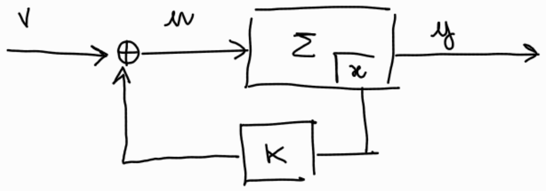
6 STIMA dello STATO



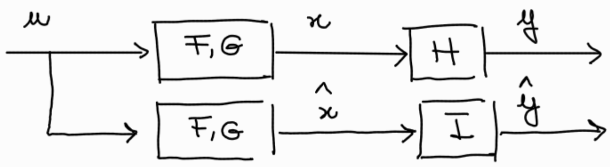
$\Sigma : (F, G, H, J)$

$u(t) = v(t) + Kx(t)$

problema di stima : $x(t)$ non direttamente accessibile o misurabile
$\longrightarrow$ "buona" stima $\hat{x}(t)$ a partire da
- modello di sistema
- misure di ingresso / uscita

Soluzioni di stima

▷ Stimatore ad anello aperto



$$\boxed{\begin{aligned} \hat{x}(t+1) &= F\hat{x}(t) + Gu(t) \\ \hat{y}(t) &= \hat{x}(t) \end{aligned}}$$

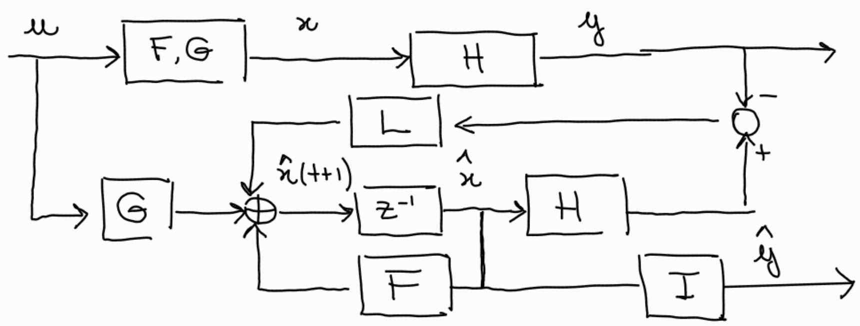
$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$: errore di stima

$$\begin{aligned} e(t+1) &= x(t+1) - \hat{x}(t+1) \\ &\overset{!}{=} Fx(t) + Gu(t) - F\hat{x}(t) - Gu(t) \\ &\overset{!}{=} Fx(t) - F\hat{x}(t) \\ &\overset{!}{=} F\,e(t) \end{aligned}$$

$\longrightarrow \quad e(t) = F^t e(0) \overset{!}{=} F^t(x(0) - \hat{x}(0))$

⚠ $e(t) \xrightarrow{t \to \infty} \infty$ se F è instabile

▷ stimatore ad anello chiuso (asintotico dello stato / alla Luenberger)



$$\boxed{\begin{aligned} \hat{x}(t+1) &= F\hat{x}(t) + Gu(t) \\ &\quad + L(H\hat{x}(t) - y(t)) \\ \hat{y}(t) &= \hat{x}(t) \\ L \in \mathbb{R}^{n \times p} &: \text{guadagno dello stimatore} \end{aligned}}$$

$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

$$\begin{aligned} e(t+1) &= x(t+1) - \hat{x}(t+1) \\ &\overset{!}{=} Fx(t) + Gu(t) - F\hat{x}(t) - Gu(t) - L(H\hat{x}(t) - Hx(t)) \\ &\overset{!}{=} Fx(t) - F\hat{x}(t) + LHx(t) - LH\hat{x}(t) \\ &\overset{!}{=} (F + LH)(x(t) - \hat{x}(t)) \\ &\overset{!}{=} (F + LH)\,e(t) \end{aligned}$$

$\longrightarrow \quad e(t) = (F + LH)^t e(0) \overset{!}{=} (F + LH)^t (x(0) - \hat{x}(0))$

