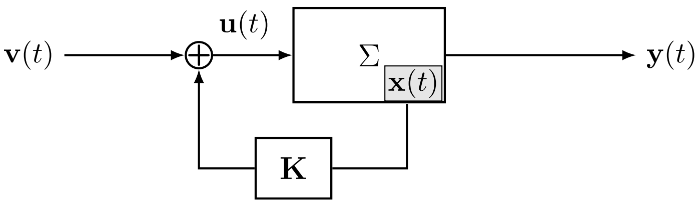
6 STIMA DELLO STATO

Dato il sistema Σ controllato tramite retroazione statica dallo stato



$$\Sigma: \quad \begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{H}\mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$$

problema di stima: nel caso in cui lo stato $\mathbf{x}(t)$ non sia direttamente accessibile o misurabile, costruire una "buona" stima $\hat{\mathbf{x}}(t)$ di $\mathbf{x}(t)$ a partire da dati ingresso/uscita e dalla conoscenza del modello

soluzioni di stima

- **stimatore ad anello aperto**

$$\boxed{\hat{\Sigma}: \quad \begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t+1) &= \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) &= \hat{\mathbf{x}}(t) \end{aligned}}$$

  sia $\mathbf{e}(t) \triangleq \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$: errore di stima
  allora $\mathbf{e}(t+1) = \mathbf{x}(t+1) - \hat{\mathbf{x}}(t+1) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{F}\mathbf{e}(t)$
  $\Rightarrow \mathbf{e}(t) \xrightarrow{t\to\infty} \infty$ se $\mathbf{F}$ è instabile

- **stimatore ad anello chiuso**

$$\boxed{\hat{\Sigma}: \quad \begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t+1) &= \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) - \mathbf{L}(\mathbf{y}(t) - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}(t)) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) &= \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{L} &\in \mathbb{R}^{n\times p}\text{: guadagno dello stimatore} \end{aligned}}$$

  sia $\mathbf{e}(t) \triangleq \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$: errore di stima
  allora $\mathbf{e}(t+1) = \mathbf{x}(t+1) - \hat{\mathbf{x}}(t+1) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) + \mathbf{L}\mathbf{H}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) = (\mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{H})\mathbf{e}(t)$
  $\Rightarrow \mathbf{e}(t) \xrightarrow{t\to\infty} \mathbf{0}$ se $\mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{H}$ è asintoticamente stabile (e in questo caso $\mathbf{F}$ può anche essere instabile)

si osserva che

- Se il sistema è osservabile allora è sempre possibile calcolare un guadagno $\mathbf{L}$ in grado di rendere $\mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{H}$ asintoticamente stabile. Per il calcolo di $\mathbf{L}$ si possono usare gli stessi metodi *allocazione degli autovalori* visti per il controllo in retroazione.
- Se tutti gli autovalori di $\mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{H}$ vengono allocati in zero l'errore di stima converge a zero in tempo finito. Lo stimatore in questo caso viene detto *stimatore dead-beat*.
- Gli stimatori visti sono detti di stimatori di ordine intero perché stimano l'intero stato $\mathbf{x}(t)$. In certi casi, è possibile costruire stimatori di ordine ridotto che stimano solo la parte "veramente incognita" dello stato.
- Tutto quello che abbiamo visto si applica anche a sistemi a tempo continuo (unica eccezione: a tempo continuo non ha senso parlare di stimatori dead-beat).

esempio

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

costruire, se esiste, uno stimatore dead-beat dello stato del sistema

- esistenza di $\mathbf{l}^*$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^\top \\ \mathbf{F}\mathbf{h}^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \to \text{rank}(\mathcal{O}) = 2 \quad \to \Sigma = (\mathbf{F}, \mathbf{h})\text{osservabile} \quad \Rightarrow \mathbf{l}^*\text{esiste}$$

- calcolo di $\mathbf{l}^* = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}^\top$

$$\Delta_{\mathbf{F}+\mathbf{l}\mathbf{h}^\top}(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{F} - \mathbf{l}\mathbf{h}^\top) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - l_1 & -1 - l_1 \\ -l_2 & \lambda - 1 - l_2 \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + \lambda(-1 - l_1 - l_2) + (l_1 - l_2)$$

$$= p(\lambda) = \lambda^2$$

$$\to \begin{cases} -1 - l_1 - l_2 = 0 \\ l_1 - l_2 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \mathbf{l}^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$\boxtimes$

6.1 Rivelabilità dei sistemi lineari

rivelabilità

- un sistema Σ si dice **rivelabile** se esiste uno stimatore dello stato ad anello chiuso il cui errore di stima tende asintoticamente a zero

sistemi a tempo discreto

$$\Sigma \ : \ \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t)$$

Teorema Per un sistema a tempo discreto Σ, le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è rivelabile.
2. Il sistema duale Σ_d è stabilizzabile.
3. Esiste $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che $\mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{H}$ ha autovalori con modulo strettamente minore di 1.
4. Il sottosistema non osservabile di Σ ha autovalori con modulo strettamente minore di 1.
5. La matrice PBH di osservabilità $\begin{bmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{F} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}$ ha rango n, $\forall z$ con $|z| \geq 1$.

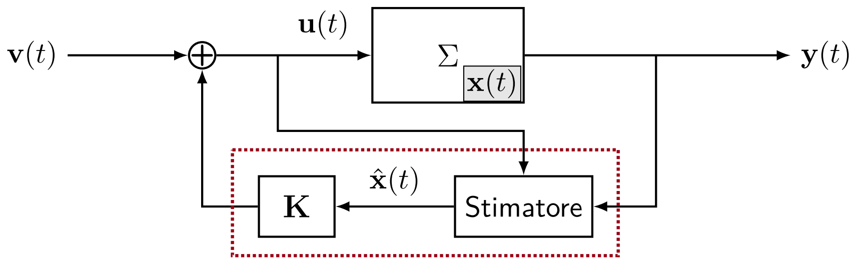
sistemi a tempo continuo

$$\Sigma \ : \ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t)$$

Teorema Per un sistema a tempo continuo Σ, le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è rivelabile.
2. Il sistema duale Σ_d è stabilizzabile.
3. Esiste $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che $\mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{H}$ ha autovalori con parte reale strettamente negativa.
4. Il sottosistema non osservabile di Σ ha autovalori con parte reale strettamente negativa.
5. La matrice PBH di osservabilità $\begin{bmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{F} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}$ ha rango n, $\forall z$ con $\Re[z] \geq 0$.

6.2 Sintesi del regolatore



regolatore

stimatore dello stato + controllo in retroazione dallo stato

equazioni dinamiche del regolatore

sistema Σ : $\quad \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t)$

$\qquad \mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t)$

legge di controllo: $\quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{v}(t)$

stimatore dello stato: $\quad \hat{\mathbf{x}}(t+1) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) - \mathbf{L}(\mathbf{y}(t) - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}(t))$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t+1)\\ \hat{\mathbf{x}}(t+1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{F} & \mathbf{G}\mathbf{K}\\ -\mathbf{L}\mathbf{H} & \mathbf{F}+\mathbf{G}\mathbf{K}+\mathbf{L}\mathbf{H}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \hat{\mathbf{x}}(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{G}\\ \mathbf{G}\end{bmatrix}\mathbf{v}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix}\mathbf{H} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \hat{\mathbf{x}}(t)\end{bmatrix}$$

regolatori stabilizzanti

- un regolatore si dice *stabilizzante* se il sistema regolato è asintoticamente stabile
- un regolatore si dice *dead-beat* se l'evoluzione dello stato del sistema regolato va a zero in un numero finito di passi

sia $\mathbf{T} = \begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{I} & -\mathbf{I}\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$: matrice di cambio di base $\rightarrow \mathbf{z}(t) = \mathbf{T}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \hat{\mathbf{x}}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{e}(t)\end{bmatrix}$

allora

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t+1)\\ \mathbf{e}(t+1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{F}+\mathbf{G}\mathbf{K} & -\mathbf{G}\mathbf{K}\\ \mathbf{0} & \mathbf{F}+\mathbf{L}\mathbf{H}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{e}(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{G}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{v}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix}\mathbf{H} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \hat{\mathbf{e}}(t)\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{\text{autovalori di}\begin{bmatrix}\mathbf{F}+\mathbf{G}\mathbf{K} & -\mathbf{G}\mathbf{K}\\ \mathbf{0} & \mathbf{F}+\mathbf{L}\mathbf{H}\end{bmatrix}\right\} = \{\text{autovalori di } \mathbf{F}+\mathbf{G}\mathbf{K} \cup \text{ autovalori di } \mathbf{F}+\mathbf{L}\mathbf{H}\}$$

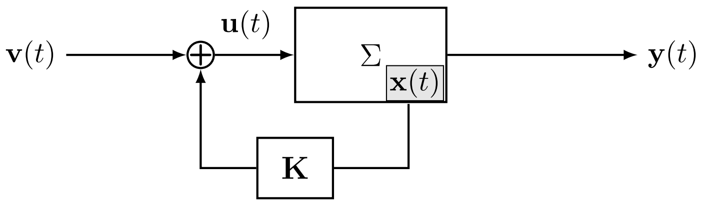
Proposizione (**principio di separazione**)
Gli autovalori della matrice di stato del sistema regolato sono dati dall'unione degli autovalori di $\mathbf{F}+\mathbf{GK}$ e di $\mathbf{F}+\mathbf{LH}$. Quindi la sintesi del controllo in retroazione (allocazione degli autovalori di $\mathbf{F}+\mathbf{GK}$) e dello stimatore (allocazione degli autovalori di $\mathbf{F}+\mathbf{LH}$) possono essere effettuate in modo indipendente.

Teorema Dato un sistema Σ il sistema ammette un regolatore stabilizzante se e solo se Σ è sia stabilizzabile che rivelabile.

Teorema Dato un sistema Σ il sistema ammette un regolatore dead-beat se e solo se Σ è sia controllabile che ricostruibile.

7 CONTROLLO OTTIMO

Dato il sistema Σ controllato tramite retroazione statica dallo stato



$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$$

se $\Sigma = (\mathbf{F}, \mathbf{G})$ è raggiungibile allora è possibile determinare $\mathbf{K}$ tramite *allocazione degli autovalori*

come scegliere gli autovalori del sistema retroazionato? esiste un altro modo per determinare la matrice di retroazione?

controllo ottimo: metodo sistematico che consente di calcolare la matrice di retroazione in base alle specifiche desiderate (nel dominio del tempo) per il sistema in catena chiusa selezionando l'ingresso di controllo in modo da *ottimizzare un opportuno funzionale costo*

PROBLEMA DI OTTIMO
per $\varsigma : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, determinare $\mathbf{x}^\star \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che

- $\varsigma(\mathbf{x}^\star) \leq \varsigma(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ ("minimizzazione")
- $\varsigma(\mathbf{x}^\star) \geq \varsigma(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ ("massimizzazione")

- *problema di ottimizzazione*: $\varsigma(\cdot) = f(\cdot)$ funzione
- *calcolo delle variazioni*: $\varsigma(\cdot) = F(\cdot)$ funzionale (funzione di funzioni)

$$\begin{cases} \min \varsigma(\mathbf{x}) / \max(\varsigma(\mathbf{x})) & \varsigma : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \quad \text{funzione/funzionale obiettivo/costo} \\ \mathbf{x} \in \mathcal{X} & \mathbf{x} \in \mathcal{X} \quad \text{insieme delle soluzioni ammissibili} \end{cases}$$

esempio classico di problema di calcolo delle variazioni: determinazione delle geodesiche - curve a "lunghezza" minima tra due punti $\to$ problema della curva brachistocrona - curva percorsa da una particella con massa per andare da un punto ad un altro nel minor tempo possibile (J. Bernoulli 1696)

problema di controllo ottimo $\sim$ problema classico di calcolo delle variazioni

principali ingredienti di un problema di controllo ottimo
3 (2+1):

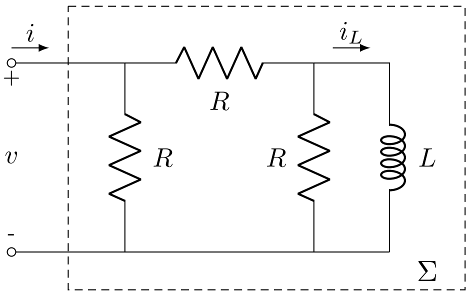
1. **modello del sistema da controllare**
   - sistemi a tempo continuo
   - sistemi a tempo discreto
2. **funzionale costo da minimizzare/massimizzare**
   - ottimizzazione su orizzonte finito
   - ottimizzazione su orizzonte infinito

3. vincoli sullo stato o sull'ingresso di controllo

▶ ingresso di controllo calcolato in modo da ottimizzare il funzionale costo considerando la dinamica del sistema e i vincoli esistenti

esempio: tempo continuo

estrazione di energia da una rete elettrica : calcolare la tensione d'ingresso alla rete che consente di estrarre la massima energia nell'intervallo di tempo $[0, T]$



$i_L(0) = 1A,\ R = 1\Omega,\ L = 2H$

1. modello del sistema: $\begin{cases} \dfrac{di_L(t)}{dt} = -\dfrac{1}{4} i_L(t) + \dfrac{1}{4} v(t) \\ i(t) = \dfrac{1}{2} i_L(t) + \dfrac{3}{2} v(t) \end{cases}$

2. funzionale costo: $E = \int_0^\top v(t) i(t) dt$

problema di controllo ottimo: $\max_{v(t)} E(t),\ t \in [0, T]$

$$E(t) = \int_0^\top v(t) i(t) dt = \int_0^\top v(t) \left(\frac{1}{2} i_L(t) + \frac{3}{2} v(t) \right) dt = \int_0^\top \begin{bmatrix} v(t) & i_L(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} dt$$

$\boxtimes$

esempio: tempo discreto

allocazione delle risorse : distribuire un ammontare limitato $\mathcal{S}$ di soldi tra un numero finito N di progetti differenti in modo da massimizzare il ricavato

hp: il ricavato ottenuto destinando la somma $u(k)$ al progetto k è $r(k) = \frac{3}{2} u(k)$

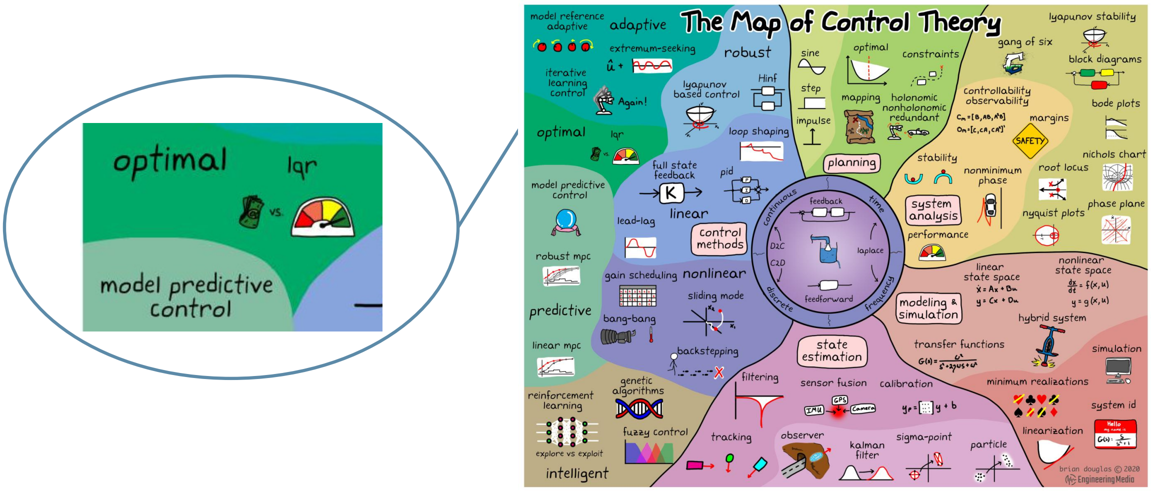
1. modello del sistema: $x(k+1) = x(k) - u(k)$
2. funzionale costo: $R(k) = \sum_{k=1}^{N} r(k)$
3. vincoli sullo stato: $\mathbf{x}(1) = \mathcal{S} \qquad x(N+1) = 0$

problema di controllo ottimo: $\max_{u(k)} R(k),\ k \in [1, N]$

$\boxtimes$

controllo ottimo LQ: caso particolare di controllo ottimo in cui

- il modello da controllare è **Lineare**
- il funzionale costo da minimizzare/massimizzare è **Quadratico**



7.1 Controllo ottimo LQ di sistemi a tempo continuo

1. modello di sistema da controllare:
   sistema lineare a tempo continuo il cui stato è accessibile (misurabile o stimabile)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) \qquad && \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n \text{ accessibile} \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 && \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

2. funzionale costo da minimizzare/massimizzare:
   $\rightarrow$ si possono distinguere due casi:

   - **ottimizzazione quadratica su orizzonte finito**

     si considera un intervallo di tempo finito $t \in [t_0, t_f] \rightsquigarrow t \in [0, T]$,

     su cui è definito il funzionale costo

$$J_T(t) = \mathbf{x}(T)^\top \mathbf{S}\mathbf{x}(T) + \int_0^T \Big(\mathbf{x}(t)^\top \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^\top \mathbf{R}\mathbf{u}(t)\Big)\, dt$$

     con $\mathbf{S}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrici semi-definite positive e $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ matrice definita positiva

     $\Rightarrow$ problema di controllo ottimo:

$$\boxed{\mathbf{u}_T^\star(t) = \arg \min_{t\in[0,T]} J_T(\mathbf{u}(t))}$$

     ▶ Il funzionale costo risulta dalla somma di tre componenti:

$\mathbf{u}(t)^\top \mathbf{R}\mathbf{u}(t)$	costo del controllo
	controllo a energia minima: $J_T(t) = \int_0^T \mathbf{u}(t)^\top \mathbf{R}\mathbf{u}(t)dt$
$\mathbf{x}(t)^\top \mathbf{Q}\mathbf{x}(t)$	scostamento dall'equilibrio
	tracking ad errore minimo: $J_T(t) = \int_0^T \mathbf{x}(t)^\top \mathbf{Q}\mathbf{x}(t)dt$
$\mathbf{x}(T)^\top \mathbf{S}\mathbf{x}(T)$	scostamento al tempo finale
	controllo del punto finale: $J_T(t) = \mathbf{x}(t)^\top \mathbf{S}\mathbf{x}(T)$

- **ottimizzazione quadratica su orizzonte finito**

  si considera un intervallo di tempo infinito $t \in [0, +\infty)$,

  su cui è definito il funzionale costo

$$J_\infty(t) = \int_0^\infty \left(\mathbf{x}(t)^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^\top \mathbf{R} \mathbf{u}(t) \right) dt$$

  con $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrice semi-definita positiva e $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ matrice definita positiva.

