RECAP :

controllo ottimo LQ di sistemi a tempo continuo : caso a orizzonte finito $t \in [0, T]$

① modello del sistema : (F, G, H, J)

② funzionale costo : $J_T(t) \sim f(Q, R, S)$

(F, G) stabilizzabile
(F, H) rivelabile , $Q = H^T H$

$$u_T^*(t) = \underset{t \in [0,T]}{\operatorname{argmin}} J_T(t) = -K_T^*(t)\, x(t)$$

con $K_T^*(t) = R^{-1} G M_T(t)$

dove $M_T(t)$ unica soluzione sdp di EDR

↳ matrice hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} F & -G^T R^{-1} G \\ -Q & -F^T \end{bmatrix}$$

controllo ottimo LQ di sistemi a tempo continuo : caso a orizzonte infinito

$t \in [0, +\infty)$

① modello del sistema da controllo

$$\dot{x}(t) = F x(t) + G u(t) \qquad x \in \mathbb{R}^n, \; u \in \mathbb{R}^m$$
$$x(0) = x_0$$

② funzionale costo da ottimizzare

$$J_\infty(t) = \int_0^\infty x^T(t) Q x(t) + u(t)^T R u(t) \, dt \qquad \begin{array}{ll} Q \in \mathbb{R}^{n \times n} & \text{sdp} \\ R \in \mathbb{R}^{m \times m} & \text{dp} \end{array}$$

$$\boxed{u^*_\infty(t) = \underset{t \in [0, +\infty)}{\operatorname{argmin}} \; J_\infty(t)}$$

$u^*_T(t) = R^{-1} G^T M_T(t)$ allora $u^*_\infty(t) = \lim_{T \to \infty} u^*_T(t) = R^{-1} G^T \boxed{\lim_{T \to \infty} M_T(t)}$

Sia $H \in \mathbb{R}^{p \times n}$ tale che $Q = H^T H$
se (F, G) stabilizzabile e (F, H) rivelabile
allora

1. per ogni scelta della condizione finale $M_T(T) = S$ sdp la soluzione $M_T(t)$ della EDR converge all'unico valore costante finito M_∞ per $T \to +\infty$.

2. M_∞ è l'unica soluzione della EAR : $F^T M + MF - MGR^{-1}G^T M + Q = 0$

esistenza e unicità del limite se e solo se (F, G) stabilizzabile (F, H) rivelabile con $Q = H^T H$

teorema (principale)

Per i sistemi a tempo continuo con (F, G) stabilizzabile e (F, H) rivelabile con $Q = H^T H$, la legge di controllo ottimo su orizzonte infinito è data da

$$u^*_\infty(t) = - K^*_\infty x(t) \qquad \text{con} \qquad K^*_\infty = R^{-1} G^T M_\infty$$

dove $M_\infty = M_\infty^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è l'unica soluzione sdp dell' EAR

$$F^T M + MF - MGR^{-1}G^T M + Q = 0$$

in corrispondenza all'ingresso $u^*_\infty(t)$, il funzionale costo assume il valore

$$J^*_\infty = x_0^T M_\infty x_0$$

Dimostrazione

① $M = M^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ qualsiasi

② $H(t) = \int_0^T \frac{d}{dt} \left(x(t)^T M x(t) \right) dt$ funzione ausiliarie

$H(t)$

1. regole fondamentale del calcolo integrale

$$H(t) = \int_0^T \frac{d}{dt}\left(x(t)^T M x(t)\right) dt = x(t)^T M x(t)\Big|_0^T$$
$$= x(T)^T M x(T) - x(0)^T M x(0)$$

2. regole del calcolo differenziale + equazioni della dinamica

$$H(t) = \int_0^T \frac{d}{dt}\left(x(t)^T M x(t)\right) dt = \int_0^T \dot{x}(t)^T M x(t) + x(t)^T M \dot{x}(t)\ dt$$
$$= \int_0^T \left(Fx(t) + Gu(t)\right)^T M x(t) + x(t)^T M \left(Fx(t) + Gu(t)\right) dt$$
$$= \int_0^T x(t)^T F^T M x(t) + u(t)^T G^T M x(t) + x(t)^T M F x(t) + x^T(t) M G u(t)\ dt$$
$$= \int_0^T \begin{bmatrix} u(t)^T & x^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & G^T M \\ MG & F^T M + MF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ x(t) \end{bmatrix} dt$$

$$x(T)^T M x(T) - x(0)^T M x(0) = \int_0^T \begin{bmatrix} u(t)^T & x(t)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & G^T M \\ MG & F^T M + MF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ x(t) \end{bmatrix} dt$$

$$\longrightarrow\ H'(t) = x(0)^T M x(0) - x(T)^T M x(T) + \int_0^T \cdots\ dt = 0$$

