

6 STIMA DELLO STATO

Esercizio 1

Si consideri il sistema lineare autonomo a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) \\ y(t) = \mathbf{h}^\top \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \text{con} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}^\top = [0 \quad 1 \quad 0].$$

Si costruisca, se possibile, uno stimatore dello stato in modo che l'errore di stima converga a zero come combinazione lineare dei modi $e^{-t} \sin(t)$, $e^{-t} \cos(t)$, e e^{-t} .

Soluzione

Il sistema è osservabile per cui lo stimatore richiesto esiste. Il guadagno dello stimatore è $\mathbf{l} = [-4 \quad -5 \quad -5]^\top$.

Esercizio 2

Si consideri il sistema lineare autonomo a tempo discreto

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) \\ y(t) = \mathbf{h}^\top \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \text{con} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}^\top = [1 \quad 0 \quad 1].$$

Si porti il sistema in forma standard di osservabilità e si determini, se esiste, uno stimatore dead-beat dello stato del sistema.

Soluzione

Usando il cambio base (non unico) $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ applicato al sistema duale $(\mathbf{F}^\top, \mathbf{h})$ si ottiene la forma canonica di osservabilità (non unica)

$$\mathbf{F}' = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}' = [1 \quad 0 \quad 0].$$

I guadagni dello stimatore $\mathbf{l} = [\alpha \quad \frac{1}{2} - \alpha \quad -\alpha]^\top$, $\alpha \in \mathbb{R}$, posizionano tutti gli autovalori in zero.

Esercizio 3

Si consideri il sistema lineare autonomo a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) \\ y(t) = \mathbf{h}^\top \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \text{con} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}^\top = [0 \quad 1 \quad 0].$$

Si costruisca, se possibile, uno stimatore dello stato in modo che l'errore di stima converga a zero come combinazione lineare dei modi e^{-t} , te^{-t} .

Soluzione

Il sistema non è osservabile, ma il sottosistema non osservabile ha un autovalore in -1 per cui il problema ha soluzione. Il guadagno dello stimatore desiderato è $\mathbf{l} = [-9 \quad -6 \quad 0]^T$.

Esercizio 4

Si consideri il sistema lineare autonomo a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) \\ y(t) = \mathbf{h}^T \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \text{con} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}^T = [0 \quad 1 \quad 0], \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si discuta la rivelabilità del sistema al variare di α . Per $\alpha = -1$ si costruisca, se possibile, uno stimatore dello stato il cui guadagno \mathbf{l} allочи gli autovalori di $\mathbf{F} + \mathbf{l}\mathbf{h}^T$ in $-1, -2, -3$.

Soluzione

Il sistema è rivelabile se e solo se $\alpha < 0$. Lo stimatore richiesto esiste e ha guadagno $\mathbf{l} = [0 \quad -7 \quad -12]^T$.

Esercizio 5

Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t) \\ y(t) = \mathbf{h}^T \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \text{con} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}^T = [0 \quad 0 \quad 1].$$

Si costruisca, se esiste, un regolatore dead-beat per il sistema.

Soluzione

Il sistema è controllabile e ricostruibile, per cui un regolatore dead-beat esiste. Il regolatore richiesto ha guadagno dello stimatore $\mathbf{l} = [0 \quad 0 \quad -1]^T$ e vettore di retroazione $\mathbf{k} = [-\frac{1}{2} \quad k_2 \quad k_3]^T$ con $k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ qualsiasi.

Esercizio 6

Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t) \\ y(t) = \mathbf{h}^T \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \text{con} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}^T = [0 \quad 1 \quad 2].$$

Si costruisca, se esiste, un regolatore dead-beat per il sistema. Se esiste più di una matrice di retroazione, si calcoli quella che manda a zero lo stato del sistema retroazionato nel numero minimo di passi.

Soluzione

Il sistema è controllabile e ricostruibile, per cui un regolatore dead-beat esiste. Il regolatore richiesto ha guadagno dello stimatore $\mathbf{l} = [-3 \quad -4 \quad -3]^T$ e vettore di retroazione $\mathbf{k} = [2 \quad -3 \quad 0]^T$.

Esercizio 7

Si consideri il sistema lineare a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t) \\ y(t) = \mathbf{h}^\top \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \text{con} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}^\top = [1 \ 0 \ 1].$$

Si determini, se possibile, un regolatore per il sistema che abbia modi del sistema retroazionato e^{-t} , te^{-t} , $\frac{t^2}{2}$ e e^{-t} e un errore di stima che tende a zero come combinazione lineare dei modi $e^{-\frac{1}{2}t}$, e^{-t} , $e^{-\frac{3}{2}t}$.

Soluzione

Il sistema è raggiungibile e osservabile per cui il regolatore richiesto esiste. Il regolatore richiesto ha guadagno dello stimatore $\mathbf{l} = \left[-\frac{7}{2} \quad -\frac{19}{4} \quad -\frac{3}{2}\right]^\top$ e vettore di retroazione $\mathbf{k} = [-1 \quad -3 \quad -1]^\top$.