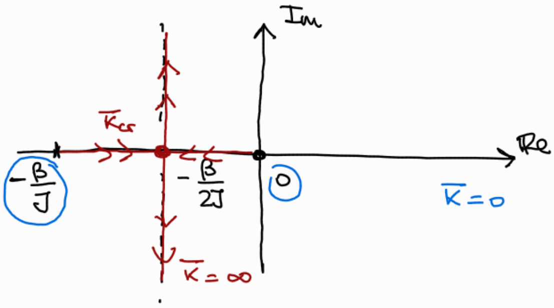
$$\Delta_A(\lambda) = \lambda^2 + \frac{\beta}{J}\lambda + \frac{\bar K}{J}$$

$\bar K = 0$ allora $\Delta_A(\lambda) = \lambda\left(\lambda + \frac{\beta}{J}\right)$

$\bar K \neq 0$ allora $\lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2J} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{J^2} - 4\frac{\bar K}{J}}$

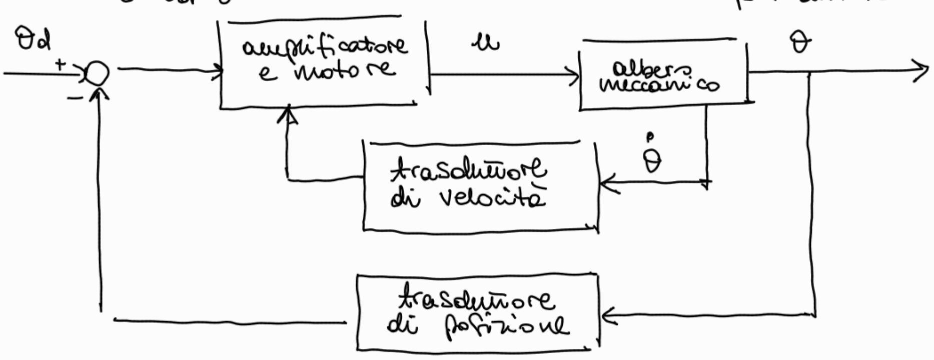
$e^{-\frac{\beta}{2J}} \to$ vincoli



☒

esempio : retroazione dello stato

J : inerzia
β : attrito



$\theta_d = 0$

$u \propto e = \theta_d - \theta$

equazioni del moto

$$J\ddot\theta = -\beta\dot\theta + u$$

$$\dot x = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\beta/J \end{bmatrix}}^{F} x + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/J \end{bmatrix}}^{g} u \qquad x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot\theta \end{bmatrix}$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{h^T} x$$

legge di controllo

$$u = k_1 \cdot e + k_2\dot\theta = k_1(\theta_d - \theta) + k_2\dot\theta$$
$$= -k_1\theta + k_2\dot\theta$$
$$= -k^T x \qquad k^T = \begin{bmatrix} k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$$

sistema controllato

$$\dot x = \underbrace{(F - g k^T)}_{A} x = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\beta/J \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1/J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \right) x$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{J} & -\frac{(\beta - k_2)}{J} \end{bmatrix} x$$

$$\Delta_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 + \frac{(\beta - k_2)}{J}\lambda + \frac{k_1}{J} \longrightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{(\beta - k_2)}{2J} \pm \sqrt{\frac{(\beta - k_2)^2}{J^2} - \frac{4k_1}{J}}$$

$\longrightarrow$ k_1, k_2 possono essere scelti in modo arbitrario

$\Longrightarrow$ non esistono vincoli sulle prestazioni del sistema

retroazione: stato : $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$; uscita : $\bar{K} \in \mathbb{R}^{m \times p}$

se $m = p = 1$ allora

$K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$: n parametri

$\bar{K} \in \mathbb{R}$: 1 parametro

$\rightarrow$ retroazione dallo stato da preferire

$$\Sigma_{(K)} : \dot{x}(t) = (F + GK)x + Gv$$

cambio di base $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$

•) $z = T^{-1}x$

$$\Sigma'_{(K)} : \dot{z} = T^{-1}(F + GK)Tz + T^{-1}Gv$$
$$\overset{!}{=} (F' + G'K')z + G'v$$

con
$$F' = T^{-1}FT$$
$$G' = T^{-1}G$$
$$K' = KT$$

•) $z = T^{-1}x = \begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix}$

$$F' = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G' = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K' = \begin{array}{cc} k & n-k \\ \left[K_1 \right. & \left. K_2 \right] \end{array}$$

$$A' = F' + G'K' \overset{|}{=} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$$
$$= \left[\begin{array}{c|c} F_{11} + G_1K_1 & F_{12} + G_1K_2 \\ \hline 0 & F_{22} \end{array} \right]$$

