Geo 1 - mod B - 15/05/2024

Note Title

§ Spazi proiettivi

$\mathbb{P}^1(K) = \{ \langle v \rangle ,\ v \in K^2 \setminus \{\binom{0}{0}\} \} \ni \langle \binom{a_0}{a_1} \rangle$ a_0, a_1 non entrambi zero.

Scriveremo $\binom{a_0}{a_1} \in \mathbb{P}^1(K)$ (dimentichiamo le parentesi $\langle\ \rangle$)

$\binom{a_0}{a_1} = \binom{3a_0}{3a_1} = \binom{\lambda a_0}{\lambda a_1} \quad \forall \lambda \in K^*$

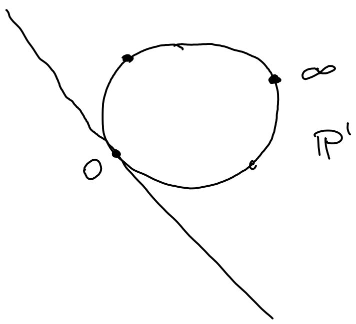
$\binom{a_0}{a_1}$:

- $a_0 \neq 0$: $\binom{a_0}{a_1} \overset{?}{=} \binom{1}{x}$ (punto in $\mathbb{P}^1(K)$), $x = \frac{a_1}{a_0}$
- $a_0 = 0$ $(a_1 \neq 0)$: $\binom{a_0}{a_1} = \binom{0}{a_1} = \binom{0}{1}$ come punti in $\mathbb{P}^1(K)$

$$\mathbb{P}^1(K) = \underset{\binom{1}{x}}{\mathbb{A}^1(K)} \cup \{ \underset{\binom{0}{1}}{\infty} \}$$

∞: punto all'infinito

NB avrei potuto scegliere $\mathbb{P}^1(K) = \underset{\binom{z}{1}}{\mathbb{A}^1(K)} \cup \{ \text{pto } \underset{\binom{1}{0}}{\infty} \}$



$\mathbb{P}^2(K) = \{ \langle w \rangle \leq K^3 \setminus \{\underline{0}\} \} = \{ \langle \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rangle$ con $a_i \in K$ non tutti $0 \}$

$\langle \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \rangle$ come punto di $\mathbb{P}^2(K)$ lo scrivo anche come

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^2(K)$$

che è determ. a meno di proporz.

- $a_0 \neq 0$: $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_1/a_0 \\ a_2/a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ $x = a_1/a_0$ $y = a_2/a_0$
- $a_0 = 0$: $\begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ con a_1, a_2 non entrambi 0

$$\mathbb{P}^2(K) = \mathbb{A}^2(K) \cup \mathbb{P}^1(K)$$

$$\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{A}^2(K) \qquad \begin{pmatrix}0\\x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{P}^1(K)$$

$\begin{pmatrix}0\\x\\y\end{pmatrix}$ ← corrisponde a direzione di una retta per l'origine di K^2

La struttura di sp. proiettivo diventa più ricca se considero anche tutti gli altri sottosp. di K^{n+1} (se lavoro con $\mathbb{P}^n$)

$$S(K^{n+1}) = \{ W \leq K^{n+1} \} =$$

$$= \underbrace{\{0\}}_{\substack{\emptyset \\ \text{e dirò} \\ \text{che ha} \\ \text{dim } -1}} \cup \underbrace{\{\text{sott. di dim } 1\}}_{\substack{\text{punti di} \\ \mathbb{P}^n(K) \\ \text{e hanno} \\ \text{dim } 0}} \cup \underbrace{\{\text{sott. dim } 2\}}_{\substack{\text{rette} \\ \text{dim } 1}} \cup \dots \underbrace{\{\text{sott. di dim } n\}}_{\substack{\text{iperpiani} \\ \text{hanno dim} \\ n-1}} \cup \underbrace{\{K^{n+1}\}}_{\substack{\text{tutto} \\ \text{dim } n}}$$

$$\boxed{\dim_{\mathbb{P}} W = \dim_K W - 1}$$

Esercizio Siano $P = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ punti di $\mathbb{P}^2(K)$