⚠ $e(t) \xrightarrow{t \to \infty} 0$ se $F+LH$ è asintoticamente stabile (anche se F è instabile)

- se (F, H) è osservabile allora è possibile calcolare L in modo da rendere $F+LH$ asintoticamente stabile >> allocazione degli autovalori

- stimatore dead-beat : se Σ è ricostruibile allora è possibile calcolare L in modo che tutti gli autovalori di $F+LH$ siano nulli

esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

stimatore dead-beat dello stato ?

$$L \in \mathbb{R}^{n \times p} \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}^{2 \times 1} = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix}$$

- esistenza

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad : \quad \text{rank}\, \Theta = 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \Sigma \text{ osservabile} \\ \Sigma \text{ ricostruibile} \end{matrix}$$

- calcolo

$$\begin{aligned} \Delta_{F+\ell h^T}(\lambda) &= \det(\lambda I - F - \ell h^T) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda-\ell_1 & -1-\ell_1 \\ -\ell_2 & \lambda-1-\ell_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= (\lambda-\ell_1)(\lambda-1-\ell_2) + \ell_2(-1-\ell_1) \\ &= \lambda^2 + \lambda(-1-\ell_1-\ell_2) + (\ell_1-\ell_2) \quad = \quad p(\lambda) = \lambda^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -1-\ell_1-\ell_2 = 0 \\ \ell_1 - \ell_2 = 0 \end{cases} \qquad \ell^* = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

⊠

RIVELABILITÀ (detectability)

un sistema Σ si dice rivelabile se esiste uno stimatore dello stato ad anello chiuso il cui errore di stima tende asintoticamente a zero (tale che $F+LH$ abbia tutti autovalori stabili)

tempo discreto

$$\Sigma : \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

tempo continuo

$$\Sigma : \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

Σ è rivelabile

se e solo se

- Σ_d è stabilizzabile
- $\exists\, L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che gli autovalori di $F + LH$ hanno modulo strettamente minore di 1
- Σ_{NO} ha autovalori con modulo strettamente minore di 1
- $PBH(z) = \begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix}$ rango pieno n $\forall z$ con $|z| \geq 1$

