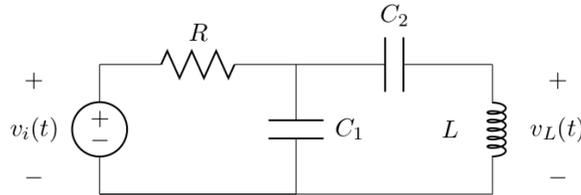


# 1 MODELLIZZAZIONE DI SISTEMI DINAMICI

## Esercizio 1

Si derivi un modello in rappresentazione esterna (equazioni differenziali e funzione di trasferimento) e interna (spazio di stato) per il seguente circuito dove l'ingresso è la tensione del generatore  $v_i(t)$  e l'uscita la tensione sull'induttore  $v_L(t)$ .



## Soluzione

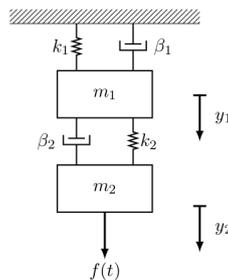
Rappresentazione esterna (FdT):  $G(s) = \frac{C_2 L s^2}{C_1 C_2 L R s^3 + C_2 L s^2 + (C_1 R + C_2 R) s + 1}$

Rappresentazione interna:  $\mathbf{x} = [v_{C_1} \ v_{C_2} \ i_L]^T$ ,  $u = v_i$ ,  $y = v_L$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{g} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{h}^T = [1 \ -1 \ 0], j = 0$$

## Esercizio 2

Si derivi un modello in rappresentazione esterna (equazioni differenziali e funzione di trasferimento) e interna (spazio di stato) per il seguente sistema meccanico dove l'ingresso è la forza esterna  $f(t)$  e le uscite gli spostamenti  $y_1$  e  $y_2$  (misurati dalla configurazione di equilibrio) delle due masse.



## Soluzione

Rappresentazione esterna (FdT):  $G(s) = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} m_2(k_2 + \beta_2 s) \\ m_2(k_1 + k_2 + (\beta_1 + \beta_2)s + m_1 s^2) \end{bmatrix}$ ,  
 $d(s) = m_1 m_2 s^4 + (\beta_1 m_2 + \beta_2 m_1 + \beta_2 m_2) s^3 + (k_1 m_2 + k_2 m_1 + k_2 m_2 + \beta_1 \beta_2) s^2 + (\beta_1 k_2 + \beta_2 k_1) s + k_1 k_2$ .

Rappresentazione interna:  $\mathbf{x} = [y_1 \ \dot{y}_1 \ y_2 \ \dot{y}_2]^T$ ,  $u = f$ ,  $y = [y_1 \ y_2]^T$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-k_1 - k_2}{m_1} & \frac{-\beta_1 - \beta_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{\beta_2}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_1} & \frac{\beta_2}{m_1} & \frac{-k_2}{m_1} & \frac{-\beta_2}{m_1} \end{bmatrix}, \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### Esercizio 3

In una popolazione di cellule si distinguono tre stati diversi: cellule giovani, mature e vecchie. Si modelli il fenomeno, considerando una dinamica a tempo discreto, dove, ad ogni passo

- vengono prodotte ex novo cellule giovani, in numero pari ad  $u$  (che rappresenta l'ingresso del sistema);
- le cellule giovani diventano mature;
- un ottavo delle cellule mature si duplica, scomparendo (come cellule mature) ed originando due cellule giovani, mentre i rimanenti sette ottavi diventano vecchie (in sostanza, esistono due distinti meccanismi di generazione di cellule nuove: ex novo e da duplicazione di cellule mature);
- delle cellule vecchie, la metà muore e l'altra metà sopravvive rimanendo nello stato di cellula vecchia.

### Soluzione

Rappresentazione interna:  $\mathbf{x} = [x_1 : \text{cell.giovani} \quad x_2 : \text{cell.mature} \quad x_3 : \text{cell.vecchie}]^T$ ,  $u = u, y = x_1 + x_2 + x_3$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{h}^T = [1 \quad 0 \quad 0], j = 0$$

### Esercizio 4

Si consideri una popolazione suddivisa in quattro classi: studenti ( $S$ ), lavoratori ( $L$ ), disoccupati ( $D$ ), pensionati ( $P$ ). La situazione viene monitorata di anno in anno, per cui  $S(t)$ ,  $L(t)$ ,  $D(t)$ ,  $P(t)$  sono il numero di persone nelle rispettive classi nell'anno  $t$ -esimo (supponiamo che il censimento venga fatto lo stesso giorno di ogni anno, di modo che la numerosità di ogni classe nell'anno  $t$ -esimo sia definita senza ambiguità, facendo essa riferimento esclusivamente alla situazione in quel giorno particolare scelto, ad esempio, per fissare le idee, il 1° gennaio). Le regole che definiscono la transizione tra le varie classi sono le seguenti:

- ogni anno il 10% degli studenti si laurea, e di questi l'80% trova immediatamente lavoro, mentre il rimanente 20% diventa disoccupato;
- ogni anno il 5% dei lavoratori perde il lavoro mentre il 3% va in pensione;
- ogni anno il 15% dei disoccupati trova lavoro mentre il 3% va in pensione (con ciò intendendo che raggiunge l'età di pensionamento, a prescindere dal fatto che riesca o meno a percepire effettivamente una pensione);
- un pensionato rimane tale per sempre (trascuriamo in tale modello la possibilità di morte, sia per i pensionati che per le altre classi. Stiamo d'altronde trascurando anche la possibilità di nascite, per cui la classe degli studenti non viene alimentata: il 90% degli studenti rimane studente ed il 10% si laurea, ma non ci sono mai nuove immatricolazioni).

Si scriva un modello di stato a tempo discreto che descriva l'andamento delle 4 classi nel tempo (lo stato essendo il vettore contenente  $S(t)$ ,  $L(t)$ ,  $D(t)$ ,  $P(t)$ ).

### Soluzione

Rappresentazione interna:  $\mathbf{x} = [S(t) \quad L(t) \quad D(t) \quad P(t)]^T$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0.08 & 0.92 & 0.15 & 0 \\ 0.02 & 0.05 & 0.82 & 0 \\ 0 & 0.03 & 0.03 & 1 \end{bmatrix}$$

### Esercizio 5

Si consideri il sistema non lineare a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + 4 \sin^2(x_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) = -2 \cos^2(x_1(t)) + \frac{1}{2}x_2(t) + u(t) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{ERRATA} \\ \text{CORRIGE} \end{array} \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + 4 \sin^2(x_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) = -2 \cos^2(x_1(t)) + \frac{1}{2}x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

Si calcolino i punti di equilibrio (se esistono) del sistema al variare dell'ingresso costante  $u(t) \equiv \bar{u}, \forall t$ .

#### Soluzione

Per  $\bar{u} \neq 2$  il sistema non ammette equilibri.

Per  $\bar{u} = 2$ , si hanno infiniti equilibri della forma  $\bar{x} = (x_1, x_2) = (\alpha, -4 \sin^2(\alpha)), \alpha \in \mathbb{R}$ .

### Esercizio 6

Si consideri il sistema non lineare a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\alpha x_2(t) + x_1(t)(1 - \alpha x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + x_1(t)(1 - \alpha x_2(t)) \end{cases}$$

con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Si calcoli il linearizzato del sistema attorno a  $\bar{x} = (x_1, x_2) = (0, 0)$ . Per quali valori di  $\alpha$  (se esistono) il sistema linearizzato risulta asintoticamente/semplimente stabile?

#### Soluzione

$$\text{Sistema linearizzato } \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Il sistema linearizzato risulta semplicemente stabile per  $\alpha > 1$ , mentre non esistono  $\alpha$  per cui si ha stabilità asintotica.

### Esercizio 7

Si consideri il sistema non lineare a tempo discreto

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_2^2(t) - x_1(t)u(t) \\ x_2(t+1) = 2x_1(t) - x_2(t)u(t) \end{cases}$$

Si calcolino i punti di equilibrio del sistema (se esistono) al variare dell'ingresso costante  $u(t) \equiv \bar{u}, \forall t$ . Per  $\bar{u} = 0$  si calcoli il linearizzato del sistema attorno ai punti di equilibrio trovati (se esistono) e si studi la stabilità del sistema linearizzato.

#### Soluzione

Per  $\bar{u} = -1$  il sistema ammette un unico equilibrio  $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{x}_1 \ \bar{x}_2]^\top = [0 \ 0]^\top$ .

Per  $\bar{u} \neq -1$  il sistema ammette, oltre al precedente, un ulteriore equilibrio  $\bar{\mathbf{x}}' = [\bar{x}'_1 \ \bar{x}'_2]^\top = \left[ \frac{(1+\bar{u})^3}{4} \ \frac{(1+\bar{u})^2}{2} \right]^\top$ .

Per  $\bar{u} \equiv 0$ , il sistema linearizzato attorno a  $\bar{\mathbf{x}}$  è  $\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$  (asintoticamente stabile),

mentre attorno a  $\bar{\mathbf{x}}', \mathbf{z}(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}(t)$  con  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}'$  (instabile).