Scrivere l'eq. di $P \vee Q$ in $\mathbb{P}^2(K)$

⌈ $P \rightsquigarrow \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle \leq K^3$ $\qquad$ $Q \rightsquigarrow \left\langle \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \leq K^3$

$$P \vee Q \rightsquigarrow \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \leq K^3$$

↑ l'insieme delle soluz. dell'eq.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & y_1 \\ 2 & -1 & y_2 \\ 3 & 1 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad -y_3 + 2y_1 + 3y_1 - y_2 = 0$$

$$5y_1 - y_2 - y_3 = 0$$ ⌋

? eq in x_0, x_1, x_2 t.c. P e Q siano soluzione di questa eq?

$$\underbrace{\boxed{5x_0 - x_1 - x_2 = 0}}_{\text{eq. retta } P \vee Q \text{ in } \mathbb{P}^2} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 2 & -1 & x_1 \\ 3 & 1 & x_2 \end{vmatrix} = 0$$

NB se scrivo $P = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ oppure $\begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \\ 3\lambda \end{pmatrix}$ $\lambda \neq 0$

sono sempre soluzione dell'eq $5x_0 - x_1 - x_2 = 0$ perché l'eq. è omogenea!

Interpretazione affine $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^2(K)$

$x_0 = 0$ retta all'∞

retta all'∞ $\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ con un vettore di K^2

? Quali sono i pti di $\mathbb{A}^2(K)$ che appartengono a $5x_0 - x_1 - x_2 = 0$?

$\mathbb{P}^2(K) \ni \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ t.c. $5 \cdot 1 - x - y = 0$ ossia i pti

t.c. $\boxed{x + y - 5 = 0}$ $\leftarrow$ eq. retta passante per $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{A}^2(K)$ e parallela al vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

eq disomogeneizzata

$a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \rightsquigarrow \underbrace{a_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n = 0}_{\text{eq nell'affine}}$

$y_i = \dfrac{x_i}{x_0} \leftarrow \neq 0$

Esercizio

In $\mathbb{P}^3(K)$ siano dati:

- il piano L di eq. $x_0 - 3x_1 + x_2 + x_3 = 0$
- retta r per $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Determinare 3 punti di L, l'eq. di r, $L \wedge r$, $L \vee r$

- $L \rightsquigarrow$ sottosp di dim $4 - 1 = 3$ in $K^4 \Rightarrow \dim_{\mathbb{P}} L = 3 - 1 = 2$

L come sottosp di K^4 è dato delle soluz. di $x_0 - 3x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$x_0 = 3x_1 - x_2 - x_3$ $\qquad L = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{P}^3(K)$ punti di L.

- $r: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ sottosp di K^4 $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

eq di r $\left\{ 2 \text{ eq in } x_0\, x_1\, x_2\, x_3 \right.$ ad es $\begin{cases} x_0 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$

• $L \wedge r$ $\begin{cases} x_0 - 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_0 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_0 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_0 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$

pti le cui coord sodd. le eq. di L e di r

$H = L \wedge r$ come sottosp. di K^4 è $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

come punto di $\mathbb{P}^3(K)$ è $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = H$

$$\boxed{\underbrace{\dim_{\mathbb{P}}(L \vee r)}_{3} + \underbrace{\dim_{\mathbb{P}}(L \wedge r)}_{0} = \underbrace{\dim_{\mathbb{P}} L}_{2} + \underbrace{\dim_{\mathbb{P}} r}_{1}}$$

Grassmann proiettivo

$L \vee r = \mathbb{P}^3(K)$ è tutto corrisponde al sottosp. K^4 di K^4

Infatti. $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}\right\rangle$ ha dim 4

Interpretazione affine dei risultati sopra: $\mathbb{A}^3(K) = \mathbb{P}^3(K) \setminus \{x_0 = 0\}$ (piano)

$L \cap \mathbb{A}^3(K)$ piano affine di eq $1 - 3x + y + z = 0$

$\boxed{3x - y - z = 1}$

$r \cap \mathbb{A}^3(K)$ retta per i punti $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

che ha eq. $\begin{cases} 1 - y - z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y + z = 1 \\ x = 0 \end{cases}$

