RECAP :

⑤ OSSERVABILITÀ e RICOSTRUIBILITÀ

possibilità di determinare

- (osserv.) lo stato iniziale $x_0 = x(t_0)$
- (ricost.) lo stato finale $x^* = x(t^*)$

a partire da misure ingresso / uscite nell' intervallo $[t_0, t^*]$

SISTEMI a TEMPO DISCRETO

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$
$$y(t) = Hx(t)$$

$$y(t) = HF^t x_0 + HR_t u_t$$

▷ OSSERVABILITÀ

- stati indistinguibili da x_0 in t passi : $\boxed{x_0 + \ker \mathcal{O}_t}$

$\rightarrow$ x_0' tali che $y_0'(k) = y_0(k)$ $k = 0 \dots t-1$

$$\begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{t-1} \end{bmatrix} (x_0' - x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\llcorner$ $\mathcal{O}_t \in \mathbb{R}^{pt \times n}$: matrice di osservabilità in t passi

- stati non osservabili in t passi
  stati indistinguibili da $x_0 = 0$ in t passi : $\boxed{\ker \mathcal{O}_t}$

$\|$

X_{NO} : (minimo) SPAZIO non OSSERVABILE $\leftarrow$ $X_{NO}(t)$: SPAZIO NON OSSERVABILE

- sistema completamente osservabile : $\boxed{X_{NO} = \{0\}}$

$\Updownarrow$

$\text{rank}\, \mathcal{O} = n$

▷ RICOSTRUIBILITÀ

- stati non ricostruibili in t passi : $\boxed{F^{t-1} X_{NO}(t)}$
  $\rightarrow$ parte indeterminata dell' evoluzione dello stato dovuta agli stati indistinguibili dallo stato iniziale

$\|$

X_{NR} : (minimo) SPAZIO non RICOSTRUIBILE $\leftarrow$ $X_{NR}(t)$: SPAZIO NON RICOSTRUIBILE

- sistema completamente ricostruibile : $\boxed{X_{NR} = \{0\}}$

$\Updownarrow$

$\ker F^n \supseteq \ker \mathcal{O}$

esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$

$$\Theta = \begin{bmatrix} h^T \\ h^T F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \text{rank } \Theta = 1 < 2$$

$$X_{NO} = \ker \Theta = \underbrace{\text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_2 = 0 \\ \alpha_2 x_2 = 0 \end{matrix} \longrightarrow x_2 = 0$$

$$F^2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 & \alpha_2^2 \end{bmatrix}$$

$\ker \Theta \subseteq \ker F^2$

$$\ker F^2 = \begin{cases} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} & \alpha_1 \neq 0, \ \alpha_2 \neq 0 \quad \times \\ \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -\alpha_1 \end{bmatrix} \right\} & \alpha_1 \neq 0, \ \alpha_2 = 0 \quad \times \\ \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} & \alpha_1 = 0, \ \alpha_2 \neq 0 \quad \checkmark \\ \mathbb{R}^2 & \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad \checkmark \end{cases}$$

Σ ricostruibile se $\alpha_1 = 0$

$$\ker F^2 : \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 & \alpha_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_1^2 x_1 + (\alpha_1 + \alpha_2) x_2 = 0 \\ \alpha_2^2 x_2 = 0 \end{cases}$$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t)$

$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$

$$\Theta = \begin{bmatrix} h^T \\ h^T F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{rank } \Theta = 2 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

$\Longrightarrow$ Σ osservabile & ricostruibile

$\boxtimes$

OSSERVABILITÀ e RICOSTRUIBILITÀ di SISTEMI a TEMPO CONTINUO

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$$
$$y(t) = Hx(t)$$

$$\longrightarrow \; y(t) = He^{Ft}x_0 + \int_0^t He^{F(t-\tau)} G u(\tau)\, d\tau$$

$$y(\tau) = He^{F\tau}x_0 + \int_0^{\tau} He^{F(\tau-s)} G u(s)\, ds \qquad \tau \in [0,t]$$

