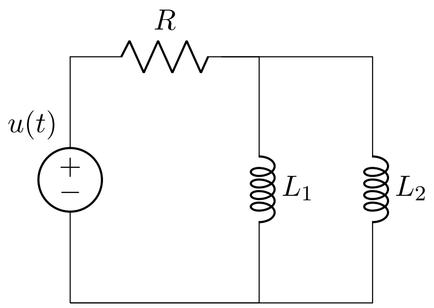
5 OSSERVABILITÀ E RICOSTRUIBILITÀ DEI SISTEMI DINAMICI

osservabilità di un sistema $\sim$ possibilità di determinare lo stato iniziale $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ del sistema a partire da misure di ingresso e uscita nell'intervallo $[t_0, t^*]$

- **stato indistinguibile**: lo stato $\mathbf{x}_0'$ si dice indistinguibile dallo stato $\mathbf{x}_0''$ in $[t_0, t^*]$ se, per ogni ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$, l'uscita $\mathbf{y}'(\cdot)$ corrispondente allo stato iniziale $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0'$ e l'uscita $\mathbf{y}''(\cdot)$ corrispondente allo stato iniziale $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0''$ coincidono su $[t_0, t^*]$
- **stato non osservabile**: lo stato $\mathbf{x}_0$ si dice non osservabile nell'intervallo $[t_0, t^*]$ se è indistinguibile dallo stato $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$
- **spazio non osservabile**: lo spazio non osservabile in $[0, \bar{t}]$ è l'insieme di tutti gli stati non osservabili nell'intervallo $[0, \bar{t}]$

► tipicamente: $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, $t_0 = 0$

esempio



$x_1(t) = i_{L_1}(t)$, $x_2(t) = i_{L_2}(t)$

$y(t) = i_R(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t)$

$t_0 = 0$

modello di stato

$$\dot{x}_1(t) = \frac{di_{L_1}(t)}{dt} = \frac{v_{L_1}(t)}{L_1} = \frac{1}{L_1}(u(t) - Ri_R(t)) = -\frac{R}{L_1}x_1(t) - \frac{R}{L_1}x_2(t) + \frac{1}{L_1}u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = \frac{di_{L_2}(t)}{dt} = \frac{v_{L_2}(t)}{L_2} = \frac{1}{L_2}(u(t) - Ri_R(t)) = -\frac{R}{L_2}x_1(t) - \frac{R}{L_2}x_2(t) + \frac{1}{L_2}u(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L_1} & -\frac{R}{L_1} \\ -\frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_2} \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} u = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{g}u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{h}^\top \mathbf{x}$$

se $\mathbf{x}_0 \neq 0$ allora $y(t) = \mathbf{h}^\top e^{\mathbf{F}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{h}^\top e^{\mathbf{F}(t-\tau)}\mathbf{g}u(\tau)d\tau$
se $\mathbf{x}_0 = 0$ allora $y_0(t) = \int_0^t \mathbf{h}^\top e^{\mathbf{F}(t-\tau)}\mathbf{g}u(\tau)d\tau$
$\rightarrow$ $\mathbf{x}_0$ è non osservabile in $[0, t]$ se $y(\tau) = y_0(\tau)\ \forall\tau \in [0, t]$ ovvero $\mathbf{h}^\top e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{x}_0 = 0\ \forall\tau \in [0, t]$

se $L_1 = L_2 = L$ allora

$$\mathbf{F} = -\frac{R}{L}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}' = \mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{T}^{-1} \quad \text{con} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2R}{L} \end{bmatrix}, \ \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

da cui

$$\mathbf{h}^\top e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{x}_0 = \mathbf{h}^\top \mathbf{T} e^{\mathbf{D}\tau}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0 = e^{-\frac{2R}{L}\tau}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}_0 \quad \forall\tau \in [0, t]$$

