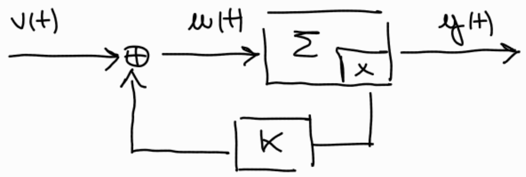
7 CONTROLLO OTTIMO



$u(t) = v(t) + K x(t)$

$K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ⇝ allocazione degli autovalori del sistema retroazione

controllo ottimo : metodo sistematico per il calcolo della matrice di retroazione in base a delle specifiche sul sistema retroazionato in modo da ottimizzare un certo funzionale di costo

▷ problema di ottimo

f : funzione lineare o non lineare
funzionale (= funzione di funzioni, es. integrale di funzione)

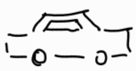
$f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^d$ $\quad$ $d = 1$: caso scalare
$\quad$ $d > 1$: caso vettoriale

$x \in \mathcal{X}$: variabile di ottimizzazione

- massimizzazione : x^* tale che $f(x^*) \geq f(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}$
- minimizzazione : x^* tale che $f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}$

↳ un'unica soluzione
nessuna soluzione
infinite soluzioni
} dipendenza da f e $\mathcal{X}$

	q	tempo di viaggio tv	r	costo di viaggio cv	$J = q \cdot tv + r \cdot cv$			
	1 20 1 5	20 min	1 1 20 10	10 €	$\boxed{30}$	410	220	$\boxed{200}$
	1 20 1 5	75 min	1 1 20 10	0 €	75	1500	$\boxed{75}$	375
	1 20 1 5	30 min	1 1 20 10	5 €	35	605	130	$\boxed{200}$
	1 20 1 5	5 min	1 1 20 10	200€	205	$\boxed{300}$	4005	2025

⟶ la soluzione del problema di ottimo dipende dalla scelta dei coefficienti q e r ingredienti principali di un problema di controllo ottimo

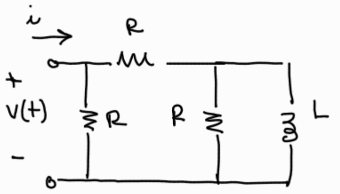
2+1

1. modello del sistema da controllare LTI
   - a tempo continuo
   - a tempo discreto

2. funzionale costo da ottimizzare
   - ottimizzazione su orizzonte finito $t \in [t_0, t_f]$
   - ottimizzazione su orizzonte infinito $t \in [t_0, +\infty)$

3. vincoli sullo stato o sull'ingresso di controllo

esempio : tempo continuo



$i_L(0) = 1\ A$

$R = 1\ \Omega$

$L = 2H$

massimizzare l'energia elettrica nell'intervallo $[0, T]$ agendo sulla tensione in ingresso

1. modello del sistema

$$\begin{cases} i(t) = \dfrac{v(t)}{R} + \dfrac{v(t) - v_L(t)}{R} \\ \dfrac{v(t) - v_L(t)}{R} = \dfrac{v_L(t)}{R} + i_L(t) \\ v_L(t) = L \cdot \dfrac{di_L(t)}{dt} \end{cases} \longrightarrow v_L(t) = \frac{R}{2}\left(\frac{v(t)}{R} - i_L(t)\right)$$

$$\begin{cases} i(t) = \dfrac{2}{R} v(t) - \dfrac{R}{2}\left(\dfrac{v(t)}{R} - i_L(t)\right) = \dfrac{1}{2} i_L(t) + \dfrac{3}{2} v(t) \\ \dfrac{di_L(t)}{dt} = \dfrac{1}{L}\left(\dfrac{R}{2}\left(\dfrac{v(t)}{R} - i_L(t)\right)\right) = -\dfrac{1}{4} i_L(t) + \dfrac{1}{4} v(t) \end{cases}$$

2. funzionale costo

$$E(t) = \int_0^T v(t)\, i(t)\, dt = \int_0^T v(t)\left(\frac{1}{2} i_L(t) + \frac{3}{2} v(t)\right) dt$$

$$= \int_0^T \begin{bmatrix} v(t) & i_L(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} dt$$

$\Rightarrow$ problema di controllo ottimo

$$v^*(t) = \arg\max_{t \in [0,T]} E(t) = \arg\max_{t \in [0,T]} \int_0^T \begin{bmatrix} v(t) & i_L(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} dt$$

esempio : tempo discreto

S : ammontare limitato di €
N : numero limitato di progetti
$r(k) = \frac{3}{2} u(k)$: ricavato del k-esimo progetto cui sono destinati $u(k)$ €

massimizzare il ricavato totale

① modello di sistema

$x(k)$: ammontare residuo per il k-esimo progetto

$$\left.\begin{array}{l} x(1) = S \\ x(N+1) = 0 \end{array}\right\} \text{③ vincoli}$$

$$x(k+1) = x(k) - u(k)$$

② funzionale costo

$$R = \sum_{k=1}^{N} r(k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{3}{2} u(k)$$

$\Rightarrow$ problema di controllo ottimo

$$u^*(k) = \arg\max \sum_{k=1}^{N} \frac{3}{2} u(k)$$

CONTROLLO OTTIMO LQ
L : LINEARE $\longrightarrow$ ① modelli di sistema lineari
Q : QUADRATICO $\longrightarrow$ ② funzionale costo

$\leadsto$ Forma quadratica : polinomio omogeneo di secondo grado in un certo numero di variabili

CONTROLLO OTTIMO LQ di SISTEMI a TEMPO CONTINUO

① modello di sistema da controllare :
sistema lineare a tempo continuo (tempo-invariante)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F x(t) + G u(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x(t) \in \mathbb{R}^n \\ u(t) \in \mathbb{R}^m \end{array}$$