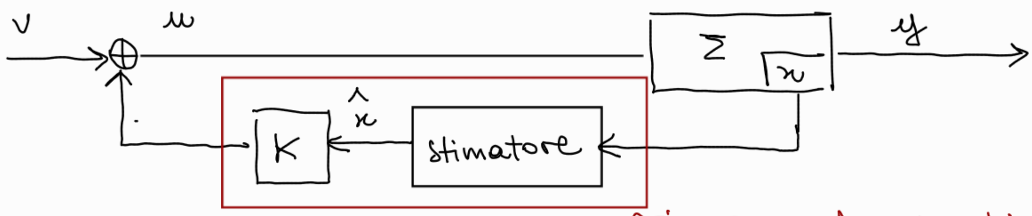
equivalenti

Σ è rivelabile

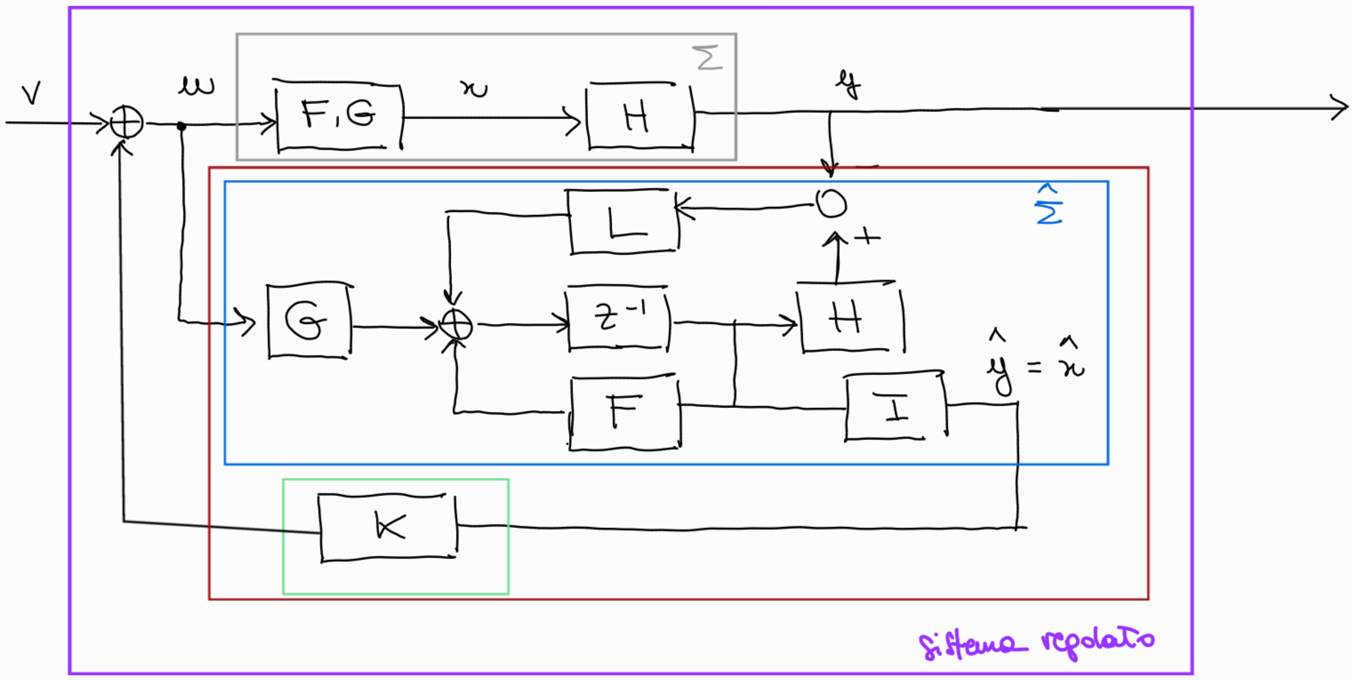
se e solo se

- Σ_d è stabilizzabile
- $\exists\, L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che gli autovalori di $F + LH$ hanno parte reale strettamente negativa
- Σ_{NO} ha autovalori con parte reale strettamente negativa
- $PBH(z) = \begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix}$ rango pieno n $\forall z$ con $\mathrm{Re}[z] \geq 0$

SINTESI del REGOLATORE



REGOLATORE : stimatore ad anello chiuso dello stato + controllore in catena chiusa dallo stato



equazioni dinamiche del sistema regolato

- sistema Σ : $\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$
- controllore : $u(t) = v(t) + K\hat{x}(t)$
- stimatore : $\hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) - L\,(y(t) - H\hat{x}(t))$

$$x(t+1) = Fx(t) + Gv(t) + GK\hat{x}(t)$$
$$\hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gv(t) + GK\hat{x}(t) - L(Hx(t) - H\hat{x}(t))$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} x(t+1) \\ \hat{x}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & GK \\ -LH & F+GK+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} v(t)}$$

$$x_{reg}(t+1) = \underbrace{F_{reg}}_{2n \times 2n} \; x_{reg}(t) + \underbrace{G_{reg}}_{2n \times m} \; v(t)$$

$$\boxed{y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} x_{reg}(t)} = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

$$y_{reg}(t) = \underset{p \times 2n}{H_{reg}} \; x_{reg}(t)$$

REGOLATORE STABILIZZANTE

- un regolatore si dice stabilizzante se il sistema regolato è asintoticamente stabile
- un regolatore si dice dead-beat se l'evoluzione dello stato del sistema regolato va a zero in un numero finito di passi

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \qquad \text{cambio di base}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$$

$$z(t) = T^{-1} x_{reg}(t) = T^{-1} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t) - \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

$$F'_{reg} = T^{-1} F_{reg} T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F & GK \\ -LH & F+GK+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} F & GK \\ F+LH & -F-LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F+GK & -GK \\ 0 & F+LH \end{bmatrix}$$

$$G'_{reg} = T^{-1} G_{reg} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H'_{reg} = H_{reg} T = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ e(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{F+GK} & -GK \\ 0 & \boxed{F+LH} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

autovalori di F'_{reg} = autovalori di $F+GK$ $\cup$ autovalori di $F+LH$

principio di separazione

gli autovalori della matrice di stato del sistema regolato F_{reg} (F'_{reg}) sono dati dall'unione degli autovalori di $F+GK$ e di $F+LH$