  $\Rightarrow$ problema di controllo ottimo:

$$\boxed{\mathbf{u}_\infty(t)^\star = \arg \min_{t \in [0,+\infty)} J_\infty(\mathbf{u}(t))}$$

  ▶ il funzionale costo risulta dalla somma di due componenti dal momento che $T \to +\infty$

esempio: derivazione della soluzione tramite calcolo diretto - caso scalare

1. modello del sistema: sistema lineare scalare

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f x(t) + u(t) \\ x(0) &= x_0 \\ u(t) &= -k x(t) \end{aligned} \qquad \begin{cases} f < 0 & \text{asint. stabile} \\ f = 0 & \text{sempl. stabile} \\ f > 0 & \text{instabile} \end{cases}$$

   sistema in catena chiusa

$$\dot{x}(t) = (f-k)x(t) \qquad \rightarrow \qquad \begin{aligned} x(t) &= e^{(f-k)t} x_0 \\ u(t) &= -k e^{(f-k)t} x_0 \end{aligned}$$

2. funzionale costo: $J_T(t) = \displaystyle\int_0^T q x^2(t) + r u^2(t) dt \qquad q \geq 0,\ r > 0$

   $r \to 0^+$ *cheap control*

   $r \to +\infty$ *expensive control*

$$J_T(t) = \int_0^T q e^{2(f-k)t} x_0^2 + r k^2 e^{2(f-k)t} x_0^2 dt = x_0^2 \left(q + r k^2 \right) \left(\int_0^T e^{2(f-k)t} dt \right) \quad \text{con}$$

$$\int_0^T e^{2(f-k)t} dt = \frac{1}{2(f-k)} e^{2(f-k)t} \Big|_0^T = \begin{cases} +\infty & f-k \geq 0 \\ \frac{1}{2(f-k)} \left(e^{2(f-k)T} - 1 \right) & f-k < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} +\infty & k \leq f \\ \dfrac{q + rk^2}{2(f-k)} x_0^2 \left(e^{2(f-k)T} - 1 \right) & k > f \end{cases}$$

fissati x_0, r, q, T, calcolare $k_T^\star$ tale che $u_T^\star(t) = -k_T^\star x(t) = \arg\min J_T(u(t))$

è necessario risolvere

$$\frac{d}{dk} \left(\frac{q + rk^2}{2(f-k)} x_0^2 \left(e^{2(f-k)T} - 1 \right) \right) = 0$$

si osserva che, per $T \to +\infty$, si ottiene

$$J_\infty(t) = \begin{cases} +\infty & k \leq f \\ \\ -\dfrac{q + rk^2}{2(f-k)} x_0^2 & k > f \end{cases}$$

allora, fissati x_0, r, q, per calcolare $k_\infty^\star$ tale che $u_\infty^\star(t) = -k_\infty^\star x(t) = \arg\min J_\infty(u(t))$ è necessario risolvere

$$\frac{d}{dk}\left(-\frac{q+rk^2}{2(f-k)}x_0\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2rk(k-f) - (q + rk^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 - 2fk - \frac{q}{r} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$k_\infty^\star = f \pm \sqrt{f^2 + \frac{q}{r}} = \begin{cases} f - \sqrt{f^2 + \frac{q}{r}} < f & \text{non accettabile} \\ f + \sqrt{f^2 + \frac{q}{r}} & \text{accettabile} \end{cases}$$

$\boxed{k_\infty^\star(r) = f + \sqrt{f^2 + \dfrac{q}{r}}}$: funzione monotona decrescente in r indipendente da x_0

$\boxtimes$

7.2 Controllo ottimo LQ di sistemi a tempo continuo a orizzonte finito

1. *modello del sistema da controllare*: sistema lineare a tempo continuo

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) \qquad && \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m \\ &\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 && t \in [0, T] \end{aligned}$$

2. *funzionale costo da minimizzare/massimizzare*: ottimizzazione su orizzonte finito

$$J_T(t) = \mathbf{x}(T)^\top \mathbf{S}\mathbf{x}(T) + \int_0^T \left(\mathbf{x}(t)^\top \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^\top \mathbf{R}\mathbf{u}(t)\right) dt$$

$\mathbf{S}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrici semi-definite positive $\quad \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ matrice definita positiva

$\Rightarrow$ problema di controllo ottimo:

$$\boxed{\mathbf{u}_T^\star(t) = \arg \min_{t\in[0,T]} J_T(\mathbf{u}(t))}$$

7.2.1 teorema principale

Teorema Per i sistemi a tempo continuo, la legge di controllo ottimo su orizzonte finito è data da

$$\mathbf{u}_T^\star(t) = -\mathbf{K}_T^\star(t)\mathbf{x}(t) \qquad \text{con} \qquad \mathbf{K}_T^\star(t) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_T(t)$$

dove $\mathbf{M}_T(t) = \mathbf{M}_T(t)^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è l'unica soluzione sdp dell'Equazione Differenziale di Riccati:

$$(EDR) \qquad \begin{cases} -\dot{\mathbf{M}}(t) = \mathbf{F}^\top\mathbf{M}(t) + \mathbf{M}(t)\mathbf{F} - \mathbf{M}(t)\mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top\mathbf{M}(t) + \mathbf{Q} \\ \mathbf{M}(T) = \mathbf{S} \end{cases}$$

In corrispondenza all'ingresso di controllo $\mathbf{u}_T^\star(t)$, il funzionale costo assume il valore (minimo)

$$J_T^\star = \mathbf{x}_0^\top\mathbf{M}_T(0)\mathbf{x}_0$$

Dimostrazione. Si consideri la matrice $\mathbf{M}(t) = \mathbf{M}(t)^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ differenziabile in $t \in [0,T]$ (*qualsiasi*) e la funzione

$$H(t) = \int_0^T \frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}(t)^\top\mathbf{M}(t)\mathbf{x}(t)\right) dt$$

Applicando la regola fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$\begin{aligned} H(t) = \int_0^T \frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}(t)^\top\mathbf{M}(t)\mathbf{x}(t)\right) dt &= \left.\mathbf{x}(t)^\top\mathbf{M}(t)\mathbf{x}(t)\right|_0^T \\ &= \mathbf{x}(T)^\top\mathbf{M}(T)\mathbf{x}(T) - \mathbf{x}(0)^\top\mathbf{M}(0)\mathbf{x}(0) \end{aligned}$$

Applicando le regole del calcolo differenziale e sfruttando le equazioni della dinamica del sistema si ottiene

$$\begin{aligned} H(t) &= \int_0^T \frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}(t)^\top\mathbf{M}(t)\mathbf{x}(t)\right) dt \\ &= \int_0^T \left(\dot{\mathbf{x}}(t)^\top\mathbf{M}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t)^\top\dot{\mathbf{M}}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t)^\top\mathbf{M}(t)\dot{\mathbf{x}}(t)\right) dt \\ &= \int_0^\top \left((\mathbf{F}\mathbf{x}(t)+\mathbf{G}\mathbf{u}(t))^\top\mathbf{M}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t)^\top\dot{\mathbf{M}}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t)^\top\mathbf{M}(t)\left(\mathbf{F}\mathbf{x}(t)+\mathbf{G}\mathbf{u}(t)\right)\right) dt \\ &= \int_0^\top \begin{bmatrix}\mathbf{u}(t)^\top & \mathbf{x}(t)^\top\end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G}^\top\mathbf{M}(t) \\ \mathbf{M}(t)\mathbf{G} & \mathbf{F}^\top\mathbf{M}(t) + \mathbf{M}(t)\mathbf{F} + \dot{\mathbf{M}}(t)\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(t)\end{bmatrix} dt \end{aligned}$$

Nota l'equivalenza

$$\mathbf{x}(T)^\top\mathbf{M}(T)\mathbf{x}(T) - \mathbf{x}(0)^\top\mathbf{M}(0)\mathbf{x}(0) = \int_0^\top \begin{bmatrix}\mathbf{u}(t)^\top & \mathbf{x}(t)^\top\end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G}^\top\mathbf{M}(t) \\ \mathbf{M}(t)\mathbf{G} & \mathbf{F}^\top\mathbf{M}(t) + \mathbf{M}(t)\mathbf{F} + \dot{\mathbf{M}}(t)\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(t)\end{bmatrix} dt$$

si consideri la funzione

$$H'(t) = \mathbf{x}(0)^\top\mathbf{M}(0)\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(T)^\top\mathbf{M}(T)\mathbf{x}(T) + \int_0^\top \begin{bmatrix}\mathbf{u}(t)^\top & \mathbf{x}(t)^\top\end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G}^\top\mathbf{M}(t) \\ \mathbf{M}(t)\mathbf{G} & \mathbf{F}^\top\mathbf{M}(t) + \mathbf{M}(t)\mathbf{F} + \dot{\mathbf{M}}(t)\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(t)\end{bmatrix} dt = 0$$

Si riscrive il funzionale costo $J_T(t) = \mathbf{x}(T)^\top\mathbf{S}\mathbf{x}(T) + \int_0^T \begin{bmatrix}\mathbf{u}(t)^\top & \mathbf{x}(t)^\top\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(t)\end{bmatrix} dt$ come segue

$$\begin{aligned} J_T(t) &= J_T(t) + H'(t) \\ &= \mathbf{x}(T)^\top(\mathbf{S} - \mathbf{M}(T))\mathbf{x}(T) + \mathbf{x}(0)^\top\mathbf{M}(0)\mathbf{x}(0) + \int_0^T \begin{bmatrix}\mathbf{u}(t)^\top & \mathbf{x}(t)^\top\end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{G}^\top\mathbf{M}(t) \\ \mathbf{M}(t)\mathbf{G} & \mathbf{Q} + \mathbf{F}^\top\mathbf{M}(t) + \mathbf{M}(t)\mathbf{F} + \dot{\mathbf{M}}(t)\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(t)\end{bmatrix} dt \end{aligned}$$

Si consideri ora la matrice $\mathbf{M}(t) = \mathbf{M}_T(t) = \mathbf{M}_T(t)^\top \in \mathbf{R}^{n\times n}$ differenziabile in $t \in [0, T]$ *soluzione della EDR*, segue che

$$\begin{aligned} J_T(t) &= \mathbf{x}(0)^\top \mathbf{M}_T(0)\mathbf{x}(0) + \int_0^T \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t)^\top & \mathbf{x}(t)^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{G}^\top \mathbf{M}_T(t) \\ \mathbf{M}_T(t)\mathbf{G} & \mathbf{M}_T(t)\mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top \mathbf{M}_T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} dt \\ &= \mathbf{x}(0)^\top \mathbf{M}_T(0)\mathbf{x}(0) + \int_0^T \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t)^\top & \mathbf{x}(t)^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{M}_T(t)\mathbf{G} \end{bmatrix} \mathbf{R}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{G}^\top \mathbf{M}_T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} dt \end{aligned}$$

Si consideri l'ingresso ausiliario $\mathbf{v}(t) = \mathbf{R}\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}^\top \mathbf{M}_T(t)\mathbf{x}(t)$ allora

$$J_T(t) = \mathbf{x}(0)^\top \mathbf{M}_T(0)\mathbf{x}(0) + \int_0^T \mathbf{v}(t)^\top \mathbf{R}^{-1}\mathbf{v}(t)dt$$

Poichè $\mathbf{R}$ è una matrice definita positiva, allora

$$J_T^\star = \min_{t\in[0,T]} J_T(t) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{R}\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}^\top \mathbf{M}_T(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$

da cui si conclude che

$$\mathbf{u}_T^\star(t) = -\left(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top \mathbf{M}_T(t)\right)\mathbf{x}(t) = -\mathbf{K}_T^\star(t)\mathbf{x}(t)$$

e di conseguenza $J_T^\star = \mathbf{x}(0)^\top \mathbf{M}_T(0)\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0^\top \mathbf{M}_T(0)\mathbf{x}_0$. □

EDR = Equazioni Differenziali di Riccati
dai matematici *Jacopo Riccati* e suo figlio *Vincenzo*

eq. differenziale ordinaria **quadratica** nella funzione incognita
$y'(x) = q_0(x) + q_1(x)y(x) + q_2(x)y^2(x), \quad q_0(x) \neq 0, q_2(x) \neq 0$

[caso particolare delle eq. di Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)]

1830ca l'eq. HJB ha le sue origini nel lavoro di Hamilton, con successivi miglioramenti di Jacobi, nel contesto del calcolo delle variazioni → HJB condizione necessaria per l'ottimalità

1835 Carathéodory definisce l'approccio noto come la "strada reale" del calcolo delle variazioni → HJB condizione necessaria e sufficiente per l'ottimalità

1950ca Bellman - "Invece di determinare la sequenza ottimale delle decisioni dallo stato fisso del sistema, **desideriamo determinare la decisione ottima da prendere in qualsiasi stato del sistema**." → *programmazione dinamica*

1960ca Kalman è il primo a usare il termine "eq. HJB" → stretta connessione tra il lavoro di Bellman (programmazione dinamica) e quello di Hamilton-Jacobi nel calcolo delle variazioni

esempio: derivazione della soluzione tramite applicazione del teorema principale - caso scalare

1. modello del sistema: sistema lineare scalare

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= fx(t) + gu(t) \\ x(0) &= x_0 \\ u(t) &= -k(t)x(t) \end{aligned} \qquad g \neq 0, \quad \begin{cases} f < 0 & \text{asint. stabile} \\ f = 0 & \text{sempl. stabile} \\ f > 0 & \text{instabile} \end{cases}$$

2. funzionale costo: $J_T(t) = sx^2(T) + \int_0^T qx^2(t) + ru^2(t)dt \qquad s, q \geq 0, \ r > 0$

applicazione del teorema principale:

$$u_T^\star(t) = -k_T^\star(t)x(t) \quad \text{con} \quad k_T^\star(t) = \frac{g}{r}m_T(t) \quad \text{dove} \quad m_T(t) \in \mathbb{R} \;\text{ soddisfa } \begin{cases} -\dot{m}(t) = 2fm(t) - \dfrac{g^2}{r}m^2(t) + q \\ m(T) = s \end{cases}$$

è possibile calcolare la soluzione della EDR in forma chiusa tramite separazione delle variabili:

$$-\frac{dm(t)}{dt} = 2fm(t) - \frac{g^2}{r}m^2(t) + q \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\frac{g^2}{r}m^2(t) - 2fm(t) - q}\, dm(t) = dt$$

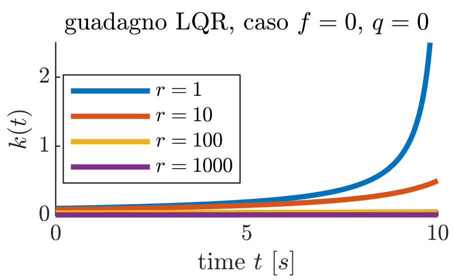
$$\int_{m(t)}^{s} \frac{1}{\frac{g^2}{r}m^2(t) - 2fm(t) - q}\, dm(t) = \int_t^{T} dt$$

si distinguono diversi casi:

- **caso 1**: $f = q = 0$
  ▷ $f = 0 \;\Rightarrow\; \dot{x}(t) = gu(t)$: modello singolo integratore
  ▷ $q = 0 \;\Rightarrow$ penalizzazione dello stato solo all'istante finale

$$\int_{m(t)}^{s} \frac{1}{\frac{g^2}{r}m^2(t)}\, dm(t) = \int_t^{T} dt \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{s} + \frac{1}{m(t)} = \frac{g^2}{r}(T-t)$$

$$\boxed{m_T(t) = \frac{1}{\dfrac{g^2}{r}(T-t) + \dfrac{1}{s}}} \qquad\qquad k_T^\star(t) = \frac{g}{r}m_T(t) = \frac{\frac{g}{r}}{\frac{g^2}{r}(T-t) + \frac{1}{s}}$$



- **caso 2**: altrimenti

$$\int_{m(t)}^{s} \frac{1}{\frac{g^2}{r}m^2(t) - 2fm(t) - q}\, dm(t) = \int_t^{T} dt \qquad \text{dove}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\frac{g^2}{r}m^2(t) - 2fm(t) - q} &= \frac{1}{\frac{g^2}{r}\left(m^2(t) - 2\frac{fr}{g^2}m(t) - \frac{qr}{g^2}\right)} \\ &= \frac{1}{\frac{g^2}{r}\left(m(t) - m^+\right)\left(m(t) - m^-\right)} \\ &= \frac{1}{\frac{g^2}{r}\left(m^+ - m^-\right)}\left(\frac{1}{m(t) - m^+} - \frac{1}{m(t) - m^-}\right) \qquad \text{con}\end{aligned}$$

$$m^+ = \frac{fr}{g^2} + \sqrt{\frac{f^2r^2}{g^4} + \frac{rq}{g^2}} > 0, \quad m^- = \frac{fr}{g^2} - \sqrt{\frac{f^2r^2}{g^4} + \frac{rq}{g^2}} < 0$$

quindi

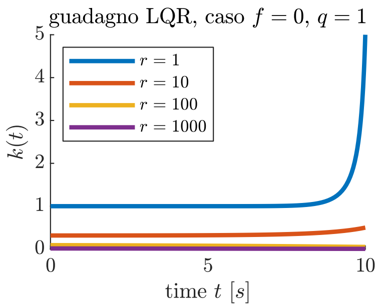
$$
\begin{aligned}
\int_{m(t)}^{s} \frac{1}{\frac{g^2}{r}m^2(t) - 2fm(t) - q}\, dm(t) &= \int_{m(t)}^{s} \frac{1}{\frac{g^2}{r}(m^+ - m^-)} \left(\frac{1}{m(t)-m^+} - \frac{1}{m(t)-m^-} \right) dm(t) \\
&= \underbrace{\frac{1}{\frac{g^2}{r}(m^+ - m^-)}}_{\frac{1}{\beta}>0} \int_{m(t)}^{s} \left(\frac{1}{m(t)-m^+} - \frac{1}{m(t)-m^-} \right) dm(t) \\
&= \frac{1}{\beta}\left(\left(\ln\left(m(t)-m^+\right) - \ln\left(m(t)-m^-\right)\right)\Big|_{m(t)}^{s} \right) \\
&= \frac{1}{\beta}\left(\ln\left(\frac{s-m^+}{s-m^-}\right) - \ln\left(\frac{m(t)-m^+}{m(t)-m^-}\right)\right) \qquad = \int_t^T dt
\end{aligned}
$$

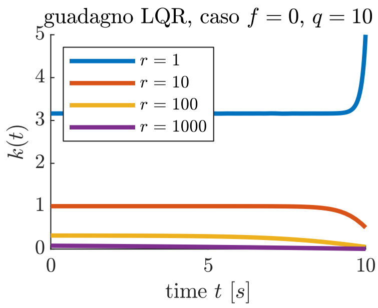
da cui

$$
\begin{aligned}
\int_{m(t)}^{s} \frac{1}{\frac{g^2}{r}m^2(t) - 2fm(t) - q}\, dm(t) = \int_t^T dt \;&\Leftrightarrow\; \ln\left(\frac{s-m^+}{s-m^-}\right) - \ln\left(\frac{m(t)-m^+}{m(t)-m^-}\right) = \beta(T-t) \\
&\Leftrightarrow\; \ln\left(\underbrace{\frac{s-m^+}{s-m^-}}_{\frac{1}{\alpha}} \frac{m(t)-m^-}{m(t)-m^+}\right) = \beta(T-t) \\
&\Leftrightarrow\; \frac{m(t)-m^-}{m(t)-m^+} = \alpha e^{\beta(T-t)}
\end{aligned}
$$

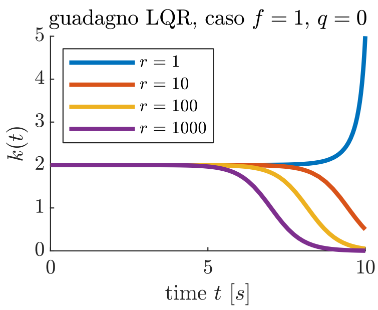
$$\boxed{m_T(t) = m^+ + \frac{m^- - m^+}{1-\alpha e^{\beta(T-t)}}} \qquad\qquad k_T^\star(t) = \frac{g}{r}m_T(t) = \frac{g}{r}\left(m^+ + \frac{m^- - m^+}{1-\alpha e^{\beta(T-t)}} \right)$$

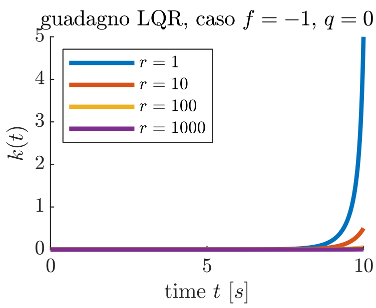
a. $f = 0,\ q > 0$



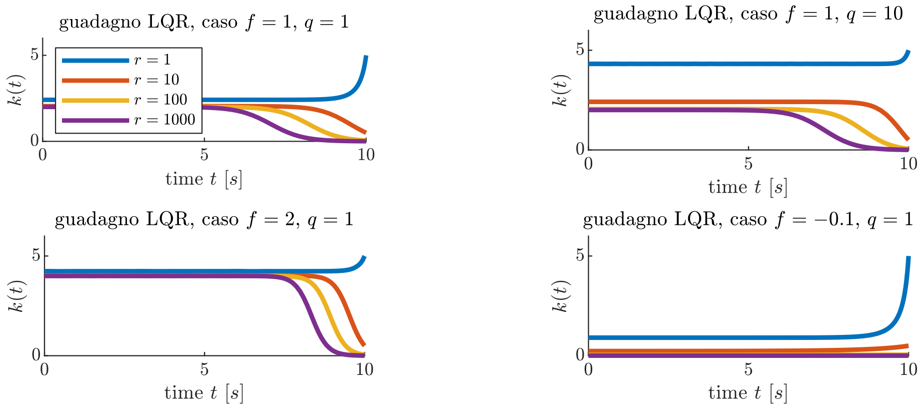


b. $f \neq 0,\ q = 0$





c. $f \neq 0,\ q > 0$



In conclusione

$$u_T^\star(t) = -k_T^\star(t)x(t) \qquad \text{con} \qquad k_T^\star(t) = \frac{g}{r} m_T(t)$$

$$\boxed{m_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{g^2}{r}(T-t)+\frac{1}{s}} & \text{se} \quad f = q = 0 \\ m^+ + \frac{m^- - m^+}{1-\alpha e^{\beta(T-t)}} & \text{altrimenti} \end{cases}}$$

$$m^+ = \frac{fr}{g^2} + \sqrt{\frac{f^2r^2}{g^4} + \frac{rq}{g^2}}, \quad m^- = \frac{fr}{g^2} - \sqrt{\frac{f^2r^2}{g^4} + \frac{rq}{g^2}}$$

$$\alpha = \frac{s - m^-}{s - m^+}, \quad \beta = \frac{g^2}{r}\left(m^+ - m^-\right)$$

Si noti che

$$\beta = \frac{g^2}{r}\left(m^+ - m^-\right) = 2\sqrt{f^2 + \frac{g^2}{r}q} > 0 \qquad \Rightarrow m^+ = \frac{fr}{g^2} + \sqrt{\frac{f^2r^2}{g^4} + \frac{rq}{g^2}} = \frac{r}{g^2}\left(f + \frac{\beta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow m^- = \frac{fr}{g^2} - \sqrt{\frac{f^2r^2}{g^4} + \frac{rq}{g^2}} = \frac{r}{g^2}\left(f - \frac{\beta}{2}\right)$$

quindi

$$\boxed{m_T(t) = \frac{r}{g^2}\left(f + \frac{\beta}{2} - \beta\frac{1}{1-\alpha e^{\beta(T-t)}}\right)}$$

Di conseguenza (**dinamica del sistema controllato**)

$$\dot{x}(t) = fx(t) + g\,u_T^\star(t) = fx(t) + g\left(-\frac{g}{r}m_T(t)x(t)\right) = fx(t) + g\left(-\frac{1}{g}\left(f + \frac{\beta}{2} - \beta\frac{1}{1-\alpha e^{\beta(T-t)}}\right)x(t)\right)$$
$$= \left(-\frac{\beta}{2} + \beta\frac{1}{1-\alpha e^{\beta(T-t)}}\right)x(t)$$

da cui

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left(-\frac{\beta}{2} + \beta\frac{1}{1-\alpha e^{\beta(T-t)}}\right)x(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx(t)}{x(t)} = \left(-\frac{\beta}{2} + \beta\frac{1}{1-\alpha e^{\beta(T-t)}}\right)dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx(t)}{x(t)} = \int_0^t \left(-\frac{\beta}{2} + \beta\frac{1}{1-\alpha e^{\beta(T-t)}}\right)dt$$

dove

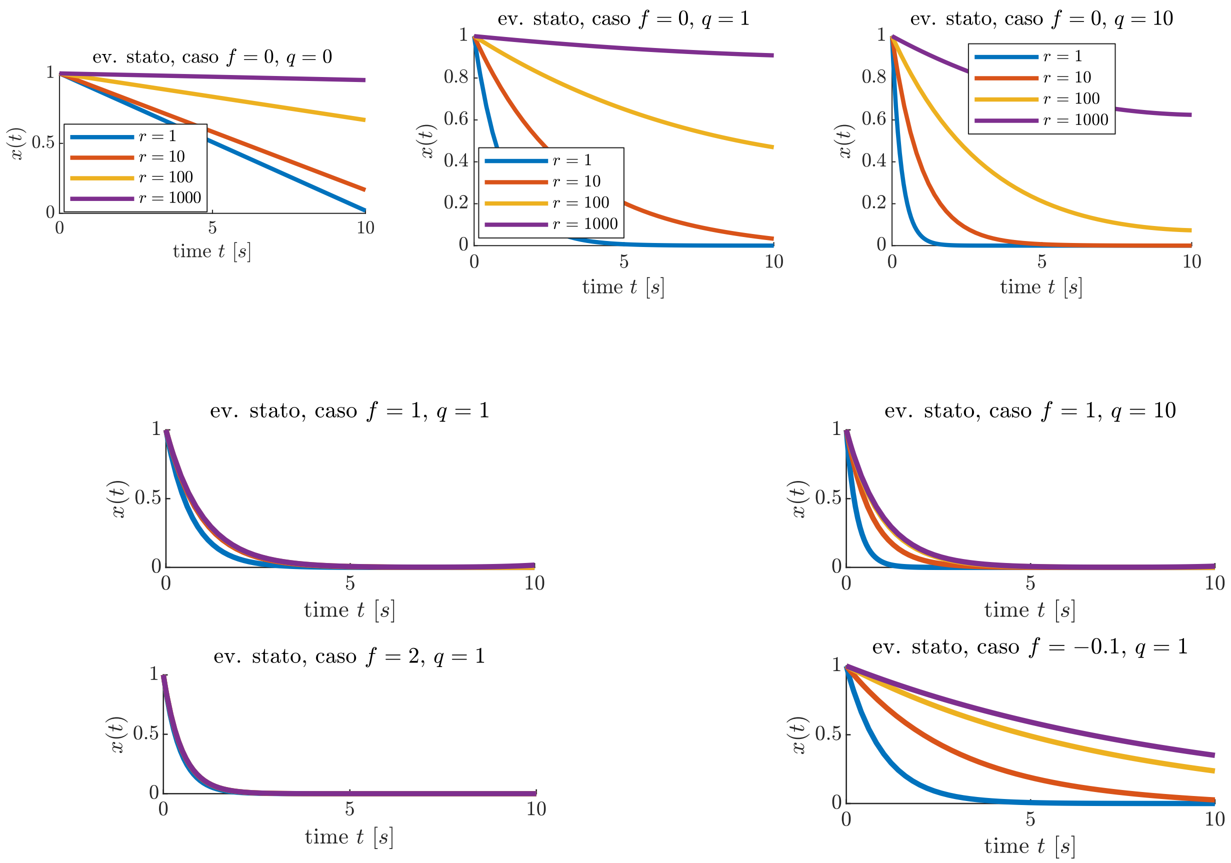
$$-\frac{\beta}{2}+\beta\frac{1}{1-\alpha e^{\beta(T-t)}}=-\frac{\beta}{2}+\beta\,\frac{1+\alpha e^{\beta(T-t)}-\alpha e^{\beta(T-t)}}{1-\alpha e^{\beta(T-t)}}=-\frac{\beta}{2}+\beta+\alpha\beta\frac{e^{\beta(T-t)}}{1-\alpha e^{\beta(T-t)}}=\frac{\beta}{2}+\alpha\beta\frac{e^{\beta(T-t)}}{1-\alpha e^{\beta(T-t)}}$$

perciò

$$\int_{x_0}^{x(t)}\frac{dx(t)}{x(t)}=\int_0^t\left(\frac{\beta}{2}+\alpha\beta\frac{e^{\beta(T-t)}}{1-\alpha e^{\beta(T-t)}}\right)dt \quad\Leftrightarrow\quad \ln x(t)-\ln x_0=\frac{\beta}{2}t+\ln\left(1-\alpha e^{\beta(T-t)}\right)-\ln\left(1-\alpha e^{\beta T}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad \ln\left(\frac{x(t)}{x_0}\,\frac{1-\alpha e^{\beta T}}{1-\alpha e^{\beta(T-t)}}\right)=\frac{\beta}{2}t$$

$$\boxed{x(t)=\left(e^{\frac{\beta}{2}t}\,\frac{1-\alpha e^{\beta(T-t)}}{1-\alpha e^{\beta T}}\right)x_0=h(t)x_0}$$



⊠

7.2.2 soluzione della EDR tramite matrice Hamiltoniana

La determinazione della legge di controllo ottimo dipende dal calcolo della matrice $\mathbf{M}_T(t)$, ovvero dalla risoluzione della EDR:

- per parametri $(\mathbf{F},\mathbf{G})$ tempo-varianti, la risoluzione della EDR è numerica
  - *from backward to forward integration*: $\tau=T-t,\quad \mathbf{S}(\tau)=\mathbf{M}_T(T-\tau)$

* backward integration

$$\begin{cases} -\dot{\mathbf{M}}_T(t) = \mathbf{F}^\top \mathbf{M}_T(t) + \mathbf{M}_T(t)\mathbf{F} - \mathbf{M}_T(t)\mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top \mathbf{M}_T(t) + \mathbf{Q} \\ \mathbf{M}_T(T) = \mathbf{S} \end{cases}$$

* forward integration

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\tau}\mathbf{S}(\tau) = \mathbf{F}(\tau)^\top \mathbf{S}(\tau) + \mathbf{S}(\tau)\mathbf{F}(\tau) - \mathbf{S}(\tau)\mathbf{G}(\tau)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}(\tau)^\top \mathbf{S}(\tau) + \mathbf{Q} \\ \mathbf{S}(0) = \mathbf{S} \end{cases}$$

- integrazione numerica

- per parametri $(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ tempo-invarianti, la risoluzione della EDR è algebrica
  - matrice Hamiltoniana

matrice Hamiltoniana: si definisce *matrice Hamiltoniana* associata al problema di controllo ottimo la matrice

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & -\mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{F}^\top \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$$