$\rightarrow$ $\mathbf{x}_0$ è non osservabile in $[0,t]$ se $\mathbf{h}^\top e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{x}_0 = 0 \ \forall \tau \in [0,t]$ ovvero $e^{-\frac{2R}{L}\tau}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}_0 = 0 \ \forall \tau \in [0,t]$

ovvero $\mathbf{x}_0 \in \ker(\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}) = span\left\{\begin{bmatrix}1 \\ -1\end{bmatrix}\right\}$

spazio non osservabile in $[0,t] = \left\{\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix}\alpha \\ -\alpha\end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}\right\}$

$\boxtimes$

ricostruibilità di un sistema $\sim$ possibilità di determinare lo stato finale $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(t^*)$ del sistema a partire da misure di ingresso e uscita nell'intervallo $[t_0, t^*]$

5.1 Osservabilità e ricostruibilità di sistemi a tempo discreto

dato $\quad \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t)$ con $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$,
$\quad \mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}(t)$

allora

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{F}^t\mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{t-1}\mathbf{H}\mathbf{F}^{t-k-1}\mathbf{G}\mathbf{u}(k) = \mathbf{H}\mathbf{F}^t\mathbf{x}_0 + \mathbf{H}\mathcal{R}_t\mathbf{u}_t$$

5.1.1 spazi non osservabili

qual è l'insieme degli stati iniziali indistinguibili da $\mathbf{x}_0$ in $[0, t-1]$ ($=$ in t passi)?

sia

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0: \quad \mathbf{y}(k) = \mathbf{H}\mathbf{F}^k\mathbf{x}_0 + \mathbf{H}\mathcal{R}_k\mathbf{u}_k, \qquad k = 0, 1, \dots, t-1$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0': \quad \mathbf{y}'(k) = \mathbf{H}\mathbf{F}^k\mathbf{x}_0' + \mathbf{H}\mathcal{R}_k\mathbf{u}_k, \qquad k = 0, 1, \dots, t-1$$

allora $\mathbf{x}_0'$ è indistinguibile da $\mathbf{x}_0$ in $[0, t-1]$ se $\mathbf{y}(k) = \mathbf{y}'(k)$, $k = 0, 1, \dots, t-1$, ovvero

$$\begin{cases} k=0 & \mathbf{y}'(0) - \mathbf{y}(0) = \mathbf{H}(\mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \\ k=1 & \mathbf{y}'(1) - \mathbf{y}(1) = \mathbf{H}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \\ k=2 & \mathbf{y}'(2) - \mathbf{y}(2) = \mathbf{H}\mathbf{F}^2(\mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \\ \vdots & \\ k=t-1 & \mathbf{y}'(t-1) - \mathbf{y}(t-1) = \mathbf{H}\mathbf{F}^{t-1}(\mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix}\mathbf{H} \\ \mathbf{H}\mathbf{F} \\ \mathbf{H}\mathbf{F}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{H}\mathbf{F}^{t-1}\end{bmatrix}(\mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{bmatrix}$$

con

$$\mathcal{O}_t \triangleq \begin{bmatrix}\mathbf{H} \\ \mathbf{H}\mathbf{F} \\ \mathbf{H}\mathbf{F}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{H}\mathbf{F}^{t-1}\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pt \times n} \qquad \text{matrice di osservabilità in } t \text{ passi}$$

allora $\mathbf{x}_0'$ è indistinguibile da $\mathbf{x}_0$ in $[0, t-1]$ se $(\mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0) \in \ker \mathcal{O}_t$

$\boxed{\mathbf{x}_0 + \ker \mathcal{O}_t = \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \ker \mathcal{O}_t\}: \text{ insieme di stati indistinguibili in } t \text{ passi da } \mathbf{x}_0}$

$$\boxed{\begin{aligned} X_{NO}(t) = \ker(\mathcal{O}_t)&: \text{ insieme di stati indistinguibili in } t \text{ passi da } \mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \\ &: \text{ insieme di stati non osservabili in } t \text{ passi} \\ &: \text{ spazio non osservabile in } t \text{ passi} \end{aligned}}$$

Proposizione In un sistema di dimensione n, gli spazi non osservabili in $1, 2, \dots$ passi soddisfano la catena di inclusioni $X_{NO}(1) \supseteq X_{NO}(2) \supseteq \dots X_{NO}(t) \supseteq X_{NO}(t+1) \supseteq \dots$.
La catena è stazionaria (almeno) dal t'-esimo passo in poi, ovvero $X_{NO}(t') = X_{NO}(t''), \forall t'' \geq t'$, con $t' \leq n$.

$$\boxed{X_{NO} \triangleq X_{NO}(t'): \text{ (minimo) spazio non osservabile}}$$

5.1.2 criterio di osservabilità del rango

quando è possibile distinguere tutti i possibili stati $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$?