$r \cap \mathbb{A}^3(K)$ è parallelo al vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (desomogeneizzo)

3 punti nell'affine di L = ? $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ soluzioni

$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{P}^3$

$L \wedge r$ è un punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ nel piano all'∞

Infatti: L^{aff} "$= L \cap \mathbb{A}^3$" è parallelo a "$r \cap \mathbb{A}^3$" $= r^{aff}$

"$L \cap \mathbb{A}^3(k)$" $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

§ Dualità proiettiva

V sp. vett su k $V^* = \mathrm{Hom}_k(V, k)$

$S(V) = \{W \leq V\}$ $S(V^*)$

$W \longmapsto W^\perp = \{\varphi : V \to k \text{ t.c. } \varphi(W) = 0\}$ ossia $W \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi$

Se V ha dim n
e W ha dim m $\dim_k W^\perp = n - m$

Se ora lavoro con V di dim $n+1$, $S(V)$ sarà sp. proiett. di dim n, $\dim_k W = m+1$ $\dim_{\mathbb{P}} W = m$

$\dim_{\mathbb{P}} W^\perp = \dim_k W^\perp - 1 = n+1-(m+1)-1 = n-m-1$

$$\boxed{\dim_{\mathbb{P}} W^\perp = n - \dim_{\mathbb{P}} W - 1}$$ $n =$ dim sp. proiett.

<u>Esempi</u> $\mathbb{P}^2(k)$ $W : x_0 + x_1 - x_2 = 0$ retta $\dim_{\mathbb{P}} W = 1$

$\dim_{\mathbb{P}} W^\perp : 2 - 1 - 1 = 0$ $W^\perp$ sarà un punto. Quale?

$W^\perp$ come sottosp di $\underset{\substack{\wr \\ (a_0, a_1, a_2) \text{ matrice } 3\times 1}}{\mathrm{Hom}_k(k^3, k)}$ sarà dato dalle φ t.c. $\varphi\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \ \forall \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in W$

$\varphi \rightsquigarrow (a_0, a_1, a_2)$ t.c. $(a_0 \ a_1 \ a_2)\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$ $\in W$

$a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0 \quad \forall \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in W$ a_0, a_1, a_2 sono i coeff. dell'eq di W

(a_0, a_1, a_2) coord plückeriane di W

Il punto $W^\perp$ è $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Altro metodo W passa per i punti $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$W^\perp$ è dato dai punti $\rightsquigarrow$ matrici $(a_0\ a_1\ a_2)$ t.c. $\begin{cases} (a_0\ a_1\ a_2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ (a_0\ a_1\ a_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 1a_0 - 1a_1 = 0 \\ 1a_0 + 1a_2 = 0 \end{cases}$ eq. di $W^\perp$ $\xrightarrow{\text{soluz}}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

NB in $\mathbb{P}^2(K)$ retta $\xrightarrow{\text{dualità}}$ pto

eq. retta $\longrightarrow$ coord pto

2 punti della retta $\longrightarrow$ eq. cartes. del punto

Ad es. $W = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \leq K^3$ W come punto di $\mathbb{P}^2(K)$

eq. $\begin{cases} 3x_0 + x_1 = 0 \\ 2x_0 + x_2 = 0 \end{cases}$

$W^\perp$ .... eq $-x_0 + 3x_1 + 2x_2 = 0$ retta passante per $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Principio di dualità proiettiva

Se una affermazione $\mathcal{A}(\leq, \wedge, \vee, \phi_{\mathbb{P}}, \mathbb{P}, \dim_{\mathbb{P}}, \dots)$ è vera in ogni spazio proiettivo di dim n allora l'affermazione duale
$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}(\geq, \vee, \wedge, \mathbb{P}, \phi_{\mathbb{P}}, n - \dim_{\mathbb{P}} - 1, \dots)$ è vera in ogni sp. proiett. di dim n.