Si osserva che

- (definizione) la matrice Hamiltoniana dipende dalle matrici che definiscono la dinamica del sistema e dalle matrici peso presenti nel funzionale costo
- (proprietà spettrali) la matrice Hamiltoniana è tale che
  - $\mathbf{T}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{H}}\mathbf{T} = -\boldsymbol{\mathcal{H}}^\top$ con $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & -\mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \end{bmatrix}$ $\quad\Rightarrow\quad$ se $\lambda \in \Lambda(\boldsymbol{\mathcal{H}})$ allora $-\lambda \in \Lambda(\boldsymbol{\mathcal{H}})$
  - $(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ stabilizzabile e $(\mathbf{F}, \mathbf{Q})$ rivelabile $\quad\Rightarrow\quad$ se $\lambda \in \Lambda(\boldsymbol{\mathcal{H}})$ allora $\lambda \in \mathbb{R}$

Proposizione Dato il sistema (risolubile) retto dalla matrice hamiltoniana $\boldsymbol{\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & -\mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{F}^\top \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Z}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{Z}}_2(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mathcal{H}} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1(t) \\ \mathbf{Z}_2(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1(T) \\ \mathbf{Z}_2(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{S} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_1(t), \mathbf{Z}_2(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

l'unica soluzione sdp $\mathbf{M}_T(t) = \mathbf{M}_T(t)^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ della EDR si può calcolare come

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_T(t) &= \mathbf{Z}_2(t)\mathbf{Z}_1(t)^{-1} \\ &= \left(\mathbf{W}_{21} + \mathbf{W}_{22} e^{\mathbf{D}^+(t-T)}\mathbf{P} e^{\mathbf{D}^+(t-T)}\right)\left(\mathbf{W}_{11} + \mathbf{W}_{12} e^{\mathbf{D}^+(t-T)}\mathbf{P} e^{\mathbf{D}^+(t-T)}\right)^{-1} \end{aligned}$$

con $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12} \\ \mathbf{W}_{21} & \mathbf{W}_{22} \end{bmatrix}$ t.c. $\mathbf{W}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{H}}\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^- & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^+ \end{bmatrix}$, $\begin{array}{l} \mathbf{D}^- = diag(\{\lambda < 0, \lambda \in \Lambda(\boldsymbol{\mathcal{H}})\}) \\ \mathbf{D}^+ = -\mathbf{D}^- \end{array}$

. $\mathbf{P} = -\left(\mathbf{W}_{22} - \mathbf{S}\mathbf{W}_{12}\right)^{-1}\left(\mathbf{W}_{21} - \mathbf{S}\mathbf{W}_{11}\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Dimostrazione. Per prima cosa, si vuole dimostrare che $\mathbf{M}_T(t) = \mathbf{Z}_2(t)\mathbf{Z}_1(t)^{-1}$ soddisfa l'EDR

$$\begin{cases} -\dot{\mathbf{M}}(t) = \mathbf{F}^\top \mathbf{M}(t) + \mathbf{M}(t)\mathbf{F} - \mathbf{M}(t)\mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top \mathbf{M}(t) + \mathbf{Q} \\ \mathbf{M}(T) = \mathbf{S} \end{cases}$$

A tal fine si verifica che

1. $\mathbf{M}_T(T) = \mathbf{Z}_2(T)\mathbf{Z}_1(T)^{-1} = \mathbf{S}$

2. $$\begin{aligned}\dot{\mathbf{M}}_T(t) &= \tfrac{d}{dt}\left(\mathbf{Z}_2(t)\mathbf{Z}_1(t)^{-1}\right) = \left(\tfrac{d}{dt}\mathbf{Z}_2(t)\right)\mathbf{Z}_1(t)^{-1} + \mathbf{Z}_2(t)\left(\tfrac{d}{dt}\mathbf{Z}_1(t)^{-1}\right)\\
&= \dot{\mathbf{Z}}_2(t)\mathbf{Z}_1(t)^{-1} - \mathbf{Z}_2(t)\mathbf{Z}_1(t)^{-1}\dot{\mathbf{Z}}_1(t)\mathbf{Z}_1(t)^{-1}\\
&= \left(-\mathbf{Q}\mathbf{Z}_1(t) - \mathbf{F}^\top\mathbf{Z}_2(t)\right)\mathbf{Z}_1(t)^{-1} - \mathbf{Z}_2(t)\mathbf{Z}_1(t)^{-1}\left(\mathbf{F}\mathbf{Z}_1(t) - \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top\mathbf{Z}_2(t)\right)\mathbf{Z}_1(t)^{-1}\\
&= -\mathbf{Q} - \mathbf{F}^\top\left(\mathbf{Z}_2(t)\mathbf{Z}_1(t)^{-1}\right) - \left(\mathbf{Z}_2(t)\mathbf{Z}_1(t)^{-1}\right)\mathbf{F} + \mathbf{Z}_2(t)\mathbf{Z}_1(t)^{-1}\left(\mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top\right)\mathbf{Z}_2(t)\mathbf{Z}_1(t)^{-1}\\
&= -\mathbf{Q} - \mathbf{F}^\top\mathbf{M}_T(t) - \mathbf{M}_T(t)\mathbf{F} + \mathbf{M}_T(t)\mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_T(t)\end{aligned}$$

Ora, dati $(\mathbf{F},\mathbf{G})$ stabilizzabile e $(\mathbf{F},\mathbf{Q})$ rivelabile, vale che se $\lambda \in \Lambda(\boldsymbol{\mathcal{H}})$ allora $\lambda \in \mathbb{R}$ e $-\lambda \in \Lambda(\boldsymbol{\mathcal{H}})$, perciò

$$\exists \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix}\mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12}\\ \mathbf{W}_{21} & \mathbf{W}_{22}\end{bmatrix} \quad \text{t.c.} \quad \mathbf{W}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{H}}\mathbf{W} = \begin{bmatrix}\mathbf{D}^- & \mathbf{0}_n\\ \mathbf{0}_n & \mathbf{D}^+\end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{aligned}\mathbf{D}^- &= diag(\{\lambda < 0\})\\ \mathbf{D}^+ &= -\mathbf{D}^-\end{aligned}$$

si consideri allora il seguente cambio di variabili

$$\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1(t)\\ \mathbf{Z}_2(t)\end{bmatrix} = \mathbf{W}\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{Z}}_1(t)\\ \bar{\mathbf{Z}}_2(t)\end{bmatrix} \quad \text{tale che} \quad \begin{bmatrix}\dot{\bar{\mathbf{Z}}}_1(t)\\ \dot{\bar{\mathbf{Z}}}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{D}^- & \mathbf{0}_n\\ \mathbf{0}_n & \mathbf{D}^+\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{Z}}_1(t)\\ \bar{\mathbf{Z}}_2(t)\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}\bar{\mathbf{Z}}_1(T)\\ \bar{\mathbf{Z}}_2(T)\end{bmatrix} = \mathbf{W}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_n\\ \mathbf{S}\end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ il nuovo sistema è caratterizzato da

- evoluzione dello stato: $$\begin{aligned}\bar{\mathbf{Z}}_1(t) &= e^{\mathbf{D}^-(t-T)}\bar{\mathbf{Z}}_1(T)\\ \bar{\mathbf{Z}}_2(t) &= e^{\mathbf{D}^+(t-T)}\bar{\mathbf{Z}}_2(T)\end{aligned}$$
- stato all'istante finale: $$\begin{aligned}&\mathbf{W}_{11}\bar{\mathbf{Z}}_1(T) + \mathbf{W}_{12}\bar{\mathbf{Z}}_2(T) = \mathbf{I}_n\\ &\mathbf{W}_{21}\bar{\mathbf{Z}}_1(T) + \mathbf{W}_{22}\bar{\mathbf{Z}}_2(T) = \mathbf{S}\\ &\Rightarrow \quad \bar{\mathbf{Z}}_2(T) = -\left(\mathbf{W}_{22} - \mathbf{S}\mathbf{W}_{12}\right)^{-1}\left(\mathbf{W}_{21} - \mathbf{S}\mathbf{W}_{11}\right)\bar{\mathbf{Z}}_1(T)\end{aligned}$$

allora, introducendo $\mathbf{P} = -\left(\mathbf{W}_{22} - \mathbf{S}\mathbf{W}_{12}\right)^{-1}\left(\mathbf{W}_{21} - \mathbf{S}\mathbf{W}_{11}\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, si verifica che

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_1(t) &= \mathbf{W}_{11}e^{\mathbf{D}^-(t-T)}\bar{\mathbf{Z}}_1(T) + \mathbf{W}_{12}e^{\mathbf{D}^+(t-T)}\mathbf{P}\bar{\mathbf{Z}}_1(T)\\
&= \mathbf{W}_{11}e^{\mathbf{D}^-(t-T)}\bar{\mathbf{Z}}_1(T) + \mathbf{W}_{12}e^{\mathbf{D}^+(t-T)}\mathbf{P}e^{-\mathbf{D}^-(t-T)}e^{\mathbf{D}^-(t-T)}\bar{\mathbf{Z}}_1(T)\\
&= \left(\mathbf{W}_{11} + \mathbf{W}_{12}e^{\mathbf{D}^+(t-T)}\mathbf{P}e^{-\mathbf{D}^-(t-T)}\right)e^{\mathbf{D}^-(t-T)}\bar{\mathbf{Z}}_1(T)\\
&= \left(\mathbf{W}_{11} + \mathbf{W}_{12}e^{\mathbf{D}^+(t-T)}\mathbf{P}e^{\mathbf{D}^+(t-T)}\right)e^{\mathbf{D}^-(t-T)}\bar{\mathbf{Z}}_1(T)\\
\mathbf{Z}_2(t) &= \left(\mathbf{W}_{21} + \mathbf{W}_{22}e^{\mathbf{D}^+(t-T)}\mathbf{P}e^{\mathbf{D}^+(t-T)}\right)e^{\mathbf{D}^-(t-T)}\bar{\mathbf{Z}}_1(T)\end{aligned}$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_T(t) &= \mathbf{Z}_2(t)\mathbf{Z}_1(t)^{-1}\\
&= \left(\mathbf{W}_{21} + \mathbf{W}_{22}e^{\mathbf{D}^+(t-T)}\mathbf{P}e^{\mathbf{D}^+(t-T)}\right)\left(\mathbf{W}_{11} + \mathbf{W}_{12}e^{\mathbf{D}^+(t-T)}\mathbf{P}e^{\mathbf{D}^+(t-T)}\right)^{-1}\end{aligned}$$

□

Poichè

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix}\mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12}\\ \mathbf{W}_{21} & \mathbf{W}_{22}\end{bmatrix} \quad \text{t.c.} \quad \mathbf{W}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{H}}\mathbf{W} = \begin{bmatrix}\mathbf{D}^- & \mathbf{0}_n\\ \mathbf{0}_n & \mathbf{D}^+\end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{aligned}\mathbf{D}^- &= diag(\{\lambda < 0\})\\ \mathbf{D}^+ &= -\mathbf{D}^-\end{aligned}$$

allora

- le colonne di $\begin{bmatrix}\mathbf{W}_{11}\\ \mathbf{W}_{21}\end{bmatrix}$ corrispondono agli autovettori associati agli autovalori in $\mathbf{D}^-$
- le colonne di $\begin{bmatrix}\mathbf{W}_{21}\\ \mathbf{W}_{22}\end{bmatrix}$ corrispondono agli autovettori associati agli autovalori in $\mathbf{D}^+$

esempio: applicazione della proposizione - caso scalare (integratore semplice)

1. modello del sistema: $\dot{x}(t) = u(t) \qquad f = 0,\ g = 1$

   $x(0) = 0$

2. funzionale costo: $J_T(t) = \int_0^T x^2(t) + u^2(t)dt \quad s = 0,\ q = r = 1$

soluzione analitica (applicazione del teorema principale):

$$u_T^\star(t) = -k_T^\star(t)x(t) \qquad \text{con} \qquad k_T^\star(t) = \frac{g}{r}m_T(t), \quad \boxed{m_T(t) = m^+ + \frac{m^- - m^+}{1 - \alpha e^{\beta(T-t)}}}$$

dove $m^+ = \frac{fr}{g^2} + \sqrt{\frac{f^2r^2}{g^4} + \frac{rq}{g^2}} = 0 + \sqrt{0+1} = 1, \quad m^- = \frac{fr}{g^2} - \sqrt{\frac{f^2r^2}{g^4} + \frac{rq}{g^2}} = 0 - \sqrt{0+1} = -1,$

$$\alpha = \frac{s - m^-}{s - m^+} = \frac{0+1}{0-1} = -1, \quad \beta = \frac{g^2}{r}\left(m^+ - m^-\right) = \frac{1}{1}(1 - (-1)) = 2$$

$$\Rightarrow \quad m_T(t) = 1 + \frac{-2}{1 + e^{2(T-t)}} = \frac{1 + e^{2(T-t)} - 2}{1 + e^{2(T-t)}} = \frac{-1 + e^{2(T-t)}}{1 + e^{2(T-t)}}$$

soluzione non analitica (applicazione della proposizione):

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \to \quad \Lambda(\mathcal{H}) = \{\lambda \mid det(\lambda \mathbf{I}_2 - \mathcal{H}) = 0\} = \left\{\lambda \mid det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0\right\}$$
$$= \left\{\lambda \mid \lambda^2 - 1 = 0\right\} = \{-1, +1\} = \{d^-, d^+\}$$

- autovettore associato a -1: $\quad \mathcal{H}\mathbf{x} = -\mathbf{x} \quad \leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} \\ w_{21} \end{bmatrix}$
- autovettore associato a $+1$: $\quad \mathcal{H}\mathbf{x} = +\mathbf{x} \quad \leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +x_1 \\ +x_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{12} \\ w_{22} \end{bmatrix}$

$$\boxed{m_T(t) = z_2(t)z_1(t)^{-1} = \left(w_{21} + w_{22}e^{d^+(t-T)}pe^{d^+(t-T)}\right)\left(w_{11} + w_{12}e^{d^+(t-T)}pe^{d^+(t-T)}\right)^{-1}}$$

con $p = -\left(w_{22} - sw_{12}\right)^{-1}\left(w_{21} - sw_{11}\right) = -(1-0)^{-1}(1-0) = -1$

$$\Rightarrow \quad m_T(t) = \left(1 + 1e^{1(t-T)}(-1)e^{1(t-T)}\right)\left(1 - 1e^{1(t-T)}(-1)e^{1(t-T)}\right)^{-1}$$
$$= \frac{1 - e^{2(t-T)}}{1 + e^{2(t-T)}} = \frac{1 - e^{-2(T-t)}}{1 + e^{-2(T-t)}}\,\frac{e^{2(T-t)}}{e^{2(T-t)}} = \frac{-1 + e^{2(T-t)}}{1 + e^{2(T-t)}}$$

⊠

7.3 Controllo ottimo LQ di sistemi a tempo continuo a orizzonte infinito

1. *modello del sistema da controllare*: sistema lineare a tempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) \qquad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$$
$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \qquad t \in [0, +\infty)$$

2. *funzionale costo da minimizzare/massimizzare*: ottimizzazione su orizzonte finito

$$J_\infty(t) = \int_0^\infty \Big(\mathbf{x}(t)^\top \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^\top \mathbf{R}\mathbf{u}(t) \Big)\, dt$$

$\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrice semi-definita positiva $\quad \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ matrice definita positiva

$\Rightarrow$ problema di controllo ottimo:

$$\boxed{\mathbf{u}_\infty^\star(t) = \arg \min_{t\in[0,+\infty)} J_\infty(\mathbf{u}(t))}$$

corrispondenza tra caso infinito e caso finito con $T \to \infty$

$$\mathbf{u}_\infty^\star(t) = \lim_{T\to+\infty} \mathbf{u}_T^\star(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top \left(\lim_{T\to+\infty} \mathbf{M}_T(t) \right)$$

esistono delle condizioni necessarie e sufficienti per *esistenza & unicità* del limite
in particolare

Pr.1. Se $(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ stabilizzabile, allora

- **a.** $\mathbf{M}_T(t)$, soluzione della EDR con $\mathbf{M}_T(T) = \mathbf{0}$, converge ad un valore limite costante e finito $\mathbf{M}_\infty$ quando $T \to +\infty$.
- **b.** $\mathbf{M}_\infty$ risulta essere *una* soluzione sdp dell'Equazione Algebrica di Riccati:

$$(EAR) \quad \mathbf{F}^\top\mathbf{M} + \mathbf{M}\mathbf{F} - \mathbf{M}\mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top\mathbf{M} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

Pr.2. Sia $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ una matrice tale che $\mathbf{Q} = \mathbf{H}^\top\mathbf{H}$. Se $(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ è stabilizzabile e $(\mathbf{F}, \mathbf{H})$ è rivelabile, allora

- **a.** per ogni scelta della condizione finale $\mathbf{M}_T(T)$ sdp, la soluzione $\mathbf{M}_T(t)$ della EDR converge all'unico valore costante finito $\mathbf{M}_\infty$ quando $T \to \infty$,
- **b.** $\mathbf{M}_\infty$ è l'unica soluzione sdp della EAR; inoltre, se $(\mathbf{F}, \mathbf{H})$ è osservabile allora $\mathbf{M}_\infty$ è dp,