(completa) osservabilità

- un sistema Σ a tempo discreto si dice **(completamente) osservabile** se $X_{NO} = \{\mathbf{0}\}$
- un sistema Σ a tempo discreto si dice **(completamente) osservabile in** t **passi** se t è il più piccolo intero tale che $X_{NO}(t) = \{\mathbf{0}\}$

▶ $\mathcal{O} \triangleq \mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^\top & (\mathbf{HF})^\top & \dots & (\mathbf{HF}^{n-1})^\top \end{bmatrix}^\top$: matrice di osservabilità del sistema

$$\Sigma \text{ osservabile} \iff \ker(\mathcal{O}) = \{\mathbf{0}\} \iff \text{rank}(\mathcal{O}) = n$$

si noti che $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^{pn \times n}$, per cui

- $p = 1$: Σ osservabile $\iff \det(\mathcal{O}) \neq 0$
- $p > 1$: Σ osservabile $\iff \det(\mathcal{O}^\top \mathcal{O}) \neq 0$

esempio

1. $\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}, \mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^\top \\ \mathbf{h}^\top \mathbf{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} : \text{rank}(\mathcal{R}) = 1 < 2$$

$\implies \Sigma$ non osservabile $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

2. $\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & 1\\ 0 & \alpha_2\end{bmatrix}, \mathbf{h}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{O}=\begin{bmatrix}\mathbf{h}^\top\\ \mathbf{h}^\top\mathbf{F}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \alpha_1 & 1\end{bmatrix} : \text{rank}(\mathcal{R})<2$$

$\Longrightarrow \Sigma$ osservabile (in 2 passi) $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

⊠

5.1.3 spazi non ricostruibili

sia

- stato finale: $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(t-1) = \mathbf{F}^{t-1}\mathbf{x}_0 + \mathcal{R}_{t-1}\mathbf{u}_{t-1}$
- misure: $\{\mathbf{u}(k)\}_{k=0}^{t-1}, \{\mathbf{y}(k)\}_{k=0}^{t-1}$

allora

- stati iniziali compatibili con le misure: $\mathbf{x}_0 + X_{NO}(t)$
- stati finali compatibili con le misure: $\mathbf{F}^{t-1}\mathbf{x}_0 + \mathbf{F}^{t-1}X_{NO}(t) + \mathcal{R}_{t-1}\mathbf{u}_{t-1} = \mathbf{x}^* + \mathbf{F}^{t-1}X_{NO}(t)$

$X_{NR}(t) = \mathbf{F}^{t-1}X_{NO}(t) = \left\{\mathbf{F}^{t-1}\mathbf{x}, \mathbf{x} \in \ker(\mathcal{O}_t)\right\}$: spazio non ricostruibile in t passi

Proposizione In un sistema di dimensione n, gli spazi non ricostruibili in $1, 2, \ldots$ passi soddisfano la catena di inclusioni $X_{NR}(1) \supseteq X_{NR}(2) \supseteq \ldots X_{NR}(t) \supseteq X_{NR}(t+1) \supseteq \ldots$.
La catena è stazionaria (almeno) dal t'-esimo passo in poi, ovvero $X_{NR}(t') = X_{NR}(t''), \forall t'' \geq t'$, con $t' \leq n$.

$X_{NR} \triangleq X_{NR}(t')$: (minimo) spazio non ricostruibile

5.1.4 criterio di ricostruibilità del rango

quando è possibile determinare univocamente $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ dalle misure?

