3 RAGGIUNGIBILITÀ E CONTROLLABILITÀ DEI SISTEMI DINAMICI

Esercizio 1

Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t), \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si determinino gli spazi raggiungibili $X_R(t)$, $t = 1, 2, \dots$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Si discuta la raggiungibilità del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione

$$X_R(1) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad X_R(2) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad X_R(k) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \right\}, \quad k \geq 3.$$

Il sistema è raggiungibile (in 3 passi) se e solo se $\alpha \neq 0$.

Esercizio 2

Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si determini se il sistema è raggiungibile e, se possibile, si calcoli l'ingresso a minima energia $\mathbf{u}(t)$ che porti il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ allo stato finale $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ in $k = 1, 2$ passi.

Soluzione

Il sistema è raggiungibile (in 2 passi).

Esiste un solo ingresso che porta il sistema in $\bar{\mathbf{x}}$ in un passo: $\mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

L'ingresso a minima energia che porta il sistema in $\bar{\mathbf{x}}$ in due passi è: $\mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Esercizio 3

Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t), \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Calcolare la forma canonica di raggiungibilità del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e il relativo cambio di base $\mathbf{T}$.

Soluzione

$\mathbf{F}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$, $\mathbf{g}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Cambio di base (non unico): $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Esercizio 4

Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t), \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si determini se il sistema è raggiungibile e controllabile e, se possibile, si calcoli un ingresso $u(t)$ che porti il sistema dallo stato iniziale $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}^\top$ allo stato finale $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$.

Soluzione

Il sistema non è raggiungibile, ma è controllabile (in 2 passi). Il tempo minimo necessario per controllare a zero lo stato iniziale $\mathbf{x}_0$ è $\bar{t} = 2$, e la sequenza di ingresso cercata ha valori $u(0) = -4$, $u(1) = 0$.

Esercizio 5

Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t), \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si determinino gli spazi raggiungibili $X_R(t)$ e controllabili $X_C(t)$ del sistema per $t = 1, 2, \ldots$. Inoltre, si determini se il sistema è raggiungibile e controllabile.

Soluzione

$$X_R(1) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad X_R(k) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad k \geq 2.$$

$$X_C(1) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1/4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad X_C(k) = \mathbb{R}^3, \quad k \geq 2.$$

Il sistema non è raggiungibile, ma è controllabile (in 2 passi).

Esercizio 6

Si consideri il sistema lineare a tempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t), \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si determini lo spazio raggiungibile $X_R(t)$, $t > 0$, e si determini la raggiungibilità del sistema.
Si determinino inoltre gli autovalori del sottosistema non raggiungibile (se esiste).

Soluzione

$$X_R(t) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, t > 0.$$

Il sistema non è raggiungibile.
L'autovalore del sottosistema non raggiungibile è $\lambda = -1$.

Esercizio 7

Si consideri il sistema lineare a tempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t), \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si determini, se esiste, un ingresso $u(\tau)$, $\tau \in [0, 1]$, che porti il sistema dallo stato $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ allo stato $\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$.

Soluzione

Il sistema non è raggiungibile ma è in forma standard di raggiungibilità. La stato iniziale e finale appartengono al sottospazio raggiungibile $X_R = span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. Di conseguenza, l'ingresso esiste.
Per calcolare l'ingresso è necessario considerare il gramiano di raggiungibilità sull'intervallo $[0, t]$ del sottosistema raggiungibile ... $u(\tau) = 6\tau - 2$, $\tau \in [0, 1]$.

Esercizio 8

Si consideri il sistema lineare a tempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t), \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Studiare la raggiungibilità del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Nei casi in cui il sistema non è raggiungibile (se esistono) si calcoli un cambio di base per portare il sistema in forma di canonica di raggiungibilità.

Soluzione

Il sistema è raggiungibile solo per $\alpha \neq 0$. Per $\alpha = 0$, un cambio di base (non unico) che porta il sistema in forma di canonica di raggiungibilità è $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.