7.3.1 teorema principale

Teorema Per i sistemi a tempo continuo con $(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ *stabilizzabile e* $(\mathbf{F}, \mathbf{H})$ *rivelabile con* $\mathbf{Q} = \mathbf{H}^\top\mathbf{H}$, la legge di controllo ottimo su orizzonte infinito è data da

$$\mathbf{u}_\infty^\star(t) = -\mathbf{K}_\infty^\star \mathbf{x}(t) \qquad \text{con} \qquad \mathbf{K}_\infty^\star = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_\infty$$

dove $\mathbf{M}_\infty = \mathbf{M}_\infty^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è l'unica soluzione sdp dell'Equazione Algebrica di Riccati:

$$(EAR) \quad \mathbf{F}^\top\mathbf{M} + \mathbf{M}\mathbf{F} - \mathbf{M}\mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top\mathbf{M} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

In corrispondenza all'ingresso di controllo $\mathbf{u}_\infty^\star(t)$, il funzionale costo assume il valore (minimo)

$$J_\infty^\star = \mathbf{x}_0^\top \mathbf{M}_\infty \mathbf{x}_0$$

Dimostrazione. Si consideri la matrice $\mathbf{M} = \mathbf{M}^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (*qualsiasi*) e la funzione

$$H(t) = \int_0^T \frac{d}{dt} \Big(\mathbf{x}(t)^\top \mathbf{M}\mathbf{x}(t) \Big)\, dt$$

Applicando la regola fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$\begin{aligned} H(t) = \int_0^T \frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}(t)^\top \mathbf{M}\mathbf{x}(t)\right) dt = &\ \mathbf{x}(t)^\top \mathbf{M}\mathbf{x}(t)\Big|_0^T \\ = &\ \mathbf{x}(T)^\top \mathbf{M}\mathbf{x}(T) - \mathbf{x}(0)^\top \mathbf{M}\mathbf{x}(0) \end{aligned}$$

Applicando le regole del calcolo differenziale e sfruttando le equazioni della dinamica del sistema si ottiene

$$\begin{aligned} H(t) &= \int_0^T \frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}(t)^\top \mathbf{M}\mathbf{x}(t)\right) dt \\ &= \int_0^T \left(\dot{\mathbf{x}}(t)^\top \mathbf{M}\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t)^\top \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}(t)\right) dt \\ &= \int_0^\top \left((\mathbf{F}\mathbf{x}(t)+\mathbf{G}\mathbf{u}(t))^\top \mathbf{M}\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t)^\top \mathbf{M}\left(\mathbf{F}\mathbf{x}(t)+\mathbf{G}\mathbf{u}(t)\right)\right) dt \\ &= \int_0^\top \begin{bmatrix}\mathbf{u}(t)^\top & \mathbf{x}(t)^\top\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \mathbf{G}^\top\mathbf{M} \\ \mathbf{M}\mathbf{G} & \mathbf{F}^\top\mathbf{M}+\mathbf{M}\mathbf{F}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(t)\end{bmatrix} dt \end{aligned}$$

Nota l'equivalenza

$$\mathbf{x}(T)^\top \mathbf{M}\mathbf{x}(T) - \mathbf{x}(0)^\top \mathbf{M}\mathbf{x}(0) = \int_0^\top \begin{bmatrix}\mathbf{u}(t)^\top & \mathbf{x}(t)^\top\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \mathbf{G}^\top\mathbf{M} \\ \mathbf{M}\mathbf{G} & \mathbf{F}^\top\mathbf{M}+\mathbf{M}\mathbf{F}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(t)\end{bmatrix} dt$$

si consideri la funzione

$$H'(t) = \mathbf{x}(0)^\top \mathbf{M}\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(T)^\top \mathbf{M}\mathbf{x}(T) + \int_0^\top \begin{bmatrix}\mathbf{u}(t)^\top & \mathbf{x}(t)^\top\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \mathbf{G}^\top\mathbf{M}(t) \\ \mathbf{M}(t)\mathbf{G} & \mathbf{F}^\top\mathbf{M}+\mathbf{M}\mathbf{F}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(t)\end{bmatrix} dt = 0$$

Si riscrive il funzionale costo $J_T(t) = \int_0^T \begin{bmatrix}\mathbf{u}(t)^\top & \mathbf{x}(t)^\top\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{R} & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(t)\end{bmatrix} dt$ (funzionale costo a orizzonte finito con $\mathbf{S} = \mathbf{0}$) come segue

$$\begin{aligned} J_T(t) &= J_T(t) + H'(t) \\ &= \mathbf{x}(0)^\top \mathbf{M}\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(T)^\top \mathbf{M}\mathbf{x}(T) + \int_0^T \begin{bmatrix}\mathbf{u}(t)^\top & \mathbf{x}(t)^\top\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{R} & \mathbf{G}^\top\mathbf{M} \\ \mathbf{M}\mathbf{G} & \mathbf{Q}+\mathbf{F}^\top\mathbf{M}+\mathbf{M}\mathbf{F}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(t)\end{bmatrix} dt \end{aligned}$$

Si consideri ora la matrice $\mathbf{M} = \mathbf{M}_\infty = \mathbf{M}_\infty^\top \in \mathbf{R}^{n\times n}$ *soluzione della EAR*, segue che

$$\begin{aligned} J_T(t) &= \mathbf{x}(0)^\top \mathbf{M}_\infty\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(T)^\top \mathbf{M}_\infty\mathbf{x}(T) + \int_0^T \begin{bmatrix}\mathbf{u}(t)^\top & \mathbf{x}(t)^\top\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{R} & \mathbf{G}^\top\mathbf{M}_\infty \\ \mathbf{M}_\infty\mathbf{G} & \mathbf{Q}+\mathbf{F}^\top\mathbf{M}_\infty+\mathbf{M}_\infty\mathbf{F}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(t)\end{bmatrix} dt \\ &= \mathbf{x}(0)^\top \mathbf{M}_\infty\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(T)^\top \mathbf{M}_\infty\mathbf{x}(T) + \int_0^T \begin{bmatrix}\mathbf{u}(t)^\top & \mathbf{x}(t)^\top\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{R} & \mathbf{G}^\top\mathbf{M}_\infty \\ \mathbf{M}_\infty\mathbf{G} & -\mathbf{M}_\infty\mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{M}_\infty\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(t)\end{bmatrix} dt \end{aligned}$$

Si consideri l'ingresso ausiliario $\mathbf{v}(t) = \mathbf{R}\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}^\top\mathbf{M}_\infty\mathbf{x}(t)$ allora

$$J_T(t) = \mathbf{x}(0)^\top \mathbf{M}_\infty\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(T)^\top \mathbf{M}_\infty\mathbf{x}(T) + \int_0^T \mathbf{v}(t)^\top \mathbf{R}^{-1}\mathbf{v}(t) dt$$

e posto

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^\star(t) = -\left(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_\infty\right)\mathbf{x}(t)$$

si verifica che

$$J_T(\mathbf{u}^\star(t)) = \mathbf{x}(0)^\top \mathbf{M}_\infty\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(T)^\top \mathbf{M}_\infty\mathbf{x}(T)$$

È noto che

- nel caso a orizzonte finito $J_T^\star = \min_{t\in[0,T]} J_T(t) = J_T(\mathbf{u}_T^\star) = \mathbf{x}(0)^\top\mathbf{M}(0)\mathbf{x}(0)$
  per cui $\mathbf{x}(0)^\top\mathbf{M}_T(0)\mathbf{x}(0) = J_T(\mathbf{u}_T^\star(t)) \leq J_T(\mathbf{u}^\star(t))$
- $\mathbf{M}_\infty$ è una matrice semi-definita positiva
  per cui $J_T(\mathbf{u}^\star(t)) \leq \mathbf{x}(0)^\top\mathbf{M}_\infty\mathbf{x}(0)$

Per il teorema del confronto e le Pr.1-2, si ha che

$$\lim_{T\to\infty}\left(\mathbf{x}(0)^\top\mathbf{M}_T(0)\mathbf{x}(0)\right) \leq \lim_{T\to\infty}\left(J_T(\mathbf{u}^\star(t))\right) \leq \lim_{T\to\infty}\left(\mathbf{x}(0)^\top\mathbf{M}_\infty\mathbf{x}(0)\right) \quad \Rightarrow$$
$$\mathbf{x}(0)^\top\mathbf{M}_\infty\mathbf{x}(0) \leq J_\infty(\mathbf{u}^\star(t)) \leq \mathbf{x}(0)^\top\mathbf{M}_\infty\mathbf{x}(0) \quad \Rightarrow$$
$$J_\infty(\mathbf{u}^\star(t)) = \mathbf{x}(0)^\top\mathbf{M}_\infty\mathbf{x}(0) = \min_{t\in[0,+\infty)} J_\infty(t) = J_\infty^\star$$

Si conclude dimostrando che $\mathbf{u}^\star(t) = \mathbf{u}_\infty^\star(t) = \arg\min_{t\in[0,+\infty)} J_\infty(t)$.

Ab absurdo $\exists\, \mathbf{u}'(t) \neq \mathbf{u}_\infty^\star(t)$ tale che $J_\infty\left(\mathbf{u}'(t)\right) < J_\infty\left(\mathbf{u}_\infty^\star(t)\right),\ t\in[0,+\infty)$
allora, poichè $\mathbf{u}_\infty^\star(t) = -\left(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_\infty\right)\mathbf{x}(t) = \lim\limits_{T\to+\infty} -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_T(t)\mathbf{x}(t)$ (Pr. 1-2),

$$\lim_{T\to+\infty} J_T\left(\mathbf{u}'(t)\right) < \lim_{T\to+\infty} J_T\left(-\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_T(t)\mathbf{x}(t)\right)$$

per il teorema della permanenza del segno, segue che

$$\exists T' \quad \text{tale che} \quad J_T\left(\mathbf{u}'(t)\right) < J_T\left(-\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_T(t)\mathbf{x}(t)\right) = x_0^\top\mathbf{M}_T(0)x_0 \quad \forall t \geq T'$$

ovvero $J_T\left(\mathbf{u}'(t)\right) < x_0^\top\mathbf{M}_T(0)x_0$: questo assurdamente implica che $J_T\left(\mathbf{u}'(t)\right) < J_T^\star$.

□

1. sia $\mathbf{Q}$ matrice semi-definita positiva,
allora esiste $\mathbf{T}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile tale che $\mathbf{Q} = \mathbf{TDT}^{-1}$, $\mathbf{D} = diag(\lambda\in\Lambda(\mathbf{Q}))$
$\Rightarrow \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}$ dove $\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{TD}^{\frac{1}{2}}\mathbf{T}^{-1}$ simmetrica & semi-definita positiva

2. se $(\mathbf{F},\mathbf{Q})$ non rivelabile,
allora esiste $\lambda\in\Lambda(\mathbf{F})$, $\Re(\lambda)\leq 0$ tale che $\mathbf{Fv} = \lambda\mathbf{v}$ & $\mathbf{Qv} = 0$ con $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$

3. sia $\mathbf{Q} = \mathbf{H}^\top\mathbf{H}$ con $\mathbf{H}\in\mathbb{R}^{p\times n}$,
allora $(\mathbf{F},\mathbf{Q})$ rivelabile $\Leftrightarrow$ $(\mathbf{F},\mathbf{H})$ rivelabile

$$\mathbf{Qv}=\mathbf{0} \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}\mathbf{v}=\mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{v}^*\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}\mathbf{v}=\mathbf{0} \Leftrightarrow \|\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}\mathbf{v}\|^2=0 \Leftrightarrow \mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}\mathbf{v}=\mathbf{0}$$
$$\Leftrightarrow\quad \mathbf{H}^\top\mathbf{Hv}=\mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{v}^*\mathbf{H}^\top\mathbf{Hv}=\mathbf{0} \Leftrightarrow \|\mathbf{Hv}\|^2=0 \Leftrightarrow \mathbf{Hv}=\mathbf{0}$$

esempio: derivazione della soluzione tramite applicazione del teorema principale - caso scalare

1. modello del sistema: sistema lineare scalare

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= fx(t)+gu(t)\\ x(0) &= x_0\\ u(t) &= -kx(t)\end{aligned} \qquad g\neq 0, \quad \begin{cases} f<0 & \text{asint. stabile}\\ f=0 & \text{sempl. stabile}\\ f>0 & \text{instabile}\end{cases}$$

2. funzionale costo: $J_\infty(t) = \int_0^\infty qx^2(t)+ru^2(t)dt \qquad q\geq 0,\ r>0$

applicazione del teorema principale:

$$u^\star_\infty(t) = -k^\star_\infty x(t) \quad \text{con} \quad k^\star_\infty = \frac{g}{r} m_\infty \quad \text{dove} \quad m_\infty \in \mathbb{R} \text{ soddisfa } 2fm - \frac{g^2}{r}m^2 + q = 0$$

è possibile calcolare la soluzione della EAR in forma chiusa:

$$\frac{g^2}{r}m^2 - 2fm - q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m^+ = \dfrac{fr}{g^2} + \sqrt{\dfrac{f^2r^2}{g^4} + \dfrac{rq}{g^2}} \\ m^- = \dfrac{fr}{g^2} - \sqrt{\dfrac{f^2r^2}{g^4} + \dfrac{rq}{g^2}} \end{cases}$$

si distinguono diversi casi:

- **caso 1**: $f < 0$, $q \geq 0$ (sistema asintoticamente stabile)
  $\triangleright$ (f, g) stabilizzabile e $(f, \sqrt{q})$ rivelabile

  $$\Rightarrow \quad \text{unica soluzione} \quad \boxed{m_\infty = m^+ = \frac{fr}{g^2} + \sqrt{\frac{f^2r^2}{g^4} + \frac{rq}{g^2}} \geq 0}$$

  (si verifica che $m_\infty = \lim_{T\to+\infty} m_T(t)$)

- **caso 2**: $f \geq 0$, $q > 0$ (sistema instabile)
  $\triangleright$ (f, g) stabilizzabile e $(f, \sqrt{q})$ rivelabile

  $$\Rightarrow \quad \text{unica soluzione} \quad \boxed{m_\infty = m^+ = \frac{fr}{g^2} + \sqrt{\frac{f^2r^2}{g^4} + \frac{rq}{g^2}} > 0}$$

  $$k^\star_\infty = \frac{g}{r} m_\infty = \frac{f}{g} + \frac{g}{|g|}\sqrt{\frac{f^2}{g^2} + \frac{q}{r}}$$

  (si verifica che $m_\infty = \lim_{T\to+\infty} m_T(t)$)

- **caso 3**: $f \geq 0$, $q = 0$ (sistema instabile)
  $\triangleright$ (f, g) stabilizzabile e $(f, \sqrt{q})$ non rivelabile
  $\Rightarrow$ più soluzioni m_∞

Di conseguenza nei casi 1 e 2 (**dinamica del sistema controllato**)

$$\dot{x}(t) = fx(t) + g\,u^\star_\infty(t) = fx(t) - g\left(\frac{f}{g} + \frac{g}{|g|}\sqrt{\frac{f^2}{g^2} + \frac{q}{r}}\right)x(t) = \left(-|g|\sqrt{\frac{f^2}{g^2} + \frac{q}{r}}\right)x(t) = ax(t)$$

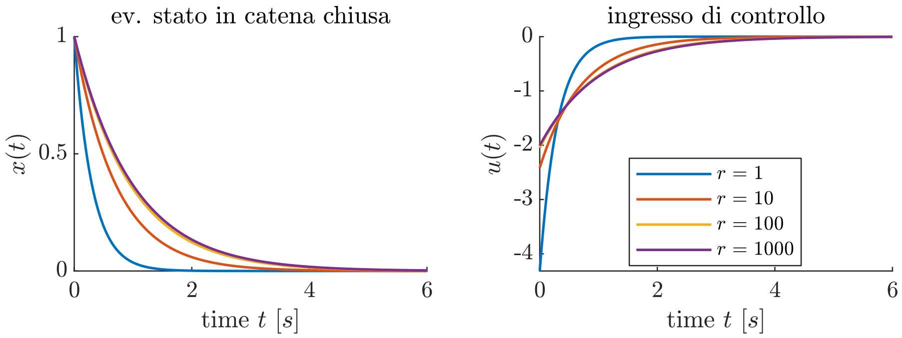
$$x(t) = e^{at}x_0$$

Si osserva che

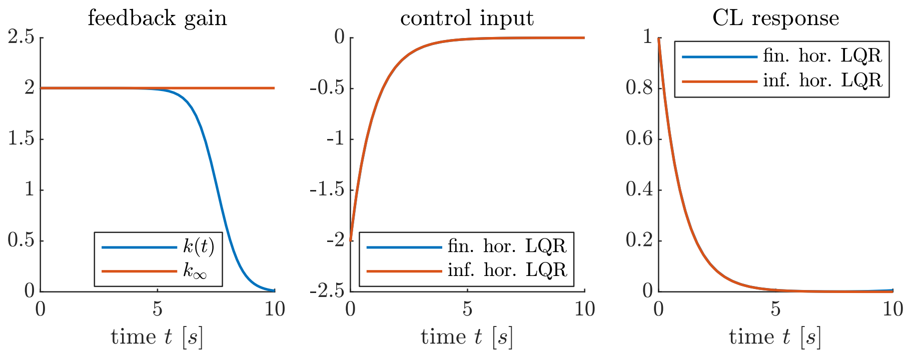
- $r \to 0$, $q/r \gg 1$: *cheap control*
  caso limite $q/r \to +\infty$
  autovalore del sistema retroazionato $\quad \lambda = -|g|\sqrt{\frac{f^2}{g^2} + \frac{q}{r}} \to -\infty$

- $r \to +\infty, \quad q/r \ll 1$: *expensive control*
  caso limite $q/r \to 0$
  autovalore del sistema retroazionato $\quad \lambda = -|g|\sqrt{\frac{f^2}{g^2} + \frac{q}{r}} \to -|f|$

$$(f = 1,\ g = 1,\ q = 10,\ x(0) = 1)$$



$$(f = 1,\ g = 1, q = 10,\ r = 1000,\ x_0 = 1)$$



$\boxtimes$

7.3.2 proprietà stabilizzanti della legge di controllo

Proposizione Sia $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ una matrice tale che $\mathbf{Q} = \mathbf{H}^\top \mathbf{H}$. Se $(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ è stabilizzabile e $(\mathbf{F}, \mathbf{H})$ è rivelabile, allora la legge di controllo $\mathbf{u}^\star_\infty(t) = -\mathbf{K}^\star_\infty \mathbf{x}(t)$ con $\mathbf{K}^\star_\infty = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top \mathbf{M}_\infty$ minimizza il funzionale costo $J_\infty(\mathbf{u}(t))$ del problema di controllo ottimo su orizzonte infinito, rendendo il sistema in catena chiusa asintoticamente stabile, cioè $\mathbf{u}^\star_\infty(t)$ è stabilizzante.

