# 4 RETROAZIONE DALLO STATO

## Esercizio 1

Si consideri il sistema lineare a tempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t), \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Si determini, se possibile, una retroazione dallo stato che allochi gli autovalori del sistema in $-1$, $-2$.

### Soluzione

Matrice di retroazione $\mathbf{k}^\top = \begin{bmatrix} -4 & -1 \end{bmatrix}$.

## Esercizio 2

Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t), \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si costruisca, se possibile, un controllore dead-beat per il sistema.

### Soluzione

Matrice di retroazione $\mathbf{k}^\top = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -2 \end{bmatrix}$.

## Esercizio 3

Si consideri il sistema lineare a tempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t), \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

È possibile trovare una matrice di retroazione $\mathbf{k}$ tale da avere autovalori del sistema retroazionato in $-2$, $-2$, $-1$, $-1$? E per autovalori in $-2$, $-2$, $-2$, $-1$? E per autovalori in $-2$, $-2$, $-2$, $-2$?

### Soluzione

Il sistema non è raggiungibile. Il sottosistema non raggiungibile ha dimensione 1 e autovalore in $-1$. Quindi è possibile calcolare una retroazione $\mathbf{k}$ tale da portare gli autovalori del sistema in $-2$, $-2$, $-1$, $-1$ e in $-2$, $-2$, $-2$, $-1$. Non è invece possibile portare tutti gli autovalori del sistema in $-2$.

## Esercizio 4

Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si dica se il sistema è raggiungibile usando un solo ingresso. Se il sistema non è raggiungibile da un ingresso, si provi a renderlo raggiungibile dal primo ingresso usando come matrice di retroazione preliminare

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi si calcoli un controllore dead-beat per il sistema.

### Soluzione

Il sistema non è raggiungibile da un singolo ingresso, ma lo diventa (dal primo ingresso) usando come matrice di retroazione preliminare $\mathbf{M}$. In questo caso, la matrice di retroazione complessiva è

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -11 & -5 & 1 & -16 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

## Esercizio 5

Si consideri il sistema lineare a tempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in [0,1].$$

Si studi la stabilizzabilità (tramite retroazione dallo stato) del sistema al variare di $\alpha \in [0,1]$. Quando il sistema è stabilizzabile si calcoli il numero di minimo ingressi che rende il sistema stabilizzabile.

### Soluzione

Se $\alpha = 0$, il sistema non è stabilizzabile. Se $\alpha = 1$, il sistema è stabilizzabile con due ingressi. Se $0 < \alpha < 1$, il sistema è stabilizzabile con un singolo ingresso (il secondo).