(completa) ricostruibilità

- un sistema Σ a tempo discreto si dice **(completamente) ricostruibile** se $X_{NR} = \{\mathbf{0}\}$
- un sistema Σ a tempo discreto si dice **(completamente) ricostruibile in** t **passi** se t è il più piccolo intero tale che $X_{NR}(t) = \{\mathbf{0}\}$

▶ $X_{NR} = X_{NR}(n) = \mathbf{F}^n X_{NO} = \{\mathbf{F}^n\mathbf{x}, \mathbf{x} \in \ker(\mathcal{O})\}$

Σ ricostruibile $\iff \ker(\mathbf{F}^n) \supseteq \ker(\mathcal{O}) = X_{NO}$

si noti che

- Σ osservabile ($X_{NO} = \{0\}$) $\Rightarrow \Sigma$ ricostruibile
- Σ ricostruibile $\not\Rightarrow \Sigma$ osservabile

esempio

1. $\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}, \mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^\top \\ \mathbf{h}^\top \mathbf{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} : \text{rank}(\mathcal{R}) = 1 < 2$$

$$X_{NO} = \ker \mathcal{O} = span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\ker(\mathbf{F}^2) = \ker\left(\begin{bmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_1 + \alpha_2 \\ 0 & \alpha_2^2 \end{bmatrix} \right) = \begin{cases} span\,\{\mathbf{0}\} & \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0 \\ span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -\alpha_1 \end{bmatrix} \right\} & \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0 \\ span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} & \alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq 0 \\ \mathbb{R}^2 & \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Σ non osservabile $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Σ ricostribile se $\alpha_1 = 0$ $(\ker(\mathbf{F}^2) \supseteq \ker \mathcal{O})$

2. $\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}, \mathbf{h} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^\top \\ \mathbf{h}^\top \mathbf{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_1 & 1 \end{bmatrix} : \text{rank}(\mathcal{R}) = 2$$

$\Longrightarrow$ Σ osservabile $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Σ ricostruibile $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\boxtimes$

5.2 Osservabilità e ricostruibilità di sistemi a tempo continuo

dato $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t)$ con $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$,

$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t)$

allora

$$\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{H}e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{x}_0 + \int_0^\tau \mathbf{H}e^{\mathbf{F}(t-s)}\mathbf{G}\mathbf{u}(s)ds, \ \tau \in [0, t]$$

5.2.1 osservabilità

quando è possibile determinare univocamente $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ dalle misure?

$X_{NO}(t)$: spazio non osservabile nell'intervallo $[0, t]$
X_{NO}: (minimo) spazio non osservabile

(completa) osservabilità

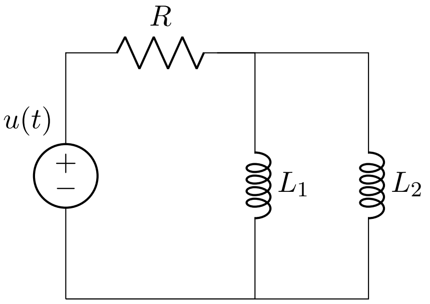
- un sistema Σ a tempo continuo si dice **(completamente) osservabile** se $X_{NO} = \{\mathbf{0}\}$

▶ $\mathcal{O} \triangleq \mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^\top & (\mathbf{HF})^\top & \dots & (\mathbf{HF}^{n-1})^\top \end{bmatrix}^\top$: matrice di osservabilità del sistema

$$\Sigma \text{ osservabile} \iff \ker(\mathcal{O}) = \{\mathbf{0}\} \iff \text{rank}(\mathcal{O}) = n$$

Se un sistema Σ a t.c. è osservabile allora $X_{NO}(t) = \{0\}$ per ogni $t > 0$

esempio



$$x_1(t) = i_{L_1}(t),\ x_2(t) = i_{L_2}(t)$$
$$y(t) = i_R(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t)$$

modello di stato

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L_1} & -\frac{R}{L_1} \\ -\frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_2} \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} u = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{g}u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{h}^\top \mathbf{x}$$

allora

$$\det(\mathcal{O}) = \det(\begin{bmatrix} \mathbf{h}^\top \\ \mathbf{h}^\top\mathbf{F} \end{bmatrix}) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{R}{L_1} - \frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_1} - \frac{R}{L_2} \end{bmatrix}\right)$$
$$= -\frac{R}{L_1} - \frac{R}{L_2} + \frac{R}{L_1} + \frac{R}{L_2}$$

da cui si ha che

$$\det(\mathcal{O}) = 0 \quad \rightarrow \quad \Sigma \text{ non osservabile}$$

⊠

5.2.2 ricostruibilità

quando è possibile determinare univocamente $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ dalle misure?