Dimostrazione. Ad absurdo, sia $\mathbf{A} = \mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K}^\star_\infty$, $\exists \lambda \in \Lambda(\mathbf{A})$, $\Re(\lambda) \geq 0$ tale che $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ con $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$

Dato $\mathbf{A} = \mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K}^\star_\infty$ con $\mathbf{K}^\star_\infty = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top \mathbf{M}_\infty$, allora $\mathbf{F} = \mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_\infty$. Perciò

$$\begin{aligned}
&\mathbf{F}^\top \mathbf{M}_\infty + \mathbf{M}_\infty \mathbf{F} - \mathbf{M}_\infty \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top \mathbf{M}_\infty + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \qquad \text{(EAR)}\\
&(\mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_\infty)^\top \mathbf{M}_\infty + \mathbf{M}_\infty(\mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_\infty) - \mathbf{M}_\infty \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top \mathbf{M}_\infty + \mathbf{Q} = \mathbf{0}\\
&\mathbf{A}^\top \mathbf{M}_\infty + \mathbf{M}_\infty \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top \mathbf{M}_\infty + \mathbf{M}_\infty \mathbf{A} + \mathbf{M}_\infty \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top \mathbf{M}_\infty - \mathbf{M}_\infty \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top \mathbf{M}_\infty + \mathbf{Q} = \mathbf{0}\\
&\mathbf{A}^\top \mathbf{M}_\infty + \mathbf{M}_\infty \mathbf{A} + \mathbf{M}_\infty \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top \mathbf{M}_\infty + \mathbf{Q} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Si moltiplichi a destra per $\mathbf{v}$ e a sinistra per $\mathbf{v}^*$, ovvero per il complesso coniugato di $\mathbf{v}$ tale che $\mathbf{v}^*\mathbf{A}^\top = \lambda^*\mathbf{v}^*$, dove λ^* è il complesso coniugato di λ e $\mathbf{A}^\top$ coincide con il complesso coniugato di essendo $\mathbf{A}$ una matrice reale. Si ottiene

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v}^*\mathbf{A}^\top\mathbf{M}_\infty\mathbf{v} + \mathbf{v}^*\mathbf{M}_\infty\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{v}^*\mathbf{M}_\infty\mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_\infty\mathbf{v} + \mathbf{v}^*\mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{0}\\
&\lambda^*\mathbf{v}^*\mathbf{M}_\infty\mathbf{v} + \mathbf{v}^*\mathbf{M}_\infty\lambda\mathbf{v} + \mathbf{v}^*\mathbf{M}_\infty\mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_\infty\mathbf{v} + \mathbf{v}^*\mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{0}\\
&2\Re(\lambda)\mathbf{v}^*\mathbf{M}_\infty\mathbf{v} + \mathbf{v}^*\mathbf{M}_\infty\mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_\infty\mathbf{v} + \mathbf{v}^*\mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{0}\\
&\underbrace{2\Re(\lambda)\mathbf{v}^*\mathbf{M}_\infty\mathbf{v}}_{\geq 0} = -\underbrace{\mathbf{v}^*\mathbf{M}_\infty\mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_\infty\mathbf{v}}_{\geq 0} - \underbrace{\mathbf{v}^*\mathbf{Q}\mathbf{v}}_{\geq 0}
\end{aligned}$$

Poichè il termine a sx dell'uguale può essere positivo o nullo e il termine a dx dell'uguale può essere negativo o nullo, l'uguaglianza è verificata solo se

$$\begin{cases}\mathbf{v}^*\mathbf{M}_\infty\mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_\infty\mathbf{v} = \mathbf{0}\\ \mathbf{v}^*\mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{0}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(\mathbf{v}^*\mathbf{M}_\infty\mathbf{G})\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_\infty\mathbf{v}) = \mathbf{0}\\ (\mathbf{v}^*\mathbf{H}^\top)(\mathbf{H}\mathbf{v}) = \mathbf{0}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_\infty\mathbf{v} = \mathbf{0}\\ \mathbf{H}\mathbf{v} = \mathbf{0}\end{cases}$$

Pertanto, si ha che

$$\lambda\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v} = (\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K}_\infty^\star)\mathbf{v} = (\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_\infty)\mathbf{v} = \mathbf{F}\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \lambda \in \Lambda(F)$$

di conseguenza, in base al test PBH eseguito in corrispondenza a λ, si ha che

$$\begin{bmatrix}\mathbf{F} - \lambda\mathbf{I}\\ \mathbf{H}\end{bmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \leftrightarrow \quad \text{la matrice non ha rango rieno in corrispondenza a } \lambda \in \Lambda(F),\ \Re(\lambda) \geq 0$$

ma questa conclusione è assurda in quanto $(\mathbf{F}, \mathbf{H})$ è rivelabile per ipotesi.

□

7.3.3 soluzione della EAR tramite matrice Hamiltoniana

Come nel caso a orizzonte finito, si definisce *matrice Hamiltoniana* associata al problema di controllo ottimo la matrice

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \begin{bmatrix}\mathbf{F} & -\mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top\\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{F}^\top\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$$

e valgono le seguenti proprietà

- $\mathbf{T}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{H}}\mathbf{T} = -\boldsymbol{\mathcal{H}}^\top$ con $\mathbf{T} = \begin{bmatrix}\mathbf{0}_n & -\mathbf{I}_n\\ \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n\end{bmatrix}$ $\quad\Rightarrow\quad$ se $\lambda \in \Lambda(\boldsymbol{\mathcal{H}})$ allora $-\lambda \in \Lambda(\boldsymbol{\mathcal{H}})$
- $(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ stabilizzabile e $(\mathbf{F}, \mathbf{Q})$ rivelabile $\quad\Rightarrow\quad$ se $\lambda \in \Lambda(\boldsymbol{\mathcal{H}})$ allora $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \exists \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix}\mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12}\\ \mathbf{W}_{21} & \mathbf{W}_{22}\end{bmatrix} \ \text{ t.c. } \ \mathbf{W}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{H}}\mathbf{W} = \begin{bmatrix}\mathbf{D}^- & \mathbf{0}_n\\ \mathbf{0}_n & \mathbf{D}^+\end{bmatrix} \ \text{ con } \ \begin{aligned}\mathbf{D}^- &= diag(\{\lambda < 0\})\\ \mathbf{D}^+ &= -\mathbf{D}^-\end{aligned}$$

Lemma Siano $\mathbf{M}_\infty$ soluzione della EAR, $\mathbf{K}_\infty^\star = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_\infty$ il corrispondente guadagno (ottimo) di retroazione e $\mathbf{A} = (\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K}_\infty^\star)$ la matrice di transizione dello stato del corrispondente sistema retroazionato. Gli autovalori della matrice Hamiltoniana $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ sono l'unione degli autovalori di $\mathbf{A}$ e di $-\mathbf{A}$, ovvero

$$\Lambda(\boldsymbol{\mathcal{H}}) = \Lambda(\mathbf{A}) \cup \Lambda(-\mathbf{A})$$

Dimostrazione. Si consideri la matrice di trasformazione di base $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_\infty & \mathbf{I} \end{bmatrix}$ dipendente da $\mathbf{M}_\infty$.

Si ha che

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{H}}\mathbf{T} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}_\infty & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F} & -\mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{F}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_\infty & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & -\mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top \\ -\mathbf{M}_\infty\mathbf{F} - \mathbf{Q} & \mathbf{M}_\infty\mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top - \mathbf{F}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_\infty & \mathbf{I} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_\infty & -\mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top \\ -\mathbf{M}_\infty\mathbf{F} - \mathbf{Q} + \mathbf{M}_\infty\mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_\infty - \mathbf{F}^\top\mathbf{M}_\infty & \mathbf{M}_\infty\mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top - \mathbf{F}^\top \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K}_\infty^\star & -\mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top \\ \mathbf{0} & -(\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K}_\infty^\star)^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top \\ \mathbf{0} & -\mathbf{A}^\top \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Di coseguenza, si osserva che

- $\Lambda(\boldsymbol{\mathcal{H}}) = \Lambda(\mathbf{T}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{H}}\mathbf{T})$
- $\Lambda(\mathbf{T}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{H}}\mathbf{T}) = \Lambda(\mathbf{A}) \cup \Lambda(-\mathbf{A})$

per tanto, si conclude che $\Lambda(\boldsymbol{\mathcal{H}}) = \Lambda(\mathbf{A}) \cup \Lambda(-\mathbf{A})$.

□

Corollario Sia $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ una matrice tale che $\mathbf{Q} = \mathbf{H}^\top\mathbf{H}$. Siano $(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ stabilizzabile e $(\mathbf{F}, \mathbf{H})$ rivelabile. Siano $\mathbf{M}_\infty$ soluzione della EAR, $\mathbf{K}_\infty^\star = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_\infty$ il corrispondente guadagno (ottimo) di retroazione e $\mathbf{A} = (\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K}_\infty^\star)$ la matrice di transizione dello stato del corrispondente sistema retroazionato. Gli autovalori della matrice $\mathbf{A}$ corrispondono agli autovalori stabili della matrice Hamiltoniana $\boldsymbol{\mathcal{H}}$

$$\Lambda(\mathbf{A}) = \Lambda(\mathbf{D}^-)$$

Proposizione Siano $(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ stabilizzabile e $(\mathbf{F}, \mathbf{Q})$ rivelabile con $\mathbf{Q} = \mathbf{H}^\top\mathbf{H}$.
Sia $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times n}$ una matrice le cui colonne costituiscono un insieme di autovettori generalizzati associati agli n autovalori stabili di $\boldsymbol{\mathcal{H}}$.
Allora $\mathbf{X}_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è invertibile e l'unica $\mathbf{M}_\infty$ sdp soluzione della EAR è esprimibile come

$$\mathbf{M}_\infty = \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1^{-1}$$

$\mathbf{v}$ è un *autovettore generalizzato* di $\mathbf{A}$ associato all'autovalore λ se $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^m\mathbf{v} = \mathbf{0}$ per qualche $m \in \mathbb{N}$
Il fatto che $\mathbf{X}$ sia una matrice le cui colonne costituiscono un insieme di autovettori generalizzati associati agli n autovalori stabili di $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ implica che si possono determinare due matrici $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in modo che $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{X}_2 & \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix}$ è una matrice di cambio di base che porta $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ in forma di Jordan $\boldsymbol{\mathcal{H}}_J = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{H}}_J^- & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\mathcal{H}}_J^+ \end{bmatrix}$ dove il blocco $\boldsymbol{\mathcal{H}}_J^-$ $(\boldsymbol{\mathcal{H}}_J^+)$ è formato da blocchi di Jordan relativi agli autovalori stabili (instabili) di $\boldsymbol{\mathcal{H}}$.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice di cambio base che porta $\mathbf{A} = (\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K}_\infty^\star)$ in forma di Jordan. Sia $\mathbf{A}_J = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K}_\infty^\star)\mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_\infty)\mathbf{T}$ la matrice di transizione dello stato del sistema retroazionato (asintoticamente stabile) in forma di Jordan.

Allora, definita $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{M}_\infty \mathbf{T} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times n}$, si ha che

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{H}}\mathbf{Z} = \boldsymbol{\mathcal{H}}\begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{M}_\infty \mathbf{T} \end{bmatrix} &= \boldsymbol{\mathcal{H}}\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{M}_\infty \end{bmatrix}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & -\mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{F}^\top \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{M}_\infty \end{bmatrix}\mathbf{T} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top \mathbf{M}_\infty \\ -\mathbf{Q} - \mathbf{F}^\top \mathbf{M}_\infty \end{bmatrix}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top \mathbf{M}_\infty \\ \mathbf{M}_\infty \mathbf{F} - \mathbf{M}_\infty \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{G}^\top \mathbf{M}_\infty \end{bmatrix}\mathbf{T} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K}^\star_\infty \\ \mathbf{M}_\infty \mathbf{F} - \mathbf{M}_\infty \mathbf{G}\mathbf{K}^\star_\infty \end{bmatrix}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K}^\star_\infty \\ \mathbf{M}_\infty (\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K}^\star_\infty) \end{bmatrix}\mathbf{T} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{M}_\infty \end{bmatrix}(\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K}^\star_\infty)\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{M}_\infty \end{bmatrix}\mathbf{T}\mathbf{A}_J \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{M}_\infty \mathbf{T} \end{bmatrix}\mathbf{A}_J = \mathbf{Z}\mathbf{A}_J
\end{aligned}$$

Poichè risulta $\boldsymbol{\mathcal{H}}\mathbf{Z} = \mathbf{Z}\mathbf{A}_J$ con $\Lambda(\mathbf{A}_J) \subset \Lambda(\boldsymbol{\mathcal{H}})$ allora le colonne di $\mathbf{Z}$ costituiscono la base di un sottospazio $\boldsymbol{\mathcal{H}}$-invariante e n-dimensionale di $\mathbb{R}^{2n}$. Anche gli autovettori associati agli n autovalori stabili di $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ costituiscono la base di un sottospazio $\boldsymbol{\mathcal{H}}$-invariante e n-dimensionale di $\mathbb{R}^{2n}$. Da cui si conclude che esiste una matrice di trasformazione di base $\mathbf{T}' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $\mathbf{X} = \mathbf{Z}\mathbf{T}' \in \mathbb{R}^{2n \times n}$ risulta essere la matrice le cui colonne corrispondono agli autovettori *generalizzati* associati agli n autovalori stabili di $\boldsymbol{\mathcal{H}}$. In particolare, si ha che

$$\mathbf{X} = \mathbf{Z}\mathbf{T}' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{M}_\infty \mathbf{T} \end{bmatrix}\mathbf{T}' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{X}_1 = \mathbf{T}\mathbf{T}' \\ \mathbf{X}_2 = \mathbf{M}_\infty \mathbf{T}\mathbf{T}' \end{cases}$$

Ora, poichè $\mathbf{T}$ e $\mathbf{T}'$ sono invertibili per definizione, anche $\mathbf{X}_1$ è invertibile e risulta

$$\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1^{-1} = \mathbf{M}_\infty \mathbf{T}\mathbf{T}'(\mathbf{T}\mathbf{T}')^{-1} = \mathbf{M}_\infty$$

$\square$

esempio: applicazione della proposizione - caso scalare (integratore semplice)

1. modello del sistema: $\dot{x}(t) = u(t)$ $\qquad f = 0,\ g = 1$
   $x(0) = 0$
2. funzionale costo: $J_\infty(t) = \int_0^\infty x^2(t) + u^2(t)dt \quad q = r = 1$

soluzione analitica (applicazione del teorema principale):
dato che (f, g) rivelabile $(g \neq 0)$ e (f, q) stabilizzabile $(q \neq 0)$
allora $u^\star_\infty(t) = -k^\star_\infty x(t)$ con $k^\star_\infty = \frac{g}{r} m_\infty$, dove

$$\boxed{m_\infty = m^+ = \frac{fr}{g^2} + \sqrt{\frac{f^2r^2}{g^4} + \frac{rq}{g^2}} = 1}$$

soluzione non analitica (applicazione della proposizione):

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \Lambda(\boldsymbol{\mathcal{H}}) = \{-1, +1\} = \{d^-, d^+\}$$

- autovettore associato a -1: $\quad \boldsymbol{\mathcal{H}}\mathbf{x} = -\mathbf{x} \quad \leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$\boxed{m_\infty = x_2(t)x_1(t)^{-1} = 1}$$

⊠

7.4 Controllo ottimo LQ di sistemi a tempo discreto

1. modello di sistema da controllare:
   sistema lineare a tempo discreto il cui stato è accessibile (misurabile o stimabile)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) \qquad & \mathbf{x}(t) &\in \mathbb{R}^n \text{ accessibile} \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 & \mathbf{u}(t) &\in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

2. funzionale costo da minimizzare/massimizzare:
   $\rightarrow$ si possono distinguere due casi:

- **ottimizzazione quadratica su orizzonte finito**

  si considera un intervallo di tempo finito $t \in [t_0, t_f] \rightsquigarrow t \in [0, T]$,

  su cui è definito il funzionale costo

$$J_T(t) = \mathbf{x}(T)^\top \mathbf{S}\mathbf{x}(T) + \sum_{t=0}^{T-1} \Big(\mathbf{x}(t)^\top \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^\top \mathbf{R}\mathbf{u}(t) \Big)$$

  con $\mathbf{S}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrici semi-definite positive e $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ matrice definita positiva

  $\Rightarrow$ problema di controllo ottimo:

$$\boxed{\mathbf{u}_T^\star(t) = \arg \min_{t\in[0,T-1]} J_T(\mathbf{u}(t))}$$

> Quando si considerano i sistemi a tempo discreto ($t \in \mathbb{N}$) rispetto a quelli a tempo continuo ($t \in \mathbb{R}$), nel funzionale costo a orizzonte finito l'integrale è sostituito dalla sommatoria ma fino a $T-1$.

