RECAP

4 RETROAZIONE dallo STATO

problema di controllo

→ controllo in catena aperta

→ controllo in retroazione

- statica / dinamica
- dallo stato / dall'uscita

retroazione statica dallo stato

$$u(t) = Kx(t) + v(t) \qquad K \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$A = F + GK$$

come scegliere K ? specifiche sul sistema retroazionato $\sim$ allocazione degli autovalori di A

▷ esistenza di K : proprietà di raggiungibilità del sistema

⚠ la retroazione non modifica gli autovalori del sistema non raggiungibile

▷ determinazione di K : allocazione degli autovalori di A

•) $m = 1$: singolo ingresso

$k \in \mathbb{R}^{1 \times n}$

→ soluzione di un sistema di equazioni lineari nelle incognite $k_1 \dots k_n$

$$\Delta_A(\lambda) = p(\lambda)$$

⇝ controllore dead-beat : $p(\lambda) = \lambda^n$

⇕

Σ controllabile

(gli autovalori del sistema non raggiung. sono nulli)

⚠ solo per i sistemi a tempo discreto

•) $m > 1$: multipli ingressi

→ singolo ingresso : lemma di Heymann

$\exists M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che $(F + GM, g_i)$ raggiung.

$$\Rightarrow K = M + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ k^T \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{i-esima riga}$$

→ soluzione di un sistema di equazioni nelle incognite $k_{11}, k_{12}, \dots k_{mn}$

STABILIZZABILITÀ di un SISTEMA : $\exists$ K tale che A ha autovalori stabili $\begin{cases} |\lambda_i| < 1 & \text{t.d.} \\ \mathrm{Re}[\lambda] < 0 & \text{t.c.} \end{cases}$

⇕

autovalori non raggiungibili stabili

PBH(z) rango pieno n $\forall z$ con $|z| \geq 1$ t.d. / $\mathrm{Re}[z] \geq 0$ t.c.

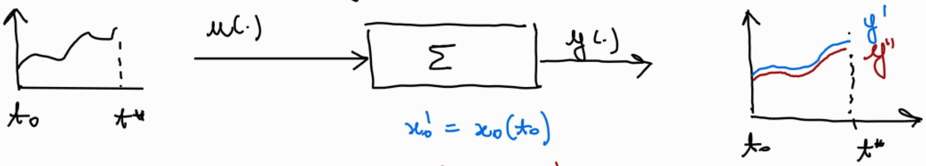
$\wedge$
$\vee$

5 OSSERVABILITÀ e RICOSTRUIBILITÀ dei SISTEMI DINAMICI

OSSERVABILITÀ

~ possibilità di determinare lo stato iniziale $x_0 = x(t_0)$ del sistema a partire da misure di ingresso e uscita nell'intervallo $[t_0, t^*]$

STATO INDISTINGUIBILE : x_0' è indistinguibile da x_0'' in $[t_0, t^*]$ se, per ogni ingresso $u(\cdot)$, l'uscita $y'(\cdot)$ corrispondente a x_0' e l'uscita $y''(\cdot)$ corrispondente a x_0'' coincidono su $[t_0, t^*]$



$x_0' = x_0(t_0)$

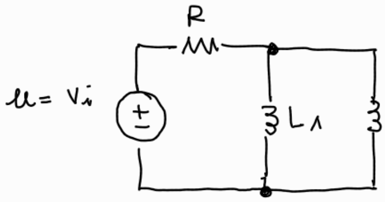
$x_0'' = x_0(t_0)$

STATO NON OSSERVABILE : x_0 è non osservabile in $[t_0, t^*]$ se è indistinguibile dallo stato $x(t_0) = 0$

SPAZIO NON OSSERVABILE : spazio non osservabile in $[t_0, t^*]$ con $t_0 = 0$ $X_{NO}(t^*)$ è l'insieme di tutti gli stati non osservabili in $[0, t^*]$

