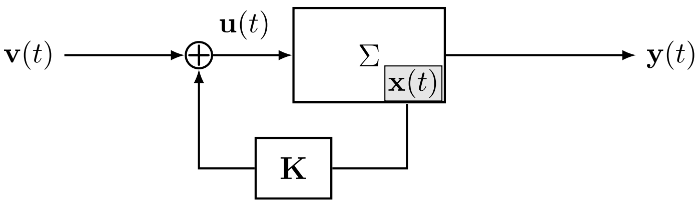
6 STIMA DELLO STATO

Dato il sistema Σ controllato tramite retroazione statica dallo stato



$$\Sigma: \quad \begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{H}\mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$$

problema di stima: nel caso in cui lo stato $\mathbf{x}(t)$ non sia direttamente accessibile o misurabile, costruire una "buona" stima $\hat{\mathbf{x}}(t)$ di $\mathbf{x}(t)$ a partire da dati ingresso/uscita e dalla conoscenza del modello

soluzioni di stima

- **stimatore ad anello aperto**

$$\boxed{\hat{\Sigma}: \quad \begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t+1) &= \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) &= \hat{\mathbf{x}}(t) \end{aligned}}$$

sia $\mathbf{e}(t) \triangleq \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$: errore di stima
allora $\mathbf{e}(t+1) = \mathbf{x}(t+1) - \hat{\mathbf{x}}(t+1) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{F}\mathbf{e}(t)$
$\Rightarrow \mathbf{e}(t) \xrightarrow{t\to\infty} \infty$ se $\mathbf{F}$ è instabile

- **stimatore ad anello chiuso**

$$\boxed{\hat{\Sigma}: \quad \begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t+1) &= \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) - \mathbf{L}(\mathbf{y}(t) - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}(t)) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) &= \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{L} &\in \mathbb{R}^{n\times p}: \text{ guadagno dello stimatore} \end{aligned}}$$

sia $\mathbf{e}(t) \triangleq \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$: errore di stima
allora $\mathbf{e}(t+1) = \mathbf{x}(t+1) - \hat{\mathbf{x}}(t+1) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) + \mathbf{L}\mathbf{H}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) = (\mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{H})\mathbf{e}(t)$
$\Rightarrow \mathbf{e}(t) \xrightarrow{t\to\infty} \mathbf{0}$ se $\mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{H}$ è asintoticamente stabile (e in questo caso $\mathbf{F}$ può anche essere instabile)

si osserva che

- Se il sistema è osservabile allora è sempre possibile calcolare un guadagno $\mathbf{L}$ in grado di rendere $\mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{H}$ asintoticamente stabile. Per il calcolo di $\mathbf{L}$ si possono usare gli stessi metodi *allocazione degli autovalori* visti per il controllo in retroazione.
- Se tutti gli autovalori di $\mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{H}$ vengono allocati in zero l'errore di stima converge a zero in tempo finito. Lo stimatore in questo caso viene detto *stimatore dead-beat*.
- Gli stimatori visti sono detti di stimatori di ordine intero perché stimano l'intero stato $\mathbf{x}(t)$. In certi casi, è possibile costruire stimatori di ordine ridotto che stimano solo la parte "veramente incognita" dello stato.
- Tutto quello che abbiamo visto si applica anche a sistemi a tempo continuo (unica eccezione: a tempo continuo non ha senso parlare di stimatori dead-beat).

esempio

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

costruire, se esiste, uno stimatore dead-beat dello stato del sistema

- esistenza di $\mathbf{l}^*$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^\top \\ \mathbf{F}\mathbf{h}^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \to \text{rank}(\mathcal{O}) = 2 \quad \to \Sigma = (\mathbf{F}, \mathbf{h})\text{osservabile} \quad \Rightarrow \mathbf{l}^*\text{esiste}$$

- calcolo di $\mathbf{l}^* = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}^\top$

$$\Delta_{\mathbf{F}+\mathbf{l}\mathbf{h}^\top}(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{F} - \mathbf{l}\mathbf{h}^\top) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - l_1 & -1 - l_1 \\ -l_2 & \lambda - 1 - l_2 \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + \lambda(-1 - l_1 - l_2) + (l_1 - l_2)$$

$$= p(\lambda) = \lambda^2$$

$$\to \begin{cases} -1 - l_1 - l_2 = 0 \\ l_1 - l_2 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \mathbf{l}^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