- **ottimizzazione quadratica su orizzonte finito**

  si considera un intervallo di tempo infinito $t \in [0, +\infty)$,

  su cui è definito il funzionale costo

$$J_\infty(t) = \sum_{t=0}^{\infty} \Big(\mathbf{x}(t)^\top \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^\top \mathbf{R}\mathbf{u}(t) \Big)$$

  con $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrice semi-definita positiva e $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ matrice definita positiva.

  $\Rightarrow$ problema di controllo ottimo:

$$\boxed{\mathbf{u}_\infty(t)^\star = \arg \min_{t\in[0,+\infty)} J_\infty(\mathbf{u}(t))}$$

esempio: derivazione della soluzione (a orizzonte infinito) tramite calcolo diretto - caso scalare

1. modello del sistema: sistema lineare scalare con retroazione statica

$$x(t+1) = x(t) + u(t) \qquad f = 1$$
$$x(0) = x_0 \neq 0$$
$$u(t) = -kx(t)$$

2. funzionale costo: $J_\infty(t) = \sum_{t=0}^{+\infty} x^2(t) + ru^2(t)dt \qquad q = 1 > 0, r > 0$

▶ come si risolve il problema di *regolazione dello stato* (determinare $u(t)$ tale per cui $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$)?

si osseva che

- $k = 1$
  $x(1) = x(0) - x(0) = 0$ soluzione a orizzonte finito minimo (controllo dead beat)
- $0 < k < 2$
  $x(t+1) = (1-k)x(t) \quad \leadsto \quad X(z) = \frac{1}{z-(1-k)}$ stabilità asintotica (polo in $|(1-k)| < 1$)
- k qualsiasi
  $x(t) = (1-k)^t x_0$ evoluzione libera del sistema retroazionato $\rightarrow$ $u(t) = -k(1-k)^t x_0$

per cui vale che

$$J_\infty(t) = \sum_{t=0}^{+\infty} \Big((1-k)^t x_0\Big)^2 + r\Big(-k(1-k)^t x_0\Big)^2 = x_0^2(1+rk^2)\sum_{t=0}^{+\infty}\Big((1-k)^2\Big)^t$$
$$= (0 < k < 2) = x_0^2(1+rk^2)\frac{1}{1-(1-k)^2} = \frac{x_0^2(1+rk^2)}{k(2-k)}$$

di conseguenza, nel caso $0 < k < 2$, si ha che

$$\frac{\partial J_\infty}{\partial k} = -\frac{2x_0^2}{k^2(2-k)^2}(rk^2 + k - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad rk^2 + k - 1 = 0$$

$$k_\infty^\star = \frac{-1+\sqrt{1+4r}}{2r} \qquad k_\infty^\star \in (0,2) \forall r > 0 \qquad \Big(k_\infty^\star = 1 \quad \text{nel caso limite } r \to 0^+\Big)$$

⊠

7.5 Controllo ottimo LQ di sistemi a tempo discreto a orizzonte finito

1. *modello del sistema da controllare*: sistema lineare a tempo discreto

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) \qquad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$$
$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \qquad t \in [0,T], t \in \mathbb{N}$$

2. *funzionale costo da minimizzare/massimizzare*: ottimizzazione su orizzonte finito

$$J_T(t) = \mathbf{x}(T)^\top \mathbf{S}\mathbf{x}(T) + \sum_{t=0}^{T-1}\Big(\mathbf{x}(t)^\top \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^\top \mathbf{R}\mathbf{u}(t)\Big)\,dt$$

$\mathbf{S}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrici semi-definite positive $\quad \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ matrice definita positiva

$\Rightarrow$ problema di controllo ottimo:

$$\boxed{\mathbf{u}_T^\star(t) = \arg \min_{t\in[0,T-1]} J_T(\mathbf{u}(t))}$$

7.5.1 teorema principale

Teorema Per i sistemi a tempo discreto, la legge di controllo ottimo su orizzonte finito è data da

$$\mathbf{u}_T^\star(t) = -\mathbf{K}_T^\star(t)\mathbf{x}(t) \qquad \text{con} \qquad \mathbf{K}_T^\star(t) = \Big(\mathbf{R} + \mathbf{G}^\top \mathbf{M}_T(t+1)\mathbf{G}\Big)^{-1} \mathbf{G}^\top \mathbf{M}_T(t+1)\mathbf{F}$$

dove la sequenza $\mathbf{M}_T(0)\dots\mathbf{M}_T(T)$ di matrici simmetriche e sdp è soluzione dell'Equazione di Riccati alle Differenze:

$$(ERD) \qquad \begin{cases} \mathbf{M}(t) = \mathbf{F}^\top\mathbf{M}(t+1)\mathbf{F} - \mathbf{F}^\top\mathbf{M}(t+1)\mathbf{G}\left(\mathbf{R}+\mathbf{G}^\top\mathbf{M}(t+1)\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^\top\mathbf{M}(t+1)\mathbf{F} + \mathbf{Q} \\ \mathbf{M}(T) = \mathbf{S} \end{cases}$$

In corrispondenza all'ingresso di controllo $\mathbf{u}_T^\star(t)$, il funzionale costo assume il valore (minimo)

$$J_T^\star = \mathbf{x}_0^\top \mathbf{M}_T(0)\mathbf{x}_0$$

Dimostrazione. (cenni) Si consideri la sequenza $\mathbf{M}_T(0)\dots\mathbf{M}_T(T)$ di matrici simmetriche e sdp soluzione della ERD, allora, sfruttando l'identità

$$\mathbf{0} = \mathbf{x}(0)^\top\mathbf{M}_T\mathbf{x}(0) + \mathbf{x}(T)^\top\mathbf{M}_T(T)\mathbf{x}(T) + \sum_{t=0}^{T-1}\Big(\mathbf{x}(t+1)^\top\mathbf{M}_T(t+1)\mathbf{x}(t+1) - \mathbf{x}(t)^\top\mathbf{M}_T(t)\mathbf{x}(t)\Big)$$

e le equazioni della dinamica del sistema, è possibile riscrivere il funzionale costo come segue

$$\begin{aligned}
J_T &= \mathbf{x}(T)^\top\mathbf{S}\mathbf{x}(T) + \sum_{t=0}^{T-1}\Big(\mathbf{x}(t)^\top\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^\top\mathbf{R}\mathbf{u}(t)\Big) \\
&= \mathbf{x}(0)^\top\mathbf{M}_T\mathbf{x}(0) + \mathbf{x}(T)^\top(\mathbf{S}-\mathbf{M}_T(T))\mathbf{x}(T) + \\
&\qquad + \sum_{t=0}^{T-1}\begin{bmatrix}\mathbf{u}(t)^\top & \mathbf{x}(t)^\top\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{R}+\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_T(t+1)\mathbf{G} & \mathbf{G}^\top\mathbf{M}_T(t+1)\mathbf{F} \\ \mathbf{F}^\top\mathbf{M}_T(t+1)\mathbf{G} & \mathbf{Q}+\mathbf{F}^\top\mathbf{M}_T(t+1)\mathbf{F}-\mathbf{M}_T(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{x}(t)\end{bmatrix} \\
&= \mathbf{x}(0)^\top\mathbf{M}_T\mathbf{x}(0) + \\
&\qquad + \sum_{t=0}^{T-1}\begin{bmatrix}\mathbf{u}(t)^\top & \mathbf{x}(t)^\top\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{R}+\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_T(t+1)\mathbf{G} & \mathbf{G}^\top\mathbf{M}_T(t+1)\mathbf{F} \\ \mathbf{F}^\top\mathbf{M}_T(t+1)\mathbf{G} & \mathbf{F}^\top\mathbf{M}_T(t+1)\mathbf{G}\left(\mathbf{R}+\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_T(t+1)\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_T(t+1)\mathbf{F}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{x}(t)\end{bmatrix} \\
&= \mathbf{x}(0)^\top\mathbf{M}_T\mathbf{x}(0) \\
&\qquad + \sum_{t=0}^{T-1}\begin{bmatrix}\mathbf{u}(t)^\top & \mathbf{x}(t)^\top\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{R}+\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_T(t+1)\mathbf{G} \\ \mathbf{F}^\top\mathbf{M}_T(t+1)\mathbf{G}\end{bmatrix}(\mathbf{R}+\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_T(t+1)\mathbf{G})^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{R}+\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_T(t+1)\mathbf{G} & \mathbf{G}^\top\mathbf{M}_T(t+1)\mathbf{F}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{x}(t)\end{bmatrix} \\
&= \mathbf{x}(0)^\top\mathbf{M}_T\mathbf{x}(0) + \sum_{t=0}^{T-1}\Big((\mathbf{R}+\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_T(t+1)\mathbf{G})\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}^\top\mathbf{M}_T(t+1)\mathbf{F}\mathbf{x}(t)\Big)^\top(\mathbf{R}+\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_T(t+1)\mathbf{G})^{-1} \\
&\qquad\qquad \Big((\mathbf{R}+\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_T(t+1)\mathbf{G})\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}^\top\mathbf{M}_T(t+1)\mathbf{F}\mathbf{x}(t)\Big) \\
&= \mathbf{x}(0)^\top\mathbf{M}_T\mathbf{x}(0) + \sum_{t=0}^{T-1}\mathbf{v}(t)^\top(\mathbf{R}+\mathbf{G}^\top\mathbf{M}_T(t+1)\mathbf{G})^{-1}\mathbf{v}(t)
\end{aligned}$$

$\square$

$\Rightarrow$ La determinazione di $\mathbf{u}_T^\star(t)$ richiede la risoluzione della ERD (equazione ricorsiva all'indietro)

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbf{M}_T(0) & \leftarrow & \mathbf{M}_T(1) & \leftarrow & \mathbf{M}_T(2) & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & \mathbf{M}_T(T-1) & \leftarrow & \mathbf{M}_T(T) = \mathbf{S} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \mathbf{K}_T^\star(0) & & \mathbf{K}_T^\star(1) & & \cdots & & \mathbf{K}_T^\star(T-2) & & \mathbf{K}_T^\star(T-1) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \mathbf{u}_T^\star(0) & & \mathbf{u}_T^\star(1) & & \cdots & & \mathbf{u}_T^\star(T-2) & & \mathbf{u}_T^\star(T-1) \\
 & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\
\mathbf{x}(0) & & \mathbf{x}(1) & & \mathbf{x}(2) & & \cdots & & \mathbf{x}(T-1) & &
\end{array}
$$

esempio: derivazione della soluzione tramite calcolo diretto - caso scalare

1. modello del sistema: sistema lineare scalare

$$
\begin{aligned}
&x(t+1) = x(t) + u(t) \qquad\qquad t \in [0,2] \\
&x(0) = x_0 = 1 \\
&u(t) = -k(t)x(t)
\end{aligned}
$$

2. funzionale costo:

$$
\begin{aligned}
J_T(t) &= 2x(T)^2 + \sum_{t=0}^{T-1} x(t)^2 + u(t)^2 \qquad s=2, q=1, r=1 \\
&= 2x(2)^2 + \sum_{t=0}^{1} x(t)^2 + u(t)^2 = 2x(2)^2 + \left(x(1)^2 + u(1)^2\right) + \left(x(0)^2 + u(0)^2\right)
\end{aligned}
$$

Dal momento che $\mathbf{F} = f = 1, \mathbf{G} = g = 1, \mathbf{S} = s = 2, \mathbf{Q} = q = 1, \mathbf{R} = r = 1$, si ha che

$$
(ERD) \quad \begin{cases} \mathbf{M}(t) = \mathbf{F}^\top \mathbf{M}(t+1)\mathbf{F} - \mathbf{F}^\top \mathbf{M}(t+1)\mathbf{G}\left(\mathbf{R} + \mathbf{G}^\top \mathbf{M}(t+1)\mathbf{G}\right)^{-1} \mathbf{G}^\top \mathbf{M}(t+1)\mathbf{F} + \mathbf{Q} \\ \mathbf{M}(T) = \mathbf{S} \end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow \quad \begin{cases} m(t) = m(t+1) - m(t+1)(1 + m(t+1))^{-1} m(t+1) + 1 \\ m(T) = 2 \end{cases}
$$

da cui

$$
\begin{aligned}
&m_T(2) = 2 \\
&m_T(1) = m_T(2) - m_T(2)^2(1 + m_T(2))^{-1} + 1 = 2 - 4(1+2)^{-1} + 1 = \frac{5}{3} \\
&m_T(0) = m_T(1) - m_T(1)^2(1 + m_T(1))^{-1} + 1 = \frac{5}{3} - \frac{25}{9}\left(1 + \frac{5}{3}\right)^{-1} + 1 = \frac{13}{8}
\end{aligned}
$$

e di conseguenza, dato che $k_T^\star(t) = (1 + m_T(t+1))^{-1} m_T(t+1)$, segue

$$
\begin{aligned}
k_T^\star(1) &= (1 + m_T(2))^{-1} m_T(2) = \frac{2}{3} \\
k_T^\star(0) &= (1 + m_T(1))^{-1} m_T(1) = \frac{5}{8}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\begin{aligned}
&u_T^\star(0) = -k_T^\star(0)x(0) = -\frac{5}{8} \\
&u_T^\star(1) = -k_T^\star(1)x(1) = -k_T^\star(1)(x(0) + u_T^\star(0)) = -\frac{1}{4}
\end{aligned}}
$$

⊠

7.6 Controllo ottimo LQ di sistemi a tempo discreto a orizzonte infinito

1. *modello del sistema da controllare*: sistema lineare a tempo discreto

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) && \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m \\ &\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 && t \in [0, +\infty), t \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

2. *funzionale costo da minimizzare/massimizzare*: ottimizzazione su orizzonte finito

$$J_\infty(t) = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\mathbf{x}(t)^\top \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^\top \mathbf{R}\mathbf{u}(t) \right)$$

$\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrice semi-definita positiva $\quad$ $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ matrice definita positiva

$\Rightarrow$ problema di controllo ottimo:

$$\boxed{\mathbf{u}_\infty^\star(t) = \arg \min_{t\in[0,+\infty)} J_\infty(\mathbf{u}(t))}$$

corrispondenza tra caso infinito e caso finito con $T \to \infty$

Sia $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ una matrice tale che $\mathbf{Q} = \mathbf{H}^\top \mathbf{H}$. Se $(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ è stabilizzabile e $(\mathbf{F}, \mathbf{H})$ è rivelabile, allora

a. per ogni scelta della condizione finale $\mathbf{M}_T(T)$ sdp, la soluzione $\mathbf{M}_T(t)$ della ERD converge all'unico valore costante finito $\mathbf{M}_\infty$ quando $T \to \infty$,

b. $\mathbf{M}_\infty$ è l'unica soluzione sdp dell'Equazione Algebrica di Riccati (Discreta):

$$(EARD) \quad \mathbf{M} = \mathbf{F}^\top \mathbf{M}\mathbf{F} - \mathbf{F}^\top \mathbf{M}\mathbf{G} \left(\mathbf{R} + \mathbf{G}^\top \mathbf{M}\mathbf{G} \right)^{-1} \mathbf{G}^\top \mathbf{M}\mathbf{F} + \mathbf{Q}$$