(3) $$J_T(t) = \int_0^T x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)\ dt$$

$S = 0$
Q sdp
R dp

$$= \int_0^T \left[u(t)^T \,\vdots\, x(t)^T\right] \underbrace{\begin{bmatrix} \overset{m\times m}{R} & 0 \\ 0 & \underset{n\times n}{Q} \end{bmatrix}}_{(n+m)\times(n+m)} \begin{bmatrix} u(t) \\ x(t) \end{bmatrix} dt$$

$$\longrightarrow\ J_T(t) = J_T(t) + H'(t)$$
$$= x(0)^T M x(0) - x(T)^T M x(T) + \int_0^T \begin{bmatrix} u^T(t) & x^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & G^T M \\ MG & F^T M + MF + Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ x(t) \end{bmatrix} dt$$

Sia $M = M_\infty$ soluzione dell'EAR

$$J_T(t) = \underbrace{x(0)^T M_\infty x(0)}_{\geq 0} - \underbrace{x(T)^T M_\infty x(T)}_{\geq 0} + \int_0^T \begin{bmatrix} u^T(t) & x^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & G^T M_\infty \\ M_\infty G & -M_\infty G R^{-1} G^T M_\infty \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ x(t) \end{bmatrix} dt$$
$$= x(0)^T M_\infty x(0) - x(T)^T M_\infty x(t) + \int_0^T \begin{bmatrix} u^T(t) & x^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ M_\infty G \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} R & G^T M_\infty \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ x(t) \end{bmatrix} dt$$

$$v(t) = Ru + G^T M_\infty x(t) = \begin{bmatrix} R & G^T M_\infty \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$$

$$J_T(t) = x(0)^T M_\infty x(0) - x(T)^T M_\infty x(T) + \underbrace{\int_0^T v(t)^T R^{-1} v(t)\, dt}_{\substack{= 0 \text{ se e solo se } v(t) = 0 \\ \text{poiché } R \text{ è dp}}}$$

$$v(t) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad u(t) = R^{-1} G^T M_\infty x(t) = u^*(t)$$

$$J_T(t) = \boxed{J_T(u^*(t))} = x(0)^T M_\infty x(0) - x(T)^T M_\infty x(T)$$

•) $J_T(u^*(t)) \geq J_T(u^*_T(t)) = x(0)^T M_T(0)\, x(0)$

•) $J_T(u^*(t)) \leq x(0)^T M_\infty x(0)$

$$x(0)^T M_T(0)\, x(0) \leq J_T(u^*(t)) \leq x(0)^T M_\infty x(0)$$

teorema del confronto

$$\lim_{T \to \infty} \left(x(0)^T M_T(0)\, x(0) \right) \leq \lim_{T \to \infty} J_T(u^*(t)) \leq \lim_{T \to \infty} x(0)^T M_\infty x(0)$$

$$x(0)^T \left(\lim_{T \to \infty} M_T(0) \right) x(0) = x(0)^T M_\infty x(0) \leq J_\infty(u^*(t)) \leq x(0)^T M_\infty x(0)$$

$$J_\infty(u^*(t)) = x(0)^T M_\infty x(0) = J^*_\infty$$

$$u^*(t) = \underset{t \in [0, +\infty)}{\arg\min}\, J_\infty(t) = u^*_\infty(t)$$

Ab absurdo

$\exists\, u'(t) \neq u^*_\infty(t)$ tale che $J_\infty(u'(t)) < J_\infty(u^*_\infty(t)) \qquad t \in [0, +\infty)$

allora

$$u^*_\infty(t) = -\left(R^{-1} G^T M_\infty \right) x(t) = \lim_{T \to \infty} - R^{-1} G^T M_T(t)\, x(t)$$

$$\lim_{T \to +\infty} J_T(u'(t)) < \lim_{T \to +\infty} J_T\left(-R^{-1} G^T M_T(t)\, x(t) \right)$$

teorema permanenza del segno

$\exists\, T'$ tale che $J_T(u'(t)) < J_T\left(-R^{-1} G^T M_T(t)\, x(t) \right) = J_T(u^*_T(t)) = J^*_T$

assurdo!

