RECAP :

problema di controllo ottimo LQ per sistemi a tempo continuo nel caso a orizzonte infinito $t \in [0, +\infty)$

$$u_\infty^\star(t) = \underset{t \in [0,+\infty)}{\operatorname{argmin}} \left(J_\infty(t) = \int_0^\infty x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t) \, dt \right)$$

posto $\dot{x}(t) = F x(t) + G u(t)$, $x(0) = x_0$

→ analogie con il caso a orizzonte finito

- •) (F, G) stabilizzabile
- •) (F, H) oppure (F, Q) con $Q = H^T H$ rivelabile

allora $\lim_{T \to \infty} M_T(t) = M_\infty$ unica soluzione di EAR

$$F^T M + M F - M G R^{-1} G^T M + Q = 0$$

$$\Rightarrow \quad u_\infty^\star(t) = - K_\infty^\star x(t) \quad \text{con} \quad K_\infty^\star = R^{-1} G^T M_\infty$$

$$\dot{x}(t) = \left(- |g| \sqrt{\frac{f^2}{g^2} + \frac{q}{r}} \right) x(t) = a \cdot x(t) \longrightarrow x(t) = e^{at} \cdot x_0$$

- $r \to 0^+$, $q/r \gg 1$: cheap control
  caso limite $q/r \to \infty$
  $\lambda = a \longrightarrow -\infty$: STABILE
- $r \to +\infty$, $q/r \ll 1$: expensive control
  caso limite $q/r \to 0$
  $\lambda = a \longrightarrow -|f| < 0$: STABILE

proprietà stabilizzanti delle legge di controllo

Ad absurdo $\quad K_\infty^\star = R^{-1}G^T M_\infty$

(F, G) stabilizzabile

(F, H) rivelabile, $Q = H^T H$

$$A = F - GK_\infty^\star \quad : \quad \exists\, \lambda \in \Lambda(A),\ \mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$$
$$Av = \lambda v \ , \ v \neq 0$$

(EAR) $\quad F^T M_\infty + M_\infty F - M_\infty G R^{-1} G^T M_\infty + Q = 0$

$$(A + GR^{-1}G^T M_\infty)^T M_\infty + M_\infty (A + GR^{-1}G^T M_\infty) - M_\infty G R^{-1} G^T M_\infty + Q = 0$$

$$A = F - GK_\infty^\star = F - GR^{-1}G^T M_\infty \quad \Updownarrow \quad F = A + GR^{-1}G^T M_\infty$$

$$A^T M_\infty + M_\infty G R^{-1} G^T M_\infty + M_\infty A \boxed{+ M_\infty G R^{-1} G^T M_\infty} \boxed{- M_\infty G R^{-1} G^T M_\infty} + Q = 0$$

(EAR) $\quad A^T M_\infty + M_\infty A + M_\infty G R^{-1} G^T M_\infty + Q = 0$

$\lambda v = Av \qquad\qquad \lambda = a + ib$

$(\lambda v)^* = (Av)^* \qquad \lambda^* = a - ib$

$\lambda^* v^* = v^* A^*$

$$v^* A^T M_\infty v + v^* M_\infty A v + v^* M_\infty G R^{-1} G^T M_\infty v + v^* Q v = 0$$
$$\lambda^* v^* M_\infty v + v^* M_\infty \lambda v + \ \dots \ = 0$$
$$(\lambda + \lambda^*) v^* M_\infty v + \ \dots \ = 0$$
$$2\,\mathrm{Re}(\lambda)\, v^* M_\infty v + \ \dots \ = 0$$

$$\underbrace{\underbrace{2\,\mathrm{Re}(\lambda)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{v^* M_\infty v}_{\geq 0}}_{\geq 0} = \underbrace{- \underbrace{v^* M_\infty G R^{-1} G^T M_\infty v}_{\substack{(v^* M G) R^{-1} (G^T M_\infty v) \\ y^T R^{-1} y \\ \geq 0}} - \underbrace{v^* Q v}_{\geq 0}}_{\leq 0}$$

$$\begin{cases} v^* M_\infty G R^{-1} G^T M_\infty v = 0 \\ v^* Q v = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} G^T M_\infty v = 0 \\ v^* H^T H v = \| Hv \|^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boxed{G^T M_\infty v = 0} \\ \boxed{Hv = 0} \end{cases} \quad v \neq 0$$

$$\lambda v = Av = (F - GK_\infty^\star) v = (F - GR^{-1} \boxed{G^T M_\infty) v} = Fv \quad : \quad \lambda \in \Lambda(F)$$