$\Longrightarrow$ la retroazione non influenza il sottosistema non raggiungibile

CONTROLLO di SISTEMI a SINGOLO INGRESSO $(m = 1)$

Σ raggiungibile a tempo discr. : $x(t+1) = Fx(t) + g\,u(t)$ $\quad g \in \mathbb{R}^n$

$\Sigma_{(K)}$ retroazione dallo stato : $x(t+1) = \underbrace{(F + gK^T)}_{A} x(t) + g\,v(t)$ $\quad K \in \mathbb{R}^n$

come e quando è possibile determinare K in modo da garantire
$\underbrace{\Delta_A(\lambda) = p(\lambda)}_{\text{grado } n \text{ monico}} = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + p_1\lambda + p_0$?

•) Σ non raggiungibile $\Longrightarrow$ $\nexists\, K$ tale che $\Delta_A(\lambda) = p(\lambda)$ $\quad \forall\, p(\lambda)$

in quanto

$$\Delta_A(\lambda) = \Delta_{F_{11}+g_1 K_1^T} \cup \Delta_{F_{22}}$$ indipendente da K

•) Σ raggiungibile $\Rightarrow \exists\, K$ tale che $\Delta_A(\lambda) = p(\lambda) \quad \forall\, p(\lambda)$

Lemma (forma canonica/standard di controllo)

$\Sigma = (F, g)$ è raggiungibile se e solo se $\exists\, T_c \in \mathbb{R}^{n\times n}$ cambio di base (invertibile) tale che

$$F_c = T_c^{-1} F T_c = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ -\alpha_0 & \cdots & & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}}_{\text{matrice compagna}}, \quad g_c = T_c^{-1} g = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

con
$$\Delta_{F_c}(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} \cdots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$$

Sia $K_c^T = K^T T_c = [\, K_{c,1} \cdots K_{c,n} \,]$

allora

$$A_c = F_c + g_c K_c^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ -\alpha_0 & \cdots & & & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\, K_{c,1} \cdots K_{c,n} \,]$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -\alpha_0 + K_{c,1} & & \cdots & & -\alpha_{n-1} + K_{c,n} \end{bmatrix}}_{\text{matrice compagna}}$$

con
$$\Delta_{A_c}(\lambda) = \lambda^n + (\alpha_{n-1} - K_{c,n})\lambda^{n-1} + \cdots + (\alpha_1 - K_{c,2})\lambda + (\alpha_0 - K_{c,1})$$

$\Rightarrow \exists\, K^T = K_c^T T_c^{-1}$ tale che $\Delta_A(\lambda) = p(\lambda) \quad \forall\, p(\lambda)$

dal momento che

K_c^T è determinato ponendo $\Delta_{A_c}(\lambda) = p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0$

ovvero risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \alpha_0 - K_{c,1} = p_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} - K_{c,n} = p_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_{c,1} = \alpha_0 - p_0 \\ \vdots \\ K_{c,n} = \alpha_{n-1} - p_{n-1} \end{cases}$$

Proposizione

per ogni polinomio monico di grado n $\; p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0$

esiste un vettore di retroazione $K \in \mathbb{R}^n$ tale che $\Delta_{F+gK^T}(\lambda) = p(\lambda)$

se e solo il sistema $\Sigma = (F, g)$ è raggiungibile in generale

procedimento di allocazione degli autovalori

se Σ è raggiungibile allora per calcolare $K \in \mathbb{R}^n$
si risolve il sistema lineare di equazioni nelle incognite $K_1 \dots K_n$ con $K = \begin{bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix}$

$$\Delta_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - F - gK^T) = p(\lambda)$$

esempio

$x(t+1) = Fx(t) + g\,u(t)$ con $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

calcolare K^* tale che il sistema retroazionato abbia un unico autovalore $\lambda = 0$
con $m^a = 3$

$\longrightarrow \quad \Delta_A(\lambda) = p(\lambda) = \lambda^3 \qquad (p_0 = p_1 = p_2 = 0)$

•) esistenza di K^*

$$R = [\,g \;\; Fg \;\; F^2 g\,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det R = 1 + 3(-1) = -2 \neq 0 \implies \text{rank}\, R = 3$: Σ raggiungibile

•) calcolo di $K^* = [\,K_1 \;\; K_2 \;\; K_3\,]^T$

$$\begin{aligned} \Delta_A(\lambda) &= \det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - F - gK^T) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\,K_1 \; K_2 \; K_3\,] \right) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 1 - K_1 & -2 - K_2 & