end{array}\right]^T$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\bar{F}_{11} + \bar{g}_1 \bar{K}}(\lambda) &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -2 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \right) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -2-a & \lambda - b \end{bmatrix} \right) \\ &= \lambda^2 - b\lambda - 2 - a \end{aligned}$$

$$\bar{p}(\lambda) = (\lambda+1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

$$\begin{cases} -b = 2 \\ -2 - a = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -3 \\ b = -2 \end{cases} \qquad K_2 = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}^T$$

c) Si progetti un controllore in retroazione che faccia uso di entrambi gli ingressi di controllo e attribuisca al risultante sistema retroazionato il polinomio caratteristico $p(\lambda) = (\lambda+1)^3$
Si utilizzi il lemma di Heymann sfruttando la matrice $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ per rendere il sistema raggiungibile dal secondo ingresso g_2.

(F, G) raggiungibile

$$R = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & Fg_1 & Fg_2 & F^2g_1 & F^2g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad : \text{rank } R = 3$$

$(F+GM, g_2)$ raggiungibile

$$F+GM = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = F'$$

$$R = \begin{bmatrix} g_2 & F'g_2 & (F')^2 g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad : \text{rank } R = 3$$

$$\Delta_{F'+g_2K_2^T}(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -2 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda+2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -2-a & \lambda-b & 1-c \\ -1 & 0 & \lambda+2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \lambda(\lambda-b)(\lambda+2) + (\lambda+2)(-2-a) + (1-c)$$

$$\vdots$$

$$= \lambda^3 + (2-b)\lambda^2 + (-2-a-2b)\lambda + (-1-c-4-2a)$$

$$p(\lambda) = (\lambda+1)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$$

$$\begin{cases} 2-b = 3 \\ -2-a-2b = 3 \\ -5-2a-c = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -3 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases} \qquad K_2 = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$K = M + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

② controllo in retroazione + osservabilità & ricostruibilità

sistema a tempo discreto

$$x(t+1) = F\,x(t) + g\,u(t) \qquad \text{con} \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\; g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = h^T x(t) \qquad\qquad h^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

a) si determini, se esiste, un controllore dead-beat

(F, g) raggiungibile > controllabile

$$R = \begin{bmatrix} g & Fg & F^2 g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad : \quad \det R = -1 \neq 0$$

$$K = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$$

$$\Delta_{F+gK^T}(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 & +1 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 & +1 \\ -1-a & \lambda-2-b & -c \\ -a & -b & \lambda-1-c \end{bmatrix} \right)$$

$$= \lambda\left((\lambda-2-b)(\lambda-1-c) - bc \right) + \left((-1-a)(\lambda-1-c) - ac \right) + (-1-a)(-b) + a(\lambda-2-b)$$

$$\vdots$$

$$= \lambda^3 + (-3-b-c)\lambda^2 + (1+b+2c)\lambda + (1-a+b+c)$$

$$p(\lambda) = \lambda^3$$

$$\begin{cases} -3-b-c = 0 \\ 1+b+2c = 0 \\ 1-a+b+c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -2 \\ b = -5 \\ c = 2 \end{cases} \qquad K = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 2 \end{bmatrix}^T$$

b) si discuta al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'osservabilità e la ricostruibilità del sistema

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 3 & \alpha-1 \\ 3 & 7 & \alpha-2 \end{bmatrix} \quad : \quad \det \mathcal{O} = 3\alpha - 6 - 7\alpha + 7 - \alpha + 2 + 3\alpha - 3 - 2\alpha = -4\alpha$$

(F, H) osservabile se $\alpha \neq 0$
ricostruibile se $\alpha \neq 0$

se $\alpha = 0$
allora

•) test PBH

$$\Delta_F(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \lambda(\lambda-2)(\lambda-1) - (\lambda-1)$$

$$= (\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda-1) \quad < \begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = +1 \pm \sqrt{2} \end{array}$$

F non ha autovalori nulli

(F, H) non ricostruibile se $\alpha = 0$

•) $\ker \theta \subseteq \ker F^3$: NO!

$$\ker \theta = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 0 \end{array} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\ker F^3 = \ker \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 5 & 12 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{array}{l} 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ 5x_1 + 12x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(F, H) non ricostruibile se $\alpha = 0$

③ stima dello stato

sistema a tempo discreto

$$\begin{array}{l} x(t+1) = Fx(t) + g\,u(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{array} \qquad \text{con} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

si determini, se esiste, uno stimatore dello stato in modo che l'errore di stima sia combinazione lineare dei soli modi

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^t, \; \binom{t}{1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{t-1}$$

(F, H) non osservabile

$$\theta = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} : \quad \text{rank}\, \theta = 2$$

$$F = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right] \qquad H = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

(F_{11}, H_1) osservabile

$$HF = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad : \quad \text{rank } \Theta = 2$$

$F_{22} = 1/2 \quad : \quad \lambda = 1/2$ autovalore del sottosistema non osservabile

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \quad 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times p} \qquad \begin{array}{l} n = 3 \\ p = 2 \end{array}$$

$$\Delta_{F_{11}+L_1H_1}(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda-1-a & -1+a-b \\ -c & \lambda-1+c-d \end{bmatrix} \right)$$

$$= (\lambda-1-a)(\lambda-1+c-d) + c(-1+a-b)$$

$$= \lambda^2 + (-1-a-1+c-d)\lambda + (\cdots \cdots \cdots)$$

⚠ 2 equazioni in 4 incognite

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+a & 1-a+b \\ c & 1-c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1+a = 1/2 \\ 1-a+b = 1 \\ c = 0 \\ 1-c+d = 1/2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -1/2 \\ b = -1/2 \\ c = 0 \\ d = -1/2 \end{cases} \qquad L_1 = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

esercizio lez. 23

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad : \quad \det \Theta = 0, \quad \text{rank } \Theta = 2$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$F' = T^{-1} F T = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$