$\longrightarrow$ la sintesi del controllore in retroazione e le sintesi dello stimatore ad anello chiuso } sono indipendenti

•) dato un sistema Σ, il sistema ammette

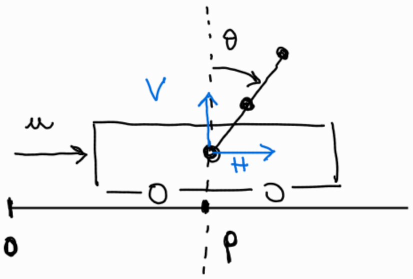
- regolatore stabilizzante se e solo se Σ è stabilizzabile e rivelabile
- regolatore dead-beat se e solo se è Σ è controllabile e ricostruibile

$$W(z) = H'_{reg}\,(zI - F'_{reg})^{-1}\,G'_{reg}$$

$$= \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (zI-F-GK)^{-1} & * \\ 0 & (zI-F-LH)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= H\,(zI-F-GK)^{-1}\,G$$

esercizio : controllo di un pendolo inverso



m : massa asta
ℓ : lunghezza asta
J : inerzia asta

M : massa carrello $\qquad M \gg m$

u : forza di ingresso

•) moto del carrello

$$M\ddot{p}(t) = u(t)$$

•) moto asta

$$H(t) = m\frac{d^2}{dt^2}\left(p(t) + \ell\sin\theta(t)\right)$$

$$V(t) = mg + m\frac{d^2}{dt^2}\left(\ell\cos\theta(t)\right)$$

$$J\cdot\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = V(t)\cdot\ell\sin\theta(t) - H(t)\cdot\ell\cos\theta(t)$$

$$(J+m\ell^2)\ddot{\theta}(t) - mg\ell\sin\theta(t) + m\ell\cos\theta(t)\,\ddot{p}(t) = 0$$

$$(J+m\ell^2)\ddot{\theta}(t) - mg\ell\sin\theta(t) + \frac{m\ell}{M}\cos\theta(t)\cdot u(t) = 0$$

$x_1(t) = \theta(t)$
$x_2(t) = \dot{\theta}(t)$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), u(t))$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{mg\ell}{J+m\ell^2}\sin x_1(t) - \frac{m\ell}{(J+m\ell^2)M}\cos x_1(t)\cdot u(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), u(t))$$

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{u} = 0$$

$$\delta\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell'} & 0 \end{bmatrix}\delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{M\ell'} \end{bmatrix}\delta u \qquad \ell' = \frac{J+m\ell^2}{m\ell}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \quad : \text{ solo } \theta(t) \text{ è misurabile}$$

$\delta x = x$
$\delta u = u$

$$\Delta_F(\lambda) = \lambda^2 - \frac{g}{\ell'} < \begin{matrix} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{matrix} \quad : \text{ equilibrio instabile}$$

regolatore

(1) controllore rank $R = 2$: $\Delta_{F+gk}(\lambda) = p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ con $\mathrm{Re}[\lambda_i] < 0$

$$k = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - F - gk) = p(\lambda)$$

$$\longrightarrow \quad k = \begin{bmatrix} M(g + \ell' \lambda_1 \lambda_2) & -M\ell'(\lambda_1 + \lambda_2) \end{bmatrix}$$

(2) Stimatore rank $\mathcal{O} = 2$: $\Delta_{F+\ell h}(\lambda) = p(\lambda) = (\lambda + \bar{\alpha})^2$ con $\bar{\alpha} > 0$

$$\ell = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - F - \ell h) = p(\lambda)$$

$$\longrightarrow \quad \ell = \begin{bmatrix} 2\bar{\alpha} \\ -\bar{\alpha}^2 - \frac{g}{\ell'} \end{bmatrix}$$