▸ tipicamente : $t_0 = 0$

esempio



$x_1(t) = i_{L_1}(t)$

$x_2(t) = i_{L_2}(t)$

$y(t) = i_R(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t)$

$t_0 = 0$

modello di stato

$$\dot{x}_1(t) = \dot{i}_{L_1}(t) = \frac{V_{L_1}(t)}{L_1} = \frac{1}{L_1}\big(u(t) - R\underbrace{i_R(t)}_{x_1(t)+x_2(t)}\big) = -\frac{R}{L_1}x_1(t) - \frac{R}{L_1}x_2(t) + \frac{1}{L_1}u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \dot{i}_{L_2}(t) = \frac{V_{L_2}(t)}{L_2} = \frac{1}{L_2}\big(u(t) - R\,i_R(t)\big) = -\frac{R}{L_2}x_1(t) - \frac{R}{L_2}x_2(t) + \frac{1}{L_2}u(t)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -R/L_1 & -R/L_1 \\ -R/L_2 & -R/L_2 \end{bmatrix}}_{F} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1/L_1 \\ 1/L_2 \end{bmatrix}}_{g} u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_{h^T} x(t) \qquad j = 0$$

se $x_0 = 0$ allora $y_0(t) = \int_0^t h^T e^{F(t-\tau)} u(\tau)\, d\tau$

se $x_0 \neq 0$ allora $y(t) = h^T e^{Ft} x_0 + \int_0^t h^T e^{F(t-\tau)} u(\tau)\, d\tau$

$\longrightarrow$ $x_0 \neq 0$ è non osservabile se $y_0(\tau) = y(\tau) \quad \forall \tau \in [0, t]$

$$y(\tau) - y_0(\tau) = h^T e^{F\tau} x_0 = 0$$

se $L_1 = L_2 = L$

$$F = -\frac{R}{L}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow F' = TDT^{-1} \quad \text{con} \quad D = \left[\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ \hdashline 0 & -\frac{2R}{L} \end{array}\right]$$

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda + R/L & +R/L \\ R/L & \lambda + R/L \end{bmatrix}\right) = \left(\lambda + \frac{R}{L}\right)^2 - \frac{R^2}{L^2}$$

$$= \lambda^2 + \frac{2R}{L}\lambda + \frac{R^2}{L^2} - \frac{R^2}{L^2}$$

$$= \lambda\left(\lambda + \frac{2R}{L}\right)$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$h^T e^{F\tau} x_0 = h^T T e^{D\tau} T^{-1} x_0 = \underbrace{e^{-\frac{2R}{L}\tau} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}\, x_0 = 0 \qquad \forall \tau \in [0, t]$$

$$x_0 \in \ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\text{spazio non osservabile in } [0, t] = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^2 : x_0 \in \ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\},\ x_0 = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

☒

RICOSTRUIBILITÀ

~ possibilità di determinare lo stato finale $x^* = x(t^*)$ del sistema a partire da misure di ingresso e uscite nell'intervallo $[t_0, t^*]$

OSSERVABILITÀ e RICOSTRUIBILITÀ di SISTEMI a tempo DISCRETO

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \quad \text{con} \quad x_0 = x(0) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$$y(t) = HF^t x_0 + \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} HF^{t-1-k} G u(k)}_{HR_t u_t}$$

OSSERVABILITÀ: spazi non osservabili e criterio del rango

$x(0) = x_0 \quad : \quad y(k) = HF^k x_0 + H R_k u_k \qquad k = 0 \dots t-1$

$x(0) = x_0' \quad : \quad y'(k) = HF^k x_0' + H R_k u_k \qquad k = 0 \dots t-1$

x_0' è indistinguibile da x_0 in $[0, t-1]$ se

$y(k) = y'(k) \quad \forall k \in [0, t-1]$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} k=0 & y'(0) - y(0) = H(x_0' - x_0) = 0 \\ k=1 & y'(1) - y(1) = HF(x_0' - x_0) = 0 \\ k=2 & y'(2) - y(2) = HF^2(x_0' - x_0) = 0 \\ \vdots & \vdots \\ k=t-1 & y'(t-1) - y(t-1) = HF^{t-1}(x_0' - x_0) = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^{t-1} \end{bmatrix}}_{\mathbb{R}^{pt \times n}} (x_0' - x_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \iff \Theta_t (x_0' - x_0) = \mathbf{0}$$

$\Theta_t = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{t-1} \end{bmatrix}$: matrice di osservabilità in t passi

$\iff (x_0' - x_0) \in \ker \Theta_t$

$x_0 + \ker\Theta_t = \{ x_0 + x ,\ x \in \ker \Theta_t \}$: insieme degli stati indistinguibili da x_0 in t passi

$X_{NO}(t) = \ker\Theta_t$: insieme degli stati indistinguibili da $x_0 = 0$ in t passi
insieme degli stati non osservabili in t passi
spazio non osservabile in t passi

Proposizione

> in un sistema di dimensione n, gli spazi non osservabili in $1, 2, \dots$ passi soddisfano la catena di inclusioni $X_{NO}(1) \supseteq X_{NO}(2) \dots \supseteq X_{NO}(t) \supseteq X_{NO}(t+1) \supseteq \dots$
> la catena è stazionaria (almeno) dal t'-esimo passo, ovvero $X_{NO}(t') = X_{NO}(t'') \ \forall t'' \geq t'$
> $t' \leq n$