② funzionale costo da ottimizzare :
funzionale quadratico

a) ottimizzazione su orizzonte finito

$t \in [t_0, t_f] \leadsto t \in [0, T]$

$$J_T(t) = \underbrace{x(T)^T S\, x(T)}_{\geq 0} + \int_0^T \underbrace{x(t)^T Q\, x(t)}_{\geq 0} + \underbrace{u(t)^T R\, u(t)}_{> 0} \, dt \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} S \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ Q \in \mathbb{R}^{n \times n} \end{array}\right\} \text{semi definite positive}$$

$$R \in \mathbb{R}^{m \times m} \} \text{ definita positiva}$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- semidefinite positive (sdp) : $A = A^T$ & $x^T A x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
  $\longrightarrow$ autovalori di A sono non negativi (positivi o nulli)
- definite positive (dp) : $A = A^T$ & $x^T A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
  $\longrightarrow$ autovalori di A sono positivi

$u(t)^T R u(t)$: costo del controllo

$x(t)^T Q x(t)$: scostamento dallo stato desiderato

- regolazione : stato desiderato $x^*(t) = x^* \quad \forall t$: $x(t) \longrightarrow 0$
  tipicamente $x^* = 0$
- inseguimento : traiettoria desiderata $x^*(t)$ $\longrightarrow$ $e(t) = x(t) - x^*(t)$
  $e(t) \longrightarrow 0$

$x(T)^T S x(T)$: scostamento dallo stato desiderato al tempo finale

$$\boxed{u_T^*(t) = \arg\min_{t \in [0,T]} J_T(u(t))}$$

b) ottimizzazione a orizzonte infinito
$t \in [0, +\infty)$

$$J_\infty(t) = \int_0^\infty x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) \, dt$$

$Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sdp

$R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ dp

$$\boxed{u_\infty^*(t) = \arg\min_{t \in [0,+\infty)} J_\infty(u(t))}$$

esempio : caso scalare

① modello di sistema

$\dot{x}(t) = f x(t) + g u(t)$

$x(0) = x_0$

$g = 1$

$$\begin{cases} f < 0 & : \text{sist. asintoticamente stabile} \\ f = 0 & : \text{sist. semplicemente stabile} \\ f > 0 & : \text{sist. instabile} \end{cases}$$

$u(t) = -K x(t)$

② funzionale costo

$$J_T(t) = x(T) s x(T) + \int_0^T x(t) q x(t) + u(t) r u(t) \, dt$$

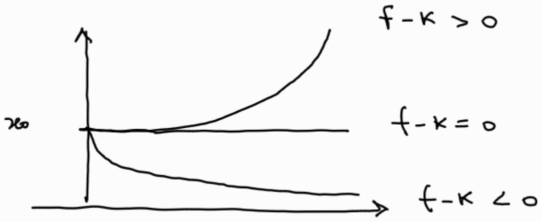
$s = 0$
$q \geq 0, \quad r > 0$

$$= \int_0^T q \cdot x^2(t) + r \cdot u^2(t) \; dt$$

sistema in catena chiusa

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f x(t) + u(t) \\ u(t) &= -k x(t) \end{aligned} \longrightarrow \dot{x}(t) = (f-k)\, x(t)$$

$$\to x(t) = e^{(f-k)t} x_0$$



$$\to u(t) = -k x(t) = -k e^{(f-k)t} x_0$$

$$J_T(t) = \int_0^T q \cdot x^2(t) + r \cdot u^2(t) \; dt$$

$$= \int_0^T q \cdot e^{2(f-k)t} x_0^2 + r k^2 e^{2(f-k)t} x_0^2 \; dt$$

$$= x_0^2 (q + rk^2) \int_0^T e^{2(f-k)t} \; dt$$

$$= \begin{cases} +\infty & f-k \geq 0 \\ x_0^2 (q + rk^2) \dfrac{1}{2(f-k)} e^{2(f-k)t} \Big|_0^T & f-k < 0 \end{cases}$$

$$\int e^x \, dx = \frac{1}{x} \cdot e^x$$

- se $f-k>0$ allore integrale di funzione divergente
- se $f-k=0$ allora integrale di funzione costante

$$= \begin{cases} +\infty & f-k \geq 0 \\ x_0^2 (q + rk^2) \dfrac{1}{2(f-k)} \left(e^{2(f-k)T} - 1 \right) & f-k < 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dk} J_T(t) = \frac{d}{dk} \left(\frac{1}{2(f-k)} \left(e^{2(f-k)T} - 1 \right) \right) = 0$$

fissati x_0, f, T, r, q, allora $k^* = ?$ DIFFICILE!

se $T \to \infty$

$$J_\infty(t) = \begin{cases} +\infty & \text{se } f-k \geq 0 \\ -\dfrac{x_0^2 (q + rk^2)}{2(f-k)} & \text{se } f-k < 0 \end{cases} \longrightarrow k > f$$

$$\frac{d}{dk} J_\infty(t) = \frac{d}{dk} \left(- \frac{x_0^2 (q + rk^2)}{2(f-k)} \right) = x_0^2 \frac{2rk(k-f) - (q + rk^2)}{*} = 0$$

$$\iff k^2 - 2fk - \frac{q}{r} = 0$$

$$K = f \pm \sqrt{f^2 + \frac{q}{r}} \quad \begin{cases} f + \sqrt{f^2 + \frac{q}{r}} > f & \text{accettabile} \\ f - \sqrt{f^2 + \frac{q}{r}} < f & \text{non accettabile} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $K^* = f + \sqrt{f^2 + \frac{q}{r}}$ più facile ma non così tanto

$\boxtimes$