Dimostrare: In $\mathbb{P}^2(K)$, $d > 2$ punti sono allineati se e solo se a 2 a 2 generano la stessa retta

$\mathcal{A}$ Traduzione Sia $d > 2$, siano $P_1, \dots, P_d$ punti di $\mathbb{P}^2_K$.
Esiste una retta r in $\mathbb{P}^2_K$ t.c. $P_i \in r$ $\forall i$

$\iff$ $P_i \vee P_j = P_h \vee P_k$ $\forall h \neq k, i \neq j$

$\mathcal{A}^*$ Affermazione duale Sia $d > 2$, siano $p_1, \dots, p_d$ rette in $\mathbb{P}^2_K$.
Esiste un punto R in $\mathbb{P}^2_K$ t.c. $p_i \ni R$ $\forall i$

$$\iff \quad p_i \wedge p_j = p_h \wedge p_k \quad \forall\, h \neq k \ \text{ e } \ i \neq j$$

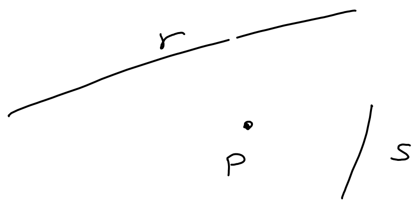
Dimostriamo A: evidente.

<u>Esercizio</u>: Dimostrare (e scrivere l'affermazione duale):
Date due rette sghembe in $\mathbb{P}^3(k)$ e un punto esterno ad esse esiste una unica retta per quel punto e incidente le due rette date.

A <u>Traduco</u>: Siano r, s rette in $\mathbb{P}^3(k)$, $r \wedge s = \emptyset$ e ($r \vee s = \mathbb{P}^3$)
Sia P punto $P \notin r$ e $P \notin s$.
Esiste unica t retta in $\mathbb{P}^3$ con $P \in t$ e
$t \wedge r \neq \emptyset$ e $t \wedge s \neq \emptyset$

(A^*: Siano r, s rette in $\mathbb{P}^3(k)$, $r \vee s = \mathbb{P}^3$ (e $r \wedge s = \emptyset$)
Sia π piano con $\pi \not\supseteq r$ $\pi \not\supseteq s$
Esiste unica retta t in $\mathbb{P}^3$ con $\pi \supseteq t$ e
$\underbrace{t \vee r \neq \mathbb{P}}_{\Leftrightarrow\, t \wedge r \neq \emptyset}$ $\underbrace{t \vee s \neq \mathbb{P}}_{t \wedge s \neq \emptyset}$)

Dimostro A:



$(r \vee P)$ piano in $\mathbb{P}^3$ $\qquad$ $\underbrace{s \vee P}$ piano in $\mathbb{P}^3$

$$\underset{2}{\dim (r \vee P)} = \underset{1}{\dim r} + \underbrace{\underset{0}{\dim P} - \underbrace{\dim r \wedge P}_{-1}}_{1}$$

$t := (r \vee P) \wedge (s \vee P)$ $\qquad$ $\underset{1}{\dim t} = \underbrace{\dim (r \vee P)}_{2} + \underbrace{\dim (s \vee P)}_{2} - \underbrace{\dim (r \vee P \vee s)}_{3}$

è retta

$$\underset{0}{\dim (t \wedge r)} = \underset{1}{\dim t} + \underset{1}{\dim r} - \underset{2}{\dim (t \vee r)}$$

NB $t \vee r \subseteq \underbrace{r \vee P}_{\text{piano proiettivo}}$ $\qquad$ t, r sono rette complanari non coincidenti $P \in t, P \notin r$
$\implies t \wedge r$ è un punto del piano proiett. $r \vee P$

$$t \vee r = r \vee P$$

in particolare $t \wedge r \neq \emptyset$

Analogamente $t \wedge s \neq \emptyset$

<u>Esercizio</u> In $\mathbb{P}^4$: dati un piano π e una retta r sghembi e un punto $P \notin \pi$, $P \notin r$. Allora esiste unica retta t con $P \in t$ e t.c. $t \wedge \pi \neq \emptyset$ e $t \wedge r \neq \emptyset$

Dimostrare e dualizzare.