sia

- stato finale: $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{F}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{F}(t-\tau)}\mathbf{G}\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$
- misure: $\mathbf{u}(\tau), \mathbf{y}(\tau), \tau \in [0, t]$

allora

- stati iniziali compatibili con le misure: $\mathbf{x}_0 + X_{NO}(t)$
- stati finali compatibili con le misure: $e^{\mathbf{F}t}\mathbf{x}_0 + e^{\mathbf{F}t}X_{NO}(t) + \int_0^t e^{\mathbf{F}(t-\tau)}\mathbf{G}\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau = \mathbf{x}^* + e^{\mathbf{F}t}X_{NO}(t)$

$X_{NR}(t) = e^{\mathbf{F}t} X_{NO}(t)$: spazio non ricostruibile nell'intervallo $[0,t]$

X_{NR}: (minimo) spazio non ricostruibile

(completa) ricostruibilità

- un sistema Σ a tempo continuo si dice **(completamente) ricostruibile** se $X_{NR} = \{\mathbf{0}\}$

▶ $e^{\mathbf{F}t}$ invertibile

$$\boxed{\mathsf{X}_{NR}(t) = \{\mathbf{0}\} \iff X_{NO}(t) = \{\mathbf{0}\}}$$

$$\Sigma \text{ ricostruibile} \iff \Sigma \text{ osservabile}$$

5.3 Sistemi duali

si considera il caso di sistemi a tempo discreto ma tutto si applica anche al caso di sistemi a tempo continuo

sistema $\Sigma = (\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})$

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{H}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \qquad \begin{array}{l} m \text{ ingressi} \\ p \text{ uscite} \\ n \text{ stati} \end{array}$$

sistema duale $\Sigma_d = (\mathbf{F}^\top, \mathbf{H}^\top, \mathbf{G}^\top)$

$$\Sigma_d: \quad \begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{F}^\top\mathbf{x}(t) + \mathbf{H}^\top\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{G}^\top\mathbf{x}(t) \end{aligned} \qquad \begin{array}{l} p \text{ ingressi} \\ m \text{ uscite} \\ n \text{ stati} \end{array}$$

per i sistemi duali vale che

- **raggiungibilità e controllabilità**
  - dato che $\mathcal{R}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^\top & \mathbf{F}^\top\mathbf{H}^\top & \cdots & (\mathbf{F}^\top)^{n-1}\mathbf{H}^\top \end{bmatrix} = \mathcal{O}^\top$

    Σ_d raggiungibile $\Leftrightarrow$ Σ osservabile
  - dato che
    * dati due sottospazi $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ di $\mathbb{R}^n$ tali che $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, si ha che $\mathcal{U}^\perp \subseteq \mathcal{V}^\perp$

      con $\mathcal{V}^\perp = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{w}^\top\mathbf{v} = 0 \ \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}\}$ *complemento ortogonale* di $\mathcal{V}$
    * data la matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, si ha che $(\text{im}(\mathbf{A}))^\perp = \ker(\mathbf{A}^\top)$

    allora $\text{im}((\mathbf{F}^\top)^n) \subseteq \text{im}\mathcal{R}_d \iff \ker(\mathbf{F}^n) \supseteq \ker \mathcal{O}$

    Σ_d controllabile $\Leftrightarrow$ Σ ricostruibile

- **osservabilità e ricostruibilità**
  - poichè $\mathcal{O}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{F}\mathbf{G} & \cdots & \mathbf{F}^{n-1}\mathbf{G} \end{bmatrix}^\top = \mathcal{R}^\top$

    Σ_d osservabile $\Leftrightarrow$ Σ raggiungibile

– dato che $\ker((\mathbf{F}^\top)^n) \supseteq \ker \mathcal{O}_d \iff \text{im}(\mathbf{F}^n) \subseteq \text{im}\mathcal{R}$
Σ_d ricostruibile $\Leftrightarrow$ Σ controllabile