7.6.1 teorema principale

Teorema Per i sistemi a tempo discreto con $(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ *stabilizzabile e* $(\mathbf{F}, \mathbf{H})$ *rivelabile con* $\mathbf{Q} = \mathbf{H}^\top \mathbf{H}$, la legge di controllo ottimo su orizzonte infinito è data da

$$\mathbf{u}_\infty^\star(t) = -\mathbf{K}_\infty^\star \mathbf{x}(t) \qquad \text{con} \qquad \mathbf{K}_\infty^\star = \left(\mathbf{R} + \mathbf{G}^\top \mathbf{M}_\infty \mathbf{G} \right)^{-1} \mathbf{G}^\top \mathbf{M}_\infty \mathbf{F}$$

dove $\mathbf{M}_\infty = \mathbf{M}_\infty^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è l'unica soluzione dell'Equazione Algebrica di Riccati (Discreta):

$$(EARD) \quad \mathbf{M} = \mathbf{F}^\top \mathbf{M}\mathbf{F} - \mathbf{F}^\top \mathbf{M}\mathbf{G} \left(\mathbf{R} + \mathbf{G}^\top \mathbf{M}\mathbf{G} \right)^{-1} \mathbf{G}^\top \mathbf{M}\mathbf{F} + \mathbf{Q}$$

In corrispondenza all'ingresso di controllo $\mathbf{u}_\infty^\star(t)$, il funzionale costo assume il valore (minimo)

$$J_\infty^\star = \mathbf{x}_0^\top \mathbf{M}_\infty \mathbf{x}_0$$

Dimostrazione. (cenni) La dimostrazione si basa sulla manipolazione dell'indice (a orizzonte finito) $J_T(t)$, posto $\mathbf{M}_T(-t) = \cdots = \mathbf{M}_T(0) = \mathbf{M}_\infty$. Si dimostra dunque che $\mathbf{x}_0^\top \mathbf{M}_T(-T)\mathbf{x}_0 \leq \sum_{t=0}^{T-1} \left(\mathbf{x}(t)^\top \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}_\infty(t)^\top \mathbf{R}\mathbf{u}_\infty(t) \right) \leq \mathbf{x}_0^\top \mathbf{M}_\infty \mathbf{x}_0$. Si calcola infine il limite per $T \to +\infty$. □

7.6.2 proprietà stabilizzanti della legge di controllo

Proposizione Sia $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ una matrice tale che $\mathbf{Q} = \mathbf{H}^\top \mathbf{H}$. Se $(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ è stabilizzabile e $(\mathbf{F}, \mathbf{H})$ è rivelabile, allora la legge di controllo $\mathbf{u}_\infty^\star(t) = -\mathbf{K}_\infty^\star \mathbf{x}(t)$ con $\mathbf{K}_\infty^\star = \left(\mathbf{R} + \mathbf{G}^\top \mathbf{M}_\infty \mathbf{G}\right)^{-1} \mathbf{G}^\top \mathbf{M}_\infty \mathbf{F}$ minimizza il funzionale costo $J_\infty(\mathbf{u}(t))$ del problema di controllo ottimo su orizzonte infinito, rendendo il sistema in catena chiusa asintoticamente stabile, cioè $\mathbf{u}_\infty^\star(t)$ è stabilizzante.

esempio: applicazione della proposizione

1. modello del sistema: sistema lineare

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^2 \ (n=2), \quad u(t) \in \mathbb{R} \ (m=1)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$$

$(\mathbf{F}, \mathbf{g})$ stabilizzabile (sist. raggiungibile)

2.**A** funzionale costo: $J_\infty(t) = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\mathbf{x}(t)^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^\top \mathbf{R} \mathbf{u}(t)\right)$ $\quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sdp, $\mathbf{R} = r = 1$

$(\mathbf{F}, \mathbf{Q})$ **non** rivelabile

Allora, posto $u(t) = -\mathbf{k}^\top \mathbf{x}(t) = -\begin{bmatrix} k & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = -k x_1(t)$ per cui $x_1(t+1) = 2x_1(t) + u(t) = (2-k)x_1(t)$, si ha che

$$\begin{aligned} J_\infty &= \sum_{t=0}^{+\infty} \left(\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + u(t)^2 \right) = \sum_{t=0}^{+\infty} \left(x_1(t)^2 + u(t)^2 \right) \\ &= \sum_{t=0}^{+\infty} \left(x_1(t)^2 + k^2 x_1(t)^2 \right) = \sum_{t=0}^{+\infty} (1+k^2) x_1(t)^2 = (1+k^2) \sum_{t=0}^{+\infty} \left((2-k)^t x_1(0) \right)^2 \\ &= (1+k^2) x_1(0)^2 \sum_{t=0}^{+\infty} (2-k)^{2t} \end{aligned}$$

perciò se $|2-k| < 1 \quad (1 < k < 3)$ allora $J_\infty = \dfrac{1+k^2}{1-(2+k)^2} x_1(0)^2$ e, di conseguenza,

$$\frac{d}{dk} J_\infty = \frac{d}{dk} \frac{1+k^2}{1-(2-k)^2} x_1(0)^2 = -4 \frac{k^2-k-1}{(1-(2-k)^2)^2} x_1(0)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\boxed{\mathbf{k}_\infty^\star = \begin{bmatrix} k^\star & 0 \end{bmatrix}^\top \quad \text{con} \quad k^\star = \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

Tuttavia, il sistema retroazionato risulta **instabile** in quanto

$$\mathbf{A} = (\mathbf{F} - \mathbf{g}\mathbf{k}_\infty^\star) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Lambda(\mathbf{A}) = \left\{ 3, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$$

2.**B** funzionale costo: $J_\infty(t) = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\mathbf{x}(t)^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^\top \mathbf{R} \mathbf{u}(t)\right)$ $\quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sdp, $\mathbf{R} = r = 1$

$(\mathbf{F}, \mathbf{Q})$ rivelabile

Allora,

$$\mathbf{M}_\infty = \texttt{idare(F,g,Q,r,[],[])} = \begin{bmatrix} 126.245 & -196.030 \\ -196.030 & 316.144 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{k}^\star_\infty = (r + \mathbf{g}^\top \mathbf{M}_\infty \mathbf{g})^{-1} \mathbf{g}^\top \mathbf{M}_\infty \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -2.720 & 7.022 \end{bmatrix}^\top}$$

E, il sistema retroazionato risulta **stabile** in quanto

$$\mathbf{A} = (\mathbf{F} - \mathbf{g}\mathbf{k}^\star_\infty) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.720 & 7.022 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.720 & 7.022 \\ 2.720 & -4.022 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Lambda(\mathbf{A}) = \{0.2728, 0.4252\}$$

⊠

7.7 Implementazione del controllore ottimo LQ

7.7.1 generalizzazione al caso con termini misti

nel funzionale costo possono comparire dei *termini misti* ovvero dei prodotti (pesati) di stato e ingresso

$$J_\infty(t) = \sum_{t=0}^{+\infty} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t)^\top & \mathbf{u}(t)^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{N} \\ \mathbf{N}^\top & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} \quad \text{con } \mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

$\rightarrow$ è possibile ricondursi al caso standard (anche nel caso a orizzonte finito e nel caso di sistemi a tempo continuo):

sfruttando la formula del completamento dei quadrati
dati $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{A} = \mathbf{A}^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ sdp

$$\mathbf{y}^\top \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{y}^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{y} + \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{A}\mathbf{x})^\top \mathbf{C}(\mathbf{y} + \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{A}\mathbf{x})$$

si ha che

$$J_\infty(t) = \sum_{t=0}^{+\infty} J'(t)$$

con

$$\begin{aligned} J'(t) &= \mathbf{x}(t)^\top \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^\top \mathbf{R}\mathbf{u}(t) + \mathbf{x}(t)^\top \mathbf{N}\mathbf{u}(t) + \mathbf{u}(t)^\top \mathbf{N}^\top \mathbf{u}(t) \\ &= \mathbf{x}(t)^\top \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^\top \mathbf{R}\mathbf{u}(t) + \mathbf{x}(t)^\top \mathbf{N}\mathbf{u}(t) + \mathbf{u}(t)^\top \mathbf{N}^\top \mathbf{u}(t) - \mathbf{x}(t)^\top \mathbf{N}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{N}^\top \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t)^\top \mathbf{N}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{N}^\top \mathbf{x}(t) \\ &= \mathbf{x}(t)^\top \left(\mathbf{Q} - \mathbf{N}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{N}^\top\right) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^\top \mathbf{R}\mathbf{u}(t) + \mathbf{x}(t)^\top \mathbf{N}\mathbf{u}(t) + \mathbf{u}(t)^\top \mathbf{N}^\top \mathbf{u}(t) + \mathbf{x}(t)^\top \mathbf{N}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{N}^\top \mathbf{x}(t) \\ &= \mathbf{x}(t)^\top \left(\mathbf{Q} - \mathbf{N}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{N}^\top\right) \mathbf{x}(t) + \left(\mathbf{u}(t)^\top + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{N}^\top \mathbf{x}(t)\right)^\top \mathbf{R} \left(\mathbf{u}(t)^\top + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{N}^\top \mathbf{x}(t)\right) \end{aligned}$$

posto

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} - \mathbf{N}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{N}^\top \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}(t) + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{N}^\top \mathbf{x}(t)$$

e osservando che $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{N}^\top \mathbf{x}(t)$, ci si riconduce al caso standard:

1. modello di sistema da controllare

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(\bar{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{N}^\top \mathbf{x}(t)) = (\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{N}^\top)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\bar{\mathbf{u}}(t) \\ &= \bar{\mathbf{F}}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\bar{\mathbf{u}}(t) \end{aligned}$$

2. funzionale costo da ottimizzare

$$J_\infty(t) = \sum_{t=0}^{+\infty} \Big(\mathbf{x}(t)^\top \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{x}(t) + \bar{\mathbf{u}}(t)^\top \mathbf{R} \bar{\mathbf{u}}(t) \Big)$$

per cui, se

- $\bar{\mathbf{Q}}$ sdp
- $(\bar{\mathbf{F}}, \mathbf{G})$ stabilizzabile
- $(\bar{\mathbf{F}}, \bar{\mathbf{H}})$ rivelabile con $\bar{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{H}}^\top \bar{\mathbf{H}}$

allora

$$\boxed{\begin{aligned} &\bar{\mathbf{u}}^\star_\infty(t) = -\bar{\mathbf{K}}^\star_\infty \mathbf{x}(t) \quad \text{con} \quad \bar{\mathbf{K}}^\star_\infty = \Big(\mathbf{R} + \mathbf{G}^\top \bar{\mathbf{M}}_\infty \mathbf{G}\Big)^{-1} \mathbf{G}^\top \bar{\mathbf{M}}_\infty \bar{\mathbf{F}} \\ &\qquad\qquad\qquad\quad \text{dove} \quad \bar{\mathbf{M}}_\infty \text{ è soluzione di } \bar{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{F}}^\top \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{F}} - \bar{\mathbf{F}}^\top \bar{\mathbf{M}} \mathbf{G} \Big(\mathbf{R} + \mathbf{G}^\top \bar{\mathbf{M}} \mathbf{G}\Big)^{-1} \mathbf{G}^\top \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{F}} + \bar{\mathbf{Q}} \end{aligned}}$$

da cui segue che

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\star_\infty(t) &= \bar{\mathbf{u}}^\star_\infty(t) - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{N}^\top \mathbf{x}(\mathbf{t}) = -(\bar{\mathbf{K}}^\star_\infty + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{N}^\top)\mathbf{x}(\mathbf{t}) \\ &= -\left(\Big(\mathbf{R} + \mathbf{G}^\top \bar{\mathbf{M}}_\infty \mathbf{G}\Big)^{-1} \mathbf{G}^\top \bar{\mathbf{M}}_\infty \bar{\mathbf{F}} + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{N}^\top\right) \mathbf{x}(t) \\ &= -\left(\Big(\mathbf{R} + \mathbf{G}^\top \bar{\mathbf{M}}_\infty \mathbf{G}\Big)^{-1} \mathbf{G}^\top \bar{\mathbf{M}}_\infty (\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{N}^\top) + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{N}^\top\right) \mathbf{x}(t) \\ &= -\Big(\mathbf{R} + \mathbf{G}^\top \bar{\mathbf{M}}_\infty \mathbf{G}\Big)^{-1} \Big(\mathbf{G}^\top \bar{\mathbf{M}}_\infty (\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{N}^\top) + \Big(\mathbf{R} + \mathbf{G}^\top \bar{\mathbf{M}}_\infty \mathbf{G}\Big) \mathbf{R}^{-1}\mathbf{N}^\top\Big) \mathbf{x}(t) \\ &= -\Big(\mathbf{R} + \mathbf{G}^\top \bar{\mathbf{M}}_\infty \mathbf{G}\Big)^{-1} \Big(\mathbf{G}^\top \bar{\mathbf{M}}_\infty \mathbf{F} + \mathbf{N}^\top\Big) \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}^\star_\infty(t) = -\mathbf{K}^\star_\infty \mathbf{x}(t) \quad \text{con} \quad \mathbf{K}^\star_\infty = \Big(\mathbf{R} + \mathbf{G}^\top \bar{\mathbf{M}}_\infty \mathbf{G}\Big)^{-1} \Big(\mathbf{G}^\top \bar{\mathbf{M}}_\infty \mathbf{F} + \mathbf{N}^\top\Big) \\ &\qquad\qquad\qquad\quad \text{dove} \quad \bar{\mathbf{M}}_\infty \text{ è soluzione di } \bar{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{F}}^\top \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{F}} - \bar{\mathbf{F}}^\top \bar{\mathbf{M}} \mathbf{G} \Big(\mathbf{R} + \mathbf{G}^\top \bar{\mathbf{M}} \mathbf{G}\Big)^{-1} \mathbf{G}^\top \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{F}} + \bar{\mathbf{Q}} \end{aligned}$$

significato fisico dei termini misti
l'introduzione dei termini misti può essere legata alla volontà di minimizzare un qualche indice di performance basato sulla norma dell'*uscita del sistema*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}\|^2_{\mathbf{P}} &= \mathbf{y}^\top \mathbf{P} \mathbf{y} = (\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{J}\mathbf{u})^\top \mathbf{P} (\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{J}\mathbf{u}) = \Big(\mathbf{x}^\top \mathbf{H}^\top + \mathbf{u}^\top \mathbf{J}^\top\Big) \mathbf{P} (\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{J}\mathbf{u}) \\ &= \mathbf{x}^\top \mathbf{H}^\top \mathbf{P} \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{x}^\top \mathbf{H}^\top \mathbf{P} \mathbf{J} \mathbf{u} + \mathbf{u}^\top \mathbf{J}^\top \mathbf{P} \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{u}^\top \mathbf{J}^\top \mathbf{P} \mathbf{J} \mathbf{u} \\ &= \mathbf{x}^\top \mathbf{Q}^+ \mathbf{x} + \mathbf{x}^\top \mathbf{N} \mathbf{u} + \mathbf{u}^\top \mathbf{N}^\top \mathbf{x} + \mathbf{u}^\top \mathbf{R}^+ \mathbf{u} \end{aligned}$$

7.7.2 progettazione del controllore: scelta dei parametri

vincoli: $\mathbf{Q}$ sdp, $\mathbf{R}$ dp & $(\mathbf{F}, \mathbf{Q})$ rivelabile

si osserva che una scelta comoda per il debug (poichè rende facile interpretazione delle conseguenze dirette di causa-effetto) è la seguente

$$\boxed{\mathbf{Q} = diag(q_i) \quad \text{e} \quad \mathbf{R} = diag(r_i)}$$

$\oplus$ eventuale normalizzazione: pesi all'interno di un range omogeneo, tipicamente $[0, 1]$

(in tal senso, è utile conoscere i valori max/min delle variabili di stato e ingresso)

principali possibili scelte

1. opzione più semplice
   $q_i = q$
   $r_i = r$
   $\rightarrow$ è necessario gestire solo il rapporto q/r

2. regola di Bryson (regola euristica)
   $q_i = 1/\left(\bar{x}_i^2\right), \quad \bar{x}_i = \max\{x_i(t)\}$
   $r_i = 1/\left(\bar{u}_i^2\right), \quad \bar{u}_i = \max\{u_i(t)\}$
   $\rightarrow$ è necessario conoscere bene i limiti del sistema