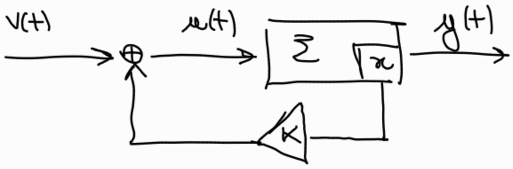
recap :

(4) RETROAZIONE dello STATO

>> controllo in retroazione (closed - loop o feedback) statica dallo stato :
$u(t)$ dipende da $x(t)$ [stesso istante t]



$u(t) = v(t) + Kx(t)$
$K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrice di retroazione
$A = F + GK$

•) esistenza di K ∼ proprietà di raggiungibilità (e controllabilità)
⚠ la retroazione non modifica gli autovalori del sottosistema non raggiungibile

•) calcolo di K ∼ allocazione degli autovalori di A
$$\Delta_A(\lambda) = \underbrace{p(\lambda)}_{\text{monico di grado } n} = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + p_1\lambda + p_0$$

- $m = 1$: singolo ingresso
  $K = [k_1 \dots k_n] \in \mathbb{R}^{1 \times n}$
  ⟶ sistema di equazioni lineari in n incognite (⇒ forma canonica di controllo)

  ▷ controllore dead - beat : $p(\lambda) = \lambda^n$ ⟺ Σ controllabile
  (solo per i sistemi a t.d.)

- $m > 1$: più ingressi
  $$K = \begin{bmatrix} k_{11} & & k_{1n} \\ & & \\ k_{m1} & & k_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$
  ⟶ sistema di equazioni in $m \times n$ incognite
  ⟶ lemma di Heymann :
  $\exists\, M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che $(F + GM, g_i)$ è raggiungibile
  con g_i i-esima colonna non nulla di G
  $$\Rightarrow K = M + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ k_i^T \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{i-esima riga} \quad : \quad \Delta_{F+GM+g_ik_i^T}(\lambda) = p(\lambda)$$

STABILIZZABILITÀ dei SISTEMI : $\exists\, K$ tale che $A = F + GK$ ha autovalori stabili
$$\begin{cases} |\lambda_i| < 1 & \text{t.d.} \\ \mathrm{Re}[\lambda_i] < 0 & \text{t.c.} \end{cases}$$
⇕
autovalori del sottosistema non ragg. sono stabili

$PBH(z) = [zI - F \quad G]$ ha rango pieno $\forall\, z$ con $|z| \geq 1$ t.d. / $\mathrm{Re}[\lambda] \geq 0$ t.c.

5 OSSERVABILITÀ e RICOSTRUIBILITÀ di SISTEMI DINAMICI

osservabilità $\sim$ determinare lo stato iniziale $x_0 = x(t_0)$ a partire da misure di ingresso e uscita in $[t_0, t^*]$

spazio non osservabile : insieme degli stati non osservabili
stati indistinguibili da $x_0 = 0$
stati per cui l'uscita in corrispondenza all'ingresso $u(\cdot)$ è coincidente con quella a partire da $x_0 = 0$

- tempo discreto

$$\Theta_t = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{t-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pt \times n}$$

$x_0 + \ker \Theta_t$: stati indistinguibili da x_0

$X_{NO}(t) = \ker \Theta_t$: stati indistinguibili da $x_0 = 0$

$X_{NO} = \ker \Theta$ con $\Theta = \Theta_n$

Σ osservabile $\longleftrightarrow$ $X_{NO} = \ker \Theta = \{0\}$ $\longleftrightarrow$ $\operatorname{rank} \Theta = n$
$\longleftrightarrow$ $PBH(z) = \begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix}$ rango pieno $\forall z \in \mathbb{C}$

- tempo continuo

$X_{NO} = \ker \Theta$ con $\Theta = \Theta_n$

Σ osservabile $\longleftrightarrow$ $X_{NO} = \ker \Theta = \{0\}$ $\longleftrightarrow$ $\operatorname{rank} \Theta = n$
$\longleftrightarrow$ $PBH(z) = \begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix}$ rango pieno $\forall z \in \mathbb{C}$

RICOSTRUIBILITÀ $\sim$ determinare lo stato finale $x^* = x(t^*)$ a partire da misure di ingresso e uscita in $[t_0, t^*]$

spazio non ricostruibile in $[t_0, t^*]$

- tempo discreto

$X_{NR}(t) = F^{t-1} X_{NO}(t) = \{ F^{t-1} x,\ x \in \ker \Theta_t \}$: spazio non ricostruibile in t passi

$X_{NR} = F^n X_{NO} = \{ F^n x,\ x \in \ker \Theta \}$

$$\Theta_t = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^{t-1} \end{bmatrix} \qquad \Theta = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ \boxed{HF^{n-1}} \end{bmatrix}$$

Σ ricostruibile $\longleftrightarrow$ $X_{NR} = \{0\}$ $\longleftrightarrow$ $\ker \Theta \subseteq \ker F^n$

- tempo continuo

$X_{NR} = e^{Fn} X_{NO} = \{ e^{Fn} x,\ x \in \ker \Theta \}$

Σ ricostruibile $\longleftrightarrow$ Σ osservabile

SISTEMI DUALI

$\Sigma = (F, G, H)$ m ingressi ; p uscite

$\Sigma_d = (F^T, H^T, G^T)$ p ingressi ; m uscite

raggiungibilità $\sim$ osservabilità (forma canonica di osservabilità)

controllabilità $\sim$ ricostruibilità

esercizi

(1) $$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

•) $p(\lambda) = (\lambda+1)^3$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; : \; \text{rank } R = 3 \;\rightarrow\; \Sigma \text{ raggiungibile}$$