- **forma canonica di raggiungibilità e forma canonica di osservabilità**

$$
\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}\Sigma_d \text{ non raggiungibile}\\ \Sigma_d = (\mathbf{F}^\top, \mathbf{H}^\top, \mathbf{G}^\top)\end{array} \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{dualità}"] & \begin{array}{c}\text{forma canonica di raggiungibilità}\\ \Sigma'_d = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11}^\top & \mathbf{F}_{21}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{22}^\top \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^\top \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^\top & \mathbf{G}_2^\top \end{bmatrix} \right)\end{array} \arrow[d, leftrightarrow, "\text{dualità}"] \\
\begin{array}{c}\Sigma = (\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H})\\ \Sigma \text{ non osservabile}\end{array} \arrow[r] & \begin{array}{c}\Sigma' = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} & 0 \\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right)\\ \text{forma di canonica di osservabilità}\end{array}
\end{tikzcd}
$$

$\Sigma_O = (\mathbf{F}_{11}, \mathbf{H}_1)$ sottosistema osservabile
$\Sigma_{NO} = (\mathbf{F}_{22}, \mathbf{0})$ sottosistema non osservabile

- **test PBH di raggiungibilità e test PBH di osservabilità**

$$
\begin{tikzcd}
\Sigma_d = (\mathbf{F}^\top, \mathbf{H}^\top, \mathbf{G}^\top) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{dualità}"] & \Sigma_d \text{ raggiungibile} \iff \begin{array}{c}\text{test PBH di raggiungibilità}\\ \text{rank}[z\mathbf{I} - \mathbf{F}^\top \;\; \mathbf{H}^\top] = n,\ \forall z \in \mathbb{C}\end{array} \arrow[d, leftrightarrow, "\text{dualità}"] \\
\Sigma = (\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}) \arrow[r] & \Sigma \text{ osservabile} \iff \begin{array}{c}\text{rank} \begin{bmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{F} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = n,\ \forall z \in \mathbb{C}\\ \text{test PBH di osservabilità}\end{array}
\end{tikzcd}
$$

- **allocazione degli autovalori**

$$
\begin{tikzcd}
\Sigma_d = (\mathbf{F}^\top, \mathbf{H}^\top, \mathbf{G}^\top) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{dualità}"] & \Sigma_d \text{ raggiungibile} \iff \begin{array}{l}\exists\, \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{p \times n} \text{tale che}\\ \mathbf{F}^\top + \mathbf{H}^\top\mathbf{K} \quad \text{ha autovalori desiderati}\end{array} \arrow[d, leftrightarrow, "\text{dualità}"] \\
\Sigma = (\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}) \arrow[r] & \Sigma \text{ osservabile} \iff \begin{array}{l}\exists\, \mathbf{L} = \mathbf{K}^\top \in \mathbb{R}^{n \times p} \text{tale che}\\ \mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{H} \quad \text{ha autovalori desiderati}\end{array}
\end{tikzcd}
$$

grazie alle relazioni precedenti si dimostrano le seguenti proposizioni

Proposizione Il sistema Σ è osservabile se e solo se:

1. rank$(\mathcal{O}) = n$.
2. Il sistema duale Σ_d è raggiungibile.
3. rank $\begin{bmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{F} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = n$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
4. Gli autovalori di $\mathbf{F} + \mathbf{LH}$ sono allocabili arbitrariamente tramite la matrice $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times p}$.

Proposizione Il sistema Σ è ricostruibile se e solo se:

1. $\ker \mathbf{F}^n \supseteq \ker \mathcal{O} = X_{NO}$.
2. Il sistema duale Σ_d è controllabile.
3. rank $\begin{bmatrix} z\mathbf{I} - \mathbf{F} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = n$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.
4. Esiste una matrice $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che $\mathbf{F} + \mathbf{LH}$ ha tutti gli autovalori nulli.

▶ la proprietà di ricostruibilità ha senso solo per i sistemi a tempo discreto