test PBH di rivelabilità

$$\begin{bmatrix} F - \lambda I \\ H \end{bmatrix} \boxed{v} = 0$$

: matrice non è a rango pieno per tutti gli autovalori instabili di F

$\rightarrow$ (F, H) non è rivelabile

proposizione

Sia $H \in \mathbb{R}^{p \times n}$ tale che $Q = H^T H$

se (F,G) è stabilizzabile e (F,H) è rivelabile

allora la legge di controllo ottimo a orizzonte infinito

$$u^*_\infty(t) = -K^*_\infty x(t) = -R^{-1} G^T M_\infty x(t)$$

è stabilizzante, cioè rende asintoticamente stabile il sistema in catena chiusa

$$A = F - GK^*_\infty \in \mathbb{R}^{n \times n}$$: n autovalori stabili ($Re(\lambda) < 0$)

proposizione

Gli autovalori della matrice $A = F - GK^*_\infty$ corrispondono con gli autovalori stabili della matrice hamiltoniana

$$\Lambda(A) = \Lambda(D^-)$$

matrice hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} F & -GR^{-1}G^T \\ -Q & -F^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$ (indipendente da S)

- se $\lambda \in \Lambda(\mathcal{H})$ allora $-\lambda \in \Lambda(\mathcal{H})$ poiché $\mathcal{H}$ è simile a $-\mathcal{H}^T$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

- (F,G) stabilizzabile e (F,Q) rivelabile

  se $\lambda \in \Lambda(\mathcal{H})$ allora $\lambda \notin \mathbb{R}$

$\longrightarrow$ Spettro reale & simmetrico rispetto all'origine del piano di Gauss

$$W = \left[\begin{array}{c:c} W_1 & W_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{array}\right] \longrightarrow W^{-1} \mathcal{H} W = \begin{bmatrix} D^- & 0 \\ 0 & D^+ \end{bmatrix}$$

$D^- = \text{diag}\{\lambda < 0\}$

$D^+ = -D^-$

$2n \times n$ $2n \times n$

↳ autovettori corrispondenti agli autovalori stabili

↳ autovettori corrispondenti agli autovalori instabili

$$\Lambda(\mathcal{H}) = \Lambda(D^-) \cup \Lambda(D^+)$$

lemma

gli autovalori della matrice hamiltoniana $\mathcal{H}$ sono l'unione degli autovalori di A e di $-A$

$$\Lambda(\mathcal{H}) = \Lambda(A) \cup \Lambda(-A)$$

dimostrazione

cambio di base

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ M_\infty & I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -M_\infty & I \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} \mathcal{H} T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -M_\infty & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F & -GR^{-1}G^T \\ -Q & -F^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ M_\infty & I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F & -GR^{-1}G^T \\ -M_\infty F - Q & M_\infty G R^{-1} G^T - F^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ M_\infty & I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F - GR^{-1}G^T M_\infty & -GR^{-1}G^T \\ -M_\infty F - Q + M_\infty G R^{-1} G^T M_\infty - F^T M_\infty & M_\infty G R^{-1} G^T - F^T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F - GK_\infty^\star & -GR^{-1}G^T \\ 0 & (K_\infty^\star)^T G^T - F^T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A & -GR^{-1}G^T \\ 0 & -A^T \end{bmatrix}$$

: $\mathcal{H}$ è simile a una matrice a blocchi triangolare superiore

- $\Lambda(\mathcal{H}) = \Lambda(T^{-1}\mathcal{H}T)$
- $\Lambda(T^{-1}\mathcal{H}T) = \Lambda(A) \cup \Lambda(-A^T)$
- $\Lambda(-A^T) = \Lambda(-A)$

$$\Lambda(\mathcal{H}) = \Lambda(A) \cup \Lambda(-A)$$

⊠

① $\Lambda(\mathcal{H}) = \Lambda(A) \cup \Lambda(-A) = \Lambda(D^-) \cup \Lambda(D^+)$

② $u_\infty^\star(t)$ è stabilizzante quindi $\Lambda(A) = \{\lambda < 0\}$

$$\Lambda(A) = \Lambda(D^-)$$

proposizione

siano (F, G) stabilizzabile e (F, Q) rivelabile con $Q = H^T H$

sia $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times n}$ una matrice le cui colonne costituisco un insieme di autovettori generalizzati associati agli autovalori stabili di $\mathcal{H}$

Allora $X_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è invertibile e l'unica soluzione sdp delle EAR si calcola come

$$M_\infty = X_2 X_1^{-1}$$

Autovettori generalizzati

- autovettore associato all'autovalore λ : $v \in \mathbb{R}^n$ tale che $(A - \lambda I)v = 0$
  $Av = \lambda v$

- autovettore generalizzato associato all'autovalore λ : $v \in \mathbb{R}^n$ tale che $(A - \lambda I)^m v = 0$
  per qualche $m \in \mathbb{N}$

$V = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda I)v = 0 \}$: autospazio