▷ OSSERVABILITÀ

$X_{NO}(t)$: insieme degli stati indistinguibili da $x_0=0$ in $[0,t]$
spazio non osservabile in $[0,t]$

$\parallel$

X_{NO} : (minimo) spazio non osservabile

completa osservabilità

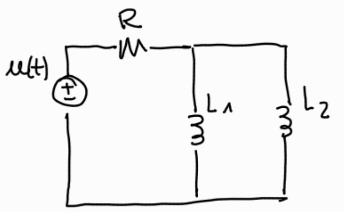
un sistema Σ a tempo continuo si dice completamente osservabile se $\boxed{X_{NO} = \{0\}}$.

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pn \times n} \quad : \text{ matrice di osservabilità}$$

$$\boxed{\Sigma \text{ osservabile}} \longleftrightarrow X_{NO} = \mathrm{Ker}\,\mathcal{O} = \{0\} \longleftrightarrow \mathrm{rank}\,\mathcal{O} = n$$

per ogni $t > 0$

esempio



$x_1(t) = i_{L1}(t)$

$x_2(t) = i_{L2}(t)$

$y(t) = i_R(t) = i_{L1}(t) + i_{L2}(t)$

modello di stato

$V_{L1}(t) = V_{L2}(t) = u(t) - R\, i_R(t)$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -R/L_1 & -R/L_1 \\ -R/L_2 & -R/L_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1/L_1 \\ 1/L_2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

se $L_1 = L_2 = L$ allora $X_{NO} = \left\{ x_0 = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} \neq \{0\}$

altrimenti

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{R}{L_1} - \frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_1} - \frac{R}{L_2} \end{bmatrix} \longrightarrow \mathrm{rank}\,\mathcal{O} = 1$$

$$\det \mathcal{O} = -\frac{R}{L_1} - \frac{R}{L_2} + \frac{R}{L_1} + \frac{R}{L_2} = 0$$

$\Rightarrow \Sigma$ non osservabile

▷ RICOSTRUIBILITÀ

- Stato finale : $x^* = x(t) = e^{Ft} x_0 + \int_0^t e^{F(t-\tau)} G u(\tau) d\tau$
- misure : $\{u(\tau), y(\tau)\}$ $\tau \in [0, t]$

allora

- stati iniziali compatibili con le misure : $x_0 + X_{NO}(t)$
- stati finali compatibili con le misure : $e^{Ft} x_0 + e^{Ft} X_{NO}(t) + \int_0^t e^{F(t-\tau)} G u(\tau) d\tau$

$$= x^* + \boxed{e^{Ft} X_{NO}(t)}$$ parte indeterminata

$X_{NR}(t) = e^{Ft} X_{NO}(t)$: SPAZIO NON RICOSTRUIBILE in $[0, t]$
X_{NR} : (minimo) SPAZIO NON RICOSTRUIBILE

completa ricostruibilità

un sistema Σ a tempo continuo si dice completamente ricostruibile se $\boxed{X_{NR} = \{0\}}$

$X_{NR} = e^{Ft} X_{NO}$

e^{Ft} invertibile allora $X_{NR} = e^{Ft} X_{NO} = \{0\}$

$$e^{-Ft} X_{NR} = e^{-Ft} e^{Ft} X_{NO} = \{0\}$$
$$= X_{NO} = \{0\}$$

$$X_{NR} = \{0\} \longleftrightarrow X_{NO} = \{0\}$$

$$\boxed{\Sigma \text{ ricostruibile} \iff \Sigma \text{ osservabile}}$$

---

	tempo discreto	tempo continuo
osservabilità $\Theta = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pn \times n}$	Σ osservabile $\longleftrightarrow X_{NO} = \ker\Theta = \{0\}$ $\longleftrightarrow \operatorname{rank}\Theta = n$	Σ osservabile $\longleftrightarrow X_{NO} = \ker\Theta = \{0\}$ $\longleftrightarrow \operatorname{rank}\Theta = n$
ricostruibilità	Σ ricostruibile $\longleftrightarrow X_{NR} = \{0\}$ $\longleftrightarrow \ker\Theta \subseteq \ker F^n$ $\longleftarrow \Sigma$ osservabile	Σ ricostruibile $\longleftrightarrow X_{NR} = \{0\}$ $\longleftrightarrow \Sigma$ osservabile

