SEGNALI E SISTEMI
Autovalutazione
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2023-2024)
29 aprile 2024
SOLUZIONI

Esercizio 1 – [punti 7]

Siano dati tre sistemi a tempo continuo identificati dalla relazioni ingresso-uscita

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 2\int_{t-2}^{t+2} x(u)e^{u-t}\,du - x(t+2) \\ y_2(t) &= 1(t-2)\int_{-1}^{t-2} x(u)\cos(t-u)\,du + 3\,x(t-1) \\ y_3(t) &= \int_{t-1}^{2t+1} x(u)\,e^{t-u}\,du - x(t-2) \end{aligned}$$

Si chiede di:

1. Indicare quale tra questi sistemi è lineare tempo-invariante (LTI, un filtro), giustificando opportunamente la risposta.
2. Per il sistema LTI, identificare quindi la risposta impulsiva, dire se è BIBO stabile e/o causale, e calcolare l'uscita con ingresso $x(t) = \mathrm{rect}(t/4)$.

Soluzione. 1) L'unico sistema LTI è il primo, che infatti si può scrivere nella forma

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\cdot 2\,\mathrm{rect}(\tfrac{t-u}{4})\,e^{-(t-u)}\,du - \,x(t+2)$$

in cui la risposta impulsiva risulta essere

$$g_1(t) = 2\,\mathrm{rect}(\tfrac{t}{4})\,e^{-t} - \delta(t+2)$$

Il secondo sistema non è LTI in quanto, sebbene si possa scrivere come una convoluzione, ovvero

$$y_2(t) = 1(t-2)\int_{-\infty}^{\infty} x(u)\,1(u+1)\cdot\cos(t-u)\,1(t-u-2)\,du + 3x(t-1)\ ,$$

il prodotto $x(u)\,1(u+1)$ implica la non tempo-invarianza del sistema. Il terzo sistema, invece, non è tempo invariante a causa della presenza del termine $2t$ nell'integrale.

2) Per il primo sistema, essendo la risposta impulsiva $g_1(t)$ assolutamente integrabile, si ha BIBO stabilità (il delta è sicuramente integrabile, mentre $\mathrm{rect}(\frac{t}{4})\,e^{-t}$ è un segnale ad ampiezza e estensione limitata, e pertanto anch'esso

assolutamente integrabile). Il calcolo dell'uscita si può fare agevolmente sfruttando la convoluzione con la risposta impulsiva, ovvero

$$y_1(t) = g_1 \star x(t) = 2h \star x(t) - x(t+2)\ , \qquad h(t) = \mathrm{rect}(\tfrac{t}{4})\, e^{-t}$$

e pertanto basta calcolare la convoluzione $h \star x$. In questo caso, data l'identica estensione dei segnali in [-2,2], si ha

$$h \star x(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-2}^{t+2} e^{-u} du = e^2 - e^{-(t+2)} & -4 < t < 0 \\ \displaystyle\int_{t-2}^{2} e^{-u} du = e^{2-t} - e^{-2} & 0 < t < 4 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e quindi si ottiene

$$y_1(t) = \begin{cases} 2(e^2 - e^{-(t+2)}) - 1 & -4 < t < 0 \\ 2(e^{2-t} - e^{-2}) & 0 < t < 4 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Esercizio 2 – [punti 7]

Di un segnale $x(t)$ si sa che:

1. è periodico di periodo 2 e coefficienti di Fourier a_k;
2. è reale pari;
3. $\frac{1}{2}\int_0^2 x(t)dt = -1$;
4. $\frac{1}{2}\int_{-1}^1 |x(t)|^2 dt = 11$;
5. $a_k = 0$ per $|k| > 2$
6. i coefficienti di Fourier b_{-2} e b_2 del segnale $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ sono $b_{-2} = -j2\pi$ e $b_2 = j2\pi$

Deterinare i segnali che soddisfano queste proprietà.

Soluzione. La condizione 1) implica che i coefficienti a_k sono associati alla pulsazione base $\omega_0 = 2\pi/2 = \pi$. La condizione 2) implica che i coefficienti di Fourier sono reali ($a_k = a_k^*$) e pari ($a_k = a_{-k}$). Dalla condizione 3) si deduce che $a_0 = -1$. Dalla condizione 5) si ha quindi

$$a_k = \begin{cases} -1 & k = 0 \\ a_1 & k = \pm 1 \\ a_2 & k = \pm 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

con a_1 e a_2 reali. Dalla condizione 6), utilizzando la proprietà della derivata, i coefficienti del segnale derivata $y(t) = x'(t)$ soddisfano la condizione $b_k = a_k \cdot jk\omega_0 = jk\pi\, a_k$, per cui, per $k = 2$, otteniamo $b_2 = j2\pi\, a_2 = j2\pi$, ovvero $a_2 = 1$ (lo stesso risultato si ha per $k = -2$). Il valore a_1 si ottiene sfruttando la condizione 4) ed il teorema di Parseval, ovvero

$$\begin{aligned} P_x = 11 &= |a_{-2}|^2 + |a_{-1}|^2 + |a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2 \\ &= 2|a_1|^2 + 3 \end{aligned}$$

da cui $a_1 = \pm 2$, ovvero

$$a_k = \begin{cases} -1 & k = 0 \\ \pm 2 & k = \pm 1 \\ 1 & k = \pm 2 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Il segnale si può quindi ricostruire tramite serie di Fourier, per ottenere

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-2}^{2} a_k e^{jk\pi t} \\ &= -1 \pm 2(e^{j\pi t} + e^{-j\pi t}) + (e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) \\ &= 1 \pm 4\cos(\pi t) + 2\cos(2\pi t) \end{aligned}$$

Ci sono perciò 2 segnali che soddisfano le condizioni date.

Esercizio 3 – [punti 3]

Il segnale onda quadra

$$x(t) = \text{rep}_3\text{rect}\left(\tfrac{t}{2}\right) \ ,$$

è l'ingresso di un filtro LTI, la cui risposta in frequenza è

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & 0 \le |\omega| \le \pi/3 \\ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} & \pi/3 \le |\omega| \le \pi \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Trovare luscita $y(t)$.

Soluzione. L'onda quadra ha duty cycle $d_0 = \frac{2}{3}$ e pulsazione fondamentale $\omega_0 = \frac{2\pi}{3}$. I coeffcienti di Fourier dell'onda quadra sono pertanto

$$a_k = \tfrac{2}{3}\text{sinc}\left(\tfrac{2}{3}k\right)$$

Dalla proprietà del filtraggio si ha

$$b_k = H(jk\omega_0) \cdot a_k$$

con

$$H(jk\omega_0) = H(jk\tfrac{2\pi}{3}) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} & k = \pm 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

ovvero il filtro lascia passare inalterata la componente constante (corrispondente a $k = 0$), amplifica di un fattore $2\pi/\sqrt{3}$ le prime armoniche ($k = \pm 1$, che hanno pulsazioni $\pm\frac{2\pi}{3}$) ed elimina tutte le altre. Di conseguenza, si ha

$$b_k = \begin{cases} \frac{2}{3} & k = 0 \\ \frac{2}{3}\text{sinc}\left(\frac{2}{3}\right)\frac{2\pi}{\sqrt{3}} = 1 & k = \pm 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Pertanto, utilizzando la serie di Fourier si ottiene

$$y(t) = \frac{2}{3} + e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t} = \frac{2}{3} + 2\cos(\frac{2\pi}{3}t)$$