$V^m = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda I)^m v = 0 \}$: autospazio generalizzato

$\hookrightarrow V^1 \subset V^2 \subset \dots \subset V^m \subset V^{m+1} \dots \subset V^s$

v autovettore generalizzato di ordine m $\in V^m - V^{m-1}$

$X \in \mathbb{R}^{2n \times n}$ le colonne sono un insieme di autovettori generalizzati associati agli n autovalori stabili di $\mathcal{H}$

$Y \in \mathbb{R}^{2n \times n}$ tale che $T = \left[X \vdots Y \right] = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$

$$T^{-1} \mathcal{H} T = \mathcal{H}_J = \begin{bmatrix} H_J^- & 0 \\ 0 & H_J^+ \end{bmatrix}$$

dimostrazione

•) cambio di base

$T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che

$$T^{-1} A T = A_J$$
$$T^{-1}(F - GK_\infty^*)T = A_J$$
$$T^{-1}(F - GR^{-1}G^T M_\infty)T = A_J$$

•) matrice ausiliaria

$$Z = \begin{bmatrix} T \\ M_\infty T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times n} \qquad Z = \begin{bmatrix} I \\ M_\infty \end{bmatrix} T$$

$$\mathcal{H} \cdot Z = \begin{bmatrix} F & -GR^{-1}G^T \\ -Q & -F^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ M_\infty \end{bmatrix} T$$

$$= \begin{bmatrix} F - GR^{-1}G^T M_\infty \\ -Q - F^T M_\infty \end{bmatrix} T$$

$$= \begin{bmatrix} F - GR^{-1}G^T M_\infty \\ M_\infty F - M_\infty GR^{-1}G^T M_\infty \end{bmatrix} T$$

$$= \begin{bmatrix} F - GK_\infty^* \\ M_\infty F - M_\infty G K_\infty^* \end{bmatrix} T$$

$$= \begin{bmatrix} A \\ M_\infty \cdot A \end{bmatrix} T$$

$$= \begin{bmatrix} I \\ M_\infty \end{bmatrix} A \cdot T \quad TA_J$$

$$T^{-1} A T = A_J$$
$$AT = T A_J$$

$$= \begin{bmatrix} I \\ M_\infty \end{bmatrix} T \cdot A_J$$

$$= \begin{bmatrix} T \\ M_\infty T \end{bmatrix} \cdot A_J = Z \cdot A_J$$

- $\mathcal{H} \cdot Z = Z \cdot A_J$ con $\Lambda(A_J) \subset \Lambda(\mathcal{H})$
  → le colonne di Z formano / spannano un sottospazio $\mathcal{H}$-invariante di dimensione n di $\mathbb{R}^{2n}$
- gli autovettori di $\mathcal{H}$ associati agli n autovalori stabili spannano un sottospazio $\mathcal{H}$-invariante di dimension n di $\mathbb{R}^{2n}$

$\Rightarrow$ esiste $T' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che

$X = ZT'$: le colonne di X costituiscono un insieme di autovettori generalizzati di $\mathcal{H}$ associati agli autovalori stabili

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times n}$$

$$Z = \begin{bmatrix} T \\ M_\infty T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times n}$$

$$T' \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ M_\infty T \end{bmatrix} T'$$

$$\begin{cases} X_1 = TT' \\ X_2 = M_\infty T T' \end{cases}$$

① X_1 è invertibile perchè prodotto di due matrici di cambio base che sono invertibili per definizione

② $M_\infty = X_2 \cdot X_1^{-1} = M_\infty TT' (TT')^{-1} = M_\infty$

$\boxtimes$

esempio : caso scalare - integratore semplice

① sistema : $\dot{x}(t) = u(t)$ $\qquad f = 0, \; g = 1$

② funzionale costo : $J_\infty(t) = \int_0^\infty x^2(t) + r^2(t) \, dt$ $\qquad q = r = 1$

- applicazione del teorema principale
  (f, g) stabilizzabile $(g \neq 0)$

(f, q) rivelabile $\quad (q \neq 0)$

$$u_\infty^*(t) = -K_\infty^* x(t) = -\frac{q}{r} m_\infty \quad \text{con} \quad m_\infty = m^+ = \frac{fr}{g^2} + \sqrt{\frac{f^2r^2}{g^4} + \frac{rq}{g^2}} > 0$$

$$\overset{!}{=} -x(t) \qquad\qquad m^+ \overset{!}{=} 1$$

•) applicazione della proposizione

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \Lambda(H) = \{1, -1\} = \{\lambda^+, \lambda^-\}$$

- autovettore corrispondente a $\lambda = -1$: $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$m_\infty = x_2 \cdot x_1^{-1} = 1$$

$$u_\infty^*(t) = -x(t)$$