$X_{NO} = X_{NO}(t')$: (massimo) spazio non osservabile

(COMPLETA) OSSERVABILITÀ

- un sistema a tempo discreto Σ si dice (completamente) osservabile se $X_{NO} = \{0\}$
- un sistema a tempo discreto Σ si dice (completamente) osservabile in t passi se t è il più piccolo intero tale che $X_{NO}(t) = \{0\}$

▶ $\Theta = \Theta_n = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pn \times n}$: matrice di osservabilità in n passi

$n = \operatorname{rank}\Theta + \dim\{\ker \Theta\}$

$$\boxed{\Sigma \text{ osservabile} \iff X_{NO} = \{0\} \iff \operatorname{rank}\Theta = n}$$

$X_{NO} = \ker\Theta$

$\Theta \in \mathbb{R}^{pn \times n}$

- $p = 1$: $\Theta \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $\operatorname{rank}\Theta = n \leftrightarrow \det\Theta \neq 0$
- $p > 1$: $\Theta \in \mathbb{R}^{pn \times n}$: $\operatorname{rank}\Theta = n \longleftrightarrow \det(\Theta^T\Theta) \neq 0$

esempio

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t)$ $\qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$

$\Theta = \begin{bmatrix} h^T \\ h^T F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$: $\operatorname{rank}\Theta = 1 \quad \forall\, \alpha_1, \alpha_2$

$\Rightarrow \Sigma$ non osservabile $\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t)$

$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$

$\Theta = \begin{bmatrix} h^T \\ h^T F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_1 & 1 \end{bmatrix}$: $\operatorname{rank}\Theta = 2 \quad \forall\, \alpha_1, \alpha_2$

$\Rightarrow \Sigma$ osservabile $\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

RICOSTRUIBILITÀ : spazi non ricostruibili e criterio del rango

-) stato finale : $x^* = x(t-1) = F^{t-1}x_0 + R_{t-1}u_{t-1}$
-) misure : $\{u(k)\}_{k=0}^{t-1}$, $\{y(k)\}_{k=0}^{t-1}$

allora

- Stati iniziali compatibili con le misure : $x_0 + \underset{\ker \Theta_t}{\underset{\shortparallel}{X_{NO}(t)}}$

- Stati finali compatibili con le misure :

$$x(t-1) = F^{t-1}\left(x_0 + X_{NO}(t)\right) + R_{t-1}\, u_{t-1}$$
$$\overset{!}{=} \underbrace{\boxed{F^{t-1}x_0 + R_{t-1}\, u_{t-1}}}_{x^*} + \underbrace{\boxed{F^{t-1}X_{NO}(t)}}_{\text{parte indeterminata}}$$

$X_{NR}(t) = F^{t-1}X_{NO}(t) = \{ F^{t-1}x,\ x \in \ker \Theta_t \}$: spazio non ricostruibile in t passi

proposizione

> In un sistema di dimensione n, gli spazi non ricostruibili in $1, 2 \dots$ passi soddisfano la catena di inclusioni $X_{NR}(1) \supseteq X_{NR}(2) \supseteq \dots X_{NR}(t) \supseteq X_{NR}(t+1) \supseteq \dots$
> la catena è stazionaria (almeno) dal t'-esimo passo $X_{NR}(t') = X_{NR}(t'')\ \forall t'' \geq t'$
> $t' \leq n$

$X_{NR} = X_{NR}(t')$: (massimo) spazio non ricostruibile

(COMPLETA) RICOSTRUIBILITÀ

- un sistema Σ a tempo discreto si dice (completamente) ricostruibile se $X_{NR} = \{0\}$
- un sistema Σ a tempo discreto si dice (completamente) ricostruibile in t passi se t è il più piccolo intero tale che $X_{NR}(t) = \{0\}$

$\triangleright$ $X_{NR} = X_{NR}(n) = F^n X_{NO} = \{ F^n x,\ x \in \ker \Theta \} = \{0\} \iff F^n X_{NO} = \{0\}$

$X_{NO} \subseteq \ker F^n$

$$\boxed{\Sigma \text{ ricostruibile} \iff \ker F^n \supseteq \ker \Theta = X_{NO}}$$

Σ osservabile $(X_{NO} = \{0\}) \implies \Sigma$ ricostruibile

Σ ricostruibile $\not\Longrightarrow \Sigma$ osservabile