SISTEMI DUALI

sistema $\Sigma = (F, G, H)$

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$
$$y(t) = Hx(t)$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $\boxed{u \in \mathbb{R}^m,\ y \in \mathbb{R}^p}$

sistema duale $\Sigma_d = (F^T, H^T, G^T)$

$$x(t+1) = F^T x(t) + H^T u(t)$$
$$y(t) = G^T x(t)$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $\boxed{u \in \mathbb{R}^p,\ y \in \mathbb{R}^m}$

•) raggiungibilità e controllabilità

– Σ_d : $R_d = \left[H^T \quad F^T H^T \quad \cdots \quad (F^T)^{n-1} H^T \right]$
$= \left[H^T \quad (HF)^T \cdots \quad (HF^{n-1})^T \right] = \mathcal{O}^T$: Σ

Σ_d raggiungibile $\Updownarrow$ Σ osservabile

Σ_d raggiungibile $\longleftrightarrow$ rank $R_d = n$

Σ osservabile $\longleftrightarrow$ rank $\mathcal{O}^T$ = rank $\mathcal{O} = n$

– lemma ① : dati i sottospazi U, V di $\mathbb{R}^n$ tali che $V \subseteq U$
allora $U^\perp \subseteq V^\perp$

$$U^\perp = \{ z \in \mathbb{R}^n \mid z^T u = 0 \quad \forall u \in U \}$$
$$V^\perp = \{ w \in \mathbb{R}^n \mid w^T v = 0 \quad \forall v \in V \}$$

lemma ② : data $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ allora $(\operatorname{im} A)^\perp = \ker A^T$

Σ_d controllabile $\Updownarrow$ Σ ricostruibile

Σ_d controllabile $\longleftrightarrow$ $\operatorname{im}(F^T)^n \subseteq \operatorname{im} R_d$

① $(\operatorname{im} R_d)^\perp \subseteq (\operatorname{im}(F^T)^n)^\perp$

② $\ker R_d^T \subseteq \ker F^n$

Σ ricostruibile $\longleftrightarrow$ $\ker \mathcal{O} \subseteq \ker F^n$

• osservabilità e ricostruibilità

$$\Sigma_d : \quad \mathcal{O}_d = \begin{bmatrix} G^T \\ G^T F^T \\ \vdots \\ G^T (F^T)^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ (FG)^T \\ \vdots \\ (F^{n-1} G)^T \end{bmatrix} = R^T \quad : \quad \Sigma$$

$\boxed{\Sigma_d \text{ osservabile} \iff \Sigma \text{ raggiungibile}}$

Σ_d ricostruibile $\Updownarrow$ Σ controllabile

Σ_d ricostruibile $\longleftrightarrow$ $\ker (F^T)^n \supseteq \ker \mathcal{O}_d$

① $(\ker (F^T)^n)^\perp \subseteq (\ker \mathcal{O}_d)^\perp$

② $\operatorname{im} F^n \subseteq \operatorname{im} \mathcal{O}_d^T$

Σ controllabile $\longleftrightarrow$ $\operatorname{im} F^n \subseteq \operatorname{im} R$

- forma canonica di osservabilità

Σ_d non raggiungibile
$\Sigma_d = (F^T, H^T, G^T)$

$\Updownarrow$

Σ non osservabile
$\Sigma = (F, G, H)$

$\longrightarrow$ forma canonica di raggiungibilità

$$\Sigma_d' = \left(\begin{bmatrix} F_{11}^T & F_{21}^T \\ 0 & F_{22}^T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} H_1^T \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G_1^T & G_2^T \end{bmatrix} \right)$$

