5 OSSERVABILITÀ E RICOSTRUIBILITÀ DEI SISTEMI DINAMICI

Esercizio 1

Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) \\ y(t) = \mathbf{h}^\top \mathbf{x}(t) \end{cases} \qquad \text{con} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si discuta l'osservabilità del sistema e si determinino gli spazi non osservabili $X_{NO}(t)$ in $t = 1, 2, \ldots$ passi. Inoltre, si discuta la ricostruibilità del sistema e si determinino gli spazi $X_{NR}(t)$ non ricostruibili in $t = 1, 2, \ldots$ passi.

Soluzione

$X_{NO}(1) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $X_{NO}(t) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, per ogni $t \geq 2$.

Poiché $X_{NO} \neq \{0\}$ il sistema non è osservabile.

$X_{NR}(t) = X_{NO}(t)$ per ogni $t \geq 1$. Il sistema non è ricostruibile.

Esercizio 2

Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) \\ y(t) = \mathbf{h}^\top \mathbf{x}(t) \end{cases} \qquad \text{con} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si discuta l'osservabilità e la ricostruibilità del sistema. Inoltre, si determini, se esiste, l'insieme di stati iniziali compatibili con i valori di uscita $y(0) = 1, y(1) = 1, y(2) = 1$.

Soluzione

Il sistema non è osservabile ma è ricostruibile. Non esiste nessuna condizione iniziale compatibile con i valori dell'uscita riportati.

Esercizio 3

Si consideri il sistema lineare a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) \\ y(t) = \mathbf{h}^\top \mathbf{x}(t) \end{cases} \qquad \text{con} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}^\top = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si discuta l'osservabilità del sistema al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione

Il sistema è osservabile se e solo se $\alpha \neq 0$.

Soluzione