$\boxtimes$

1. se (F, H) non rivelabile
   allora esiste $\lambda \in \Lambda(F)$, $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ tale che $Fv = \lambda v$ con $v \neq 0$ & $Hv = 0$

2. se $Q = H^T H$
   allora (F, H) rivelabile $\longleftrightarrow$ (F, Q) rivelabile

$$Hv = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \| Hv \|^2 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad v^T H^T H v = 0 \quad \longleftrightarrow \quad H^T H v = 0$$

$$\updownarrow$$

$$Qv = 0$$

(F, H) non rivelabile $\longleftrightarrow$ (F, Q) non rivelabile esempio - caso scalare

1) modello di sistema

$\dot{x}(t) = f\,x(t) + g\,u(t)$

$x(0) = x_0$

$u(t) = -K\,x(t)$

$\begin{cases} f < 0 & \text{asint. stabile} \\ f = 0 & \text{stabile} \\ f > 0 & \text{instabile} \end{cases}$

$g \neq 0$

(f, h) rivelabile $\longleftrightarrow$ (f, q) rivelabile, $q = h^2$ $\longleftrightarrow$ $(f, \sqrt{q})$ rivelabile, $\sqrt{q} = h$

se $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sdp allora $\exists\ T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile tale che $Q = TDT^{-1}$ con $D = \mathrm{diag}\{\lambda \in \Lambda(Q)\}$

$\longrightarrow Q = Q^{1/2} Q^{1/2}$ dove $Q^{1/2} = T D^{1/2} T^{-1}$ simmetrica e sdp

(F, Q) rivelabile $\longleftrightarrow$ $(F, Q^{1/2})$ rivelabile

2, funzionale costo : $J_\infty = \int_0^\infty q x^2(t) + r u^2(t)\, dt$ $\quad q \geq 0,\ r > 0$

(f, g) stabilizzabile quando $g \neq 0$: $a = f + gK < 0$

$(f, \sqrt{q})$ rivelabile quando $\sqrt{q} = h \neq 0$: $b = f + \ell h < 0$

se $f < 0$ e
$g = 0 \rightarrow a < 0$
$h = 0 \rightarrow b < 0$
ok!

① $f < 0, \sqrt{q} \geq 0$: (f, g) stabilizzabile, (f, q) rivelabile

② $f \geq 0, \sqrt{q} > 0$: (f, g) stabilizzabile, (f, q) rivelabile

(*)

③ $f \geq 0, \sqrt{q} = 0$: (f, g) stabilizzabile, (f, q) non rivelabile — non posso applicare il teorema

(*) applico il teorema

$u_\infty^*(t) = -K_\infty^* x(t)$ con $K_\infty^* = \frac{g}{r} \cdot m_\infty$

dove m_∞ è soluzione di

$$fm + mf - m^2 \frac{g^2}{r} + q = 0$$

$$\frac{g^2}{r} m^2 - 2f \cdot m - q = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$m^+ = \frac{fr}{g^2} + \sqrt{\frac{f^2 r^2}{g^4} + \frac{rq}{g^2}}$$

$$m^- = \frac{fr}{g^2} - \sqrt{\frac{f^2 r^2}{g^4} + \frac{rq}{g^2}}$$

caso ① $m_\infty = m^+ \geq 0$ sdp

caso ② $m_\infty = m^+ > 0$ dp

$$k_\infty^* = \frac{g}{r} \cdot m^+ = \frac{g}{r}\left(\frac{fr}{g^2} + \sqrt{\frac{f^2 r^2}{g^4} + \frac{rq}{g^2}}\right) = \frac{f}{g} + \frac{g}{r}\sqrt{\frac{r^2}{g^2}\cdot\left(\frac{f^2}{g^2} + \frac{q}{r}\right)} = \frac{f}{g} + \frac{g}{|g|}\sqrt{\frac{f^2}{g^2} + \frac{q}{r}}$$

dinamica del sistema controllato

$$\dot{x}(t) = f x(t) + g u_\infty^*(t)$$
$$\overset{!}{=} f x(t) - g k_\infty^* x(t) = (f - g k_\infty^*)\, x(t) = \underbrace{-\left(|g|\sqrt{\frac{f^2}{g^2} + \frac{q}{r}}\right)}_{a} x(t)$$

- $r \longrightarrow 0^+$, $q/r \gg 1$: cheap control

  caso limite $q/r \longrightarrow \infty$

  autovalore del sistema retroazionato : $\lambda = -|g|\sqrt{\frac{f^2}{g^2} + \frac{q}{r}} \longrightarrow -\infty$: sistema asint. stabile

- $r \longrightarrow +\infty$, $q/r \ll 1$: expensive control

  caso limite $q/r \longrightarrow 0$

  $\lambda = -|g|\sqrt{\frac{f^2}{g^2} + \frac{q}{r}} = -|f| < 0$: sistema asint. stabile

☒