⊠

6.1 Rivelabilità dei sistemi lineari

rivelabilità

- un sistema Σ si dice **rivelabile** se esiste uno stimatore dello stato ad anello chiuso il cui errore di stima tende asintoticamente a zero

sistemi a tempo discreto

$$\Sigma \;:\; \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t)$$

Teorema Per un sistema a tempo discreto Σ, le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è rivelabile.
2. Il sistema duale Σ_d è stabilizzabile.
3. Esiste $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ tale che $\mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{H}$ ha autovalori con modulo strettamente minore di 1.
4. Il sottosistema non osservabile di Σ ha autovalori con modulo strettamente minore di 1.
5. La matrice PBH di osservabilità $\begin{bmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{F} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}$ ha rango n, $\forall z$ con $|z| \geq 1$.

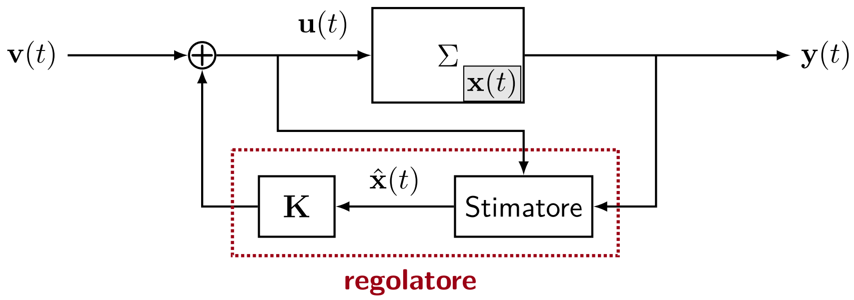
sistemi a tempo continuo

$$\Sigma \;:\; \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t)$$

Teorema Per un sistema a tempo continuo Σ, le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è rivelabile.
2. Il sistema duale Σ_d è stabilizzabile.
3. Esiste $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ tale che $\mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{H}$ ha autovalori con parte reale strettamente negativa.
4. Il sottosistema non osservabile di Σ ha autovalori con parte reale strettamente negativa.
5. La matrice PBH di osservabilità $\begin{bmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{F} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}$ ha rango n, $\forall z$ con $\Re[z] \geq 0$.

6.2 Sintesi del regolatore



stimatore dello stato + controllo in retroazione dallo stato

equazioni dinamiche del regolatore

sistema Σ : $\quad \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t)$

$\quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t)$

legge di controllo: $\quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{v}(t)$

stimatore dello stato: $\quad \hat{\mathbf{x}}(t+1) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) - \mathbf{L}(\mathbf{y}(t) - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}(t))$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t+1) \\ \hat{\mathbf{x}}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{G}\mathbf{K} \\ -\mathbf{L}\mathbf{H} & \mathbf{F}+\mathbf{G}\mathbf{K}+\mathbf{L}\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} \mathbf{v}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix}$$

regolatori stabilizzanti

- un regolatore si dice *stabilizzante* se il sistema regolato è asintoticamente stabile
- un regolatore si dice *dead-beat* se l'evoluzione dello stato del sistema regolato va a zero in un numero finito di passi

sia $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$: matrice di cambio di base $\rightarrow \mathbf{z}(t) = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}$

allora

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t+1) \\ \mathbf{e}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}+\mathbf{G}\mathbf{K} & -\mathbf{G}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}+\mathbf{L}\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{v}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \text{autovalori di} \begin{bmatrix} \mathbf{F}+\mathbf{G}\mathbf{K} & -\mathbf{G}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}+\mathbf{L}\mathbf{H} \end{bmatrix} \right\} = \{\text{autovalori di } \mathbf{F}+\mathbf{G}\mathbf{K} \cup \text{ autovalori di } \mathbf{F}+\mathbf{L}\mathbf{H}\}$$

Proposizione (**principio di separazione**)
Gli autovalori della matrice di stato del sistema regolato sono dati dall'unione degli autovalori di $\mathbf{F} + \mathbf{GK}$ e di $\mathbf{F} + \mathbf{LH}$. Quindi la sintesi del controllo in retroazione (allocazione degli autovalori di $\mathbf{F} + \mathbf{GK}$) e dello stimatore (allocazione degli autovalori di $\mathbf{F} + \mathbf{LH}$) possono essere effettuate in modo indipendente.

Teorema Dato un sistema Σ il sistema ammette un regolatore stabilizzante se e solo se Σ è sia stabilizzabile che rivelabile.

Teorema Dato un sistema Σ il sistema ammette un regolatore dead-beat se e solo se Σ è sia controllabile che ricostruibile.