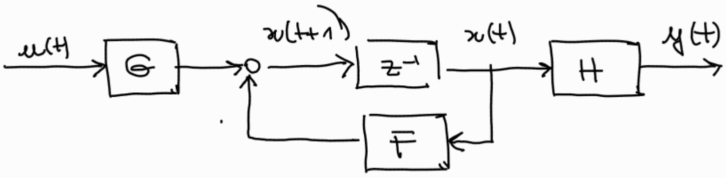
$\longrightarrow$ forma canonica di osservabilità

$$\Sigma' = \left(\begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} H_1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

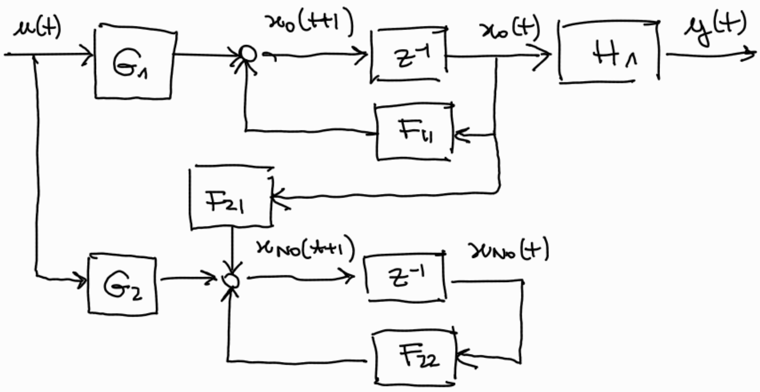
$\Sigma_O = (F_{11}, G_1, H_1)$: sottosistema osservabile

$\Sigma_{NO} = (F_{22}, G_2, 0)$: sottosistema non osservabile

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$
$$y(t) = Hx(t)$$



$$x_O(t+1) = F_{11} x_O(t) + G_1 u(t)$$
$$x_{NO}(t+1) = F_{21} x_O(t) + F_{22} x_{NO}(t) + G_2 u(t)$$
$$y(t) = H_1 x_O(t)$$



- test PBH di osservabilità

Σ_d raggiungibile
$\Sigma_d = (F^T, H^T, G^T)$ $\longleftrightarrow$ $\operatorname{rank} \begin{bmatrix} zI - F^T & H^T \end{bmatrix} = n \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\Updownarrow$

Σ osservabile
$\Sigma = (F, G, H)$ $\longleftrightarrow$ $\operatorname{rank} \begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix} = n \quad \forall z \in \mathbb{C}$

test PBH di osservabilità

- allocazione degli autovalori

Σ_d raggiungibile
$\Sigma_d = (F^T, H^T, G^T)$ $\longleftrightarrow$ $\exists\, K \in \mathbb{R}^{p \times n}$ tale che $F^T + H^T K$ ha autovalori desiderati

$\Uparrow$

$$\Downarrow$$

Σ osservabile $\Sigma = (F, G, H)$ $\longleftrightarrow$ $\exists\, L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che $F + LH$ ha autovalori desiderati

in conclusione

proposizione

il sistema Σ è osservabile se e solo se
1) $\text{rank}\, \Theta = n$
2) il sistema duale Σd è raggiungibile
3) $\text{rank} \begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix} = n \quad \forall z \in \mathbb{C}$
4) gli autovalori di $F + LH$ sono allocabili arbitrariamente tramite $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$

proposizione

il sistema Σ è ricostruibile se e solo se
1) $\ker F^n \supseteq \ker \Theta = X_{NO}$
2) il sistema duale Σd è controllabile
3) $\text{rank} \begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix} = n \quad \forall z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$
4) esiste una matrice $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che $F + LH$ ha tutti autovalori nulli