$\Rightarrow$ esiste $K = [k_1 \;\; k_2 \;\; k_3]$

$$\Delta_A(\lambda) = \det(\lambda I - F - gK)$$
$$= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}[k_1 \;\; k_2 \;\; k_3]\right)$$
$$= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1-k_1 & \lambda-k_2 & -k_3 \\ -1 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \lambda(\lambda-k_2)(\lambda+1) + (-1-k_1)(\lambda+1) - k_3$$
$$= \lambda^3 + (1-k_2)\lambda^2 + (-1-k_1-k_2)\lambda + (-1-k_1-k_3) = p(\lambda)$$
$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda+1)^3$$

$$\begin{cases} 1-k_2 = 3 \\ -1-k_1-k_2 = 3 \\ -1-k_1-k_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} k_2 = -2 \\ k_1 = -1-3+2 = -2 \\ k_3 = -1-1+2 = 0 \end{cases}$$

$$K = [-2 \;\; -2 \;\; 0]$$

(2) $$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

•) controllore dead-beat

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \; : \; \text{rank } R = 2 \;\rightarrow\; \Sigma \text{ non raggiungibile}$$

F : $$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \det\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{bmatrix} = \lambda\left((\lambda+2)(\lambda+1) - 2\right)$$

$$= \lambda\left(\lambda^2 + 3\lambda + 2 - 2\right)$$
$$= \lambda\left(\lambda^2 + 3\lambda\right)$$
$$= \lambda^2\left(\lambda + 3\right) = 0 \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -3 \end{cases}$$

$$PBH(z) = \left[\, zI - F \quad G \,\right] = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z+2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & z+1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$PBH(-3) = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad : \quad \text{rank } PBH(-3) = 3$$

$\longrightarrow$ Σ controllabile

$$\Delta_A(\lambda) = p(\lambda) = \lambda^3$$

$$K = \left[\, k_1 \quad k_2 \quad k_3 \,\right]$$

$$\Delta_A(\lambda) = \det\left(\lambda I - F - gK\right)$$
$$= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\left[\, k_1 \quad k_2 \quad k_3 \,\right]\right)$$
$$= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & -2 \\ -k_1 & -1-k_2 & \lambda+1-k_3 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \lambda\left(\left(\lambda+2\right)\left(\lambda+1-k_3\right) + 2\left(-1-k_2\right)\right)$$
$$= \lambda\left(\lambda^2 + \left(3-k_3\right)\lambda + \cancel{2} - 2k_3 - \cancel{2} - 2k_2\right)$$
$$= \lambda\,\underbrace{\left(\lambda^2 + \left(3-k_3\right)\lambda - 2\left(k_2+k_3\right)\right)}_{\overset{!}{=}\ \lambda^2} \overset{!}{=} \lambda^3$$

$$\begin{cases} 3 - k_3 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k_3 = 3 \\ k_2 = -3 \end{cases}$$

$$K = \left[\, \alpha \quad -3 \quad 3 \,\right]$$

(3) $$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$
$$y(t) = \left[\, 0 \quad 1 \quad 0 \,\right] x(t)$$

•) osservabilità e rivelabilità

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} h \\ hF \\ hF^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2\alpha & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad : \quad \text{rank } \mathcal{O} = \begin{cases} 3 & \text{se } \alpha \neq 0 \\ 2 & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ Σ osservabile se $\alpha \neq 0$
ricostruibile se $\alpha \neq 0$

(4)
$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix} x(t)$$

•) osservabilità e rivelabilità

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 3 & \alpha-1 \\ 3 & 7 & \alpha-2 \end{bmatrix} \; : \; \det \mathcal{O} = (3\alpha-6)-(7\alpha-7)$$
$$-1\left((\alpha-2)-(3\alpha-3)\right)$$
$$+\alpha(7-9)$$
$$= -4\alpha$$

$\longrightarrow$ Σ osservabile se $\alpha \neq 0$
ricostruibile se $\alpha \neq 0$

se $\alpha = 0$
allora
$$PBH(z) = \begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix} \quad \dots$$

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F)$$
$$= \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & +1 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} =$$
$$= \lambda(\lambda-2)(\lambda-1) - 1(\lambda-1)$$
$$= \lambda(\lambda^2-3\lambda+2) - \lambda + 1$$
$$= \lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda + 1 \qquad \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 1 \pm \sqrt{2} \end{cases} \quad \dots \quad \text{rank}(PBH(1)) = 2$$

(5)
$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

•) osservabilità e ricostruibilità

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; : \; \text{rank}\, \mathcal{O} = 1 \longrightarrow \Sigma \text{ non osservabile}$$

$$\ker \mathcal{O} \overset{?}{\subseteq} \ker F^3$$

$$F^3 = F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\ker F^3 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{matrix} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \right\} = \operatorname{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\ker \Theta = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1 + x_3 = 0 \right\} = \operatorname{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$\longrightarrow$ Σ non ricostruibile

6

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

•) forma standard di osservabilità

$$\Sigma = (F, g, h) \quad : \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_d = (F^T, h^T, g^T) \quad : \quad F_d = F^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad g_d = h^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad h_d = g^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_d = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad : \quad \operatorname{rank} R_d = 2$$

$$\Theta = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ \hline -3 & -3 & 0 \end{array} \right] \quad : \quad \operatorname{rank} \Theta = 2$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$F_d' = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad g_d' = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array} \right] \quad h_d' = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$F' = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad g' = \left[\begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ \hline 1 \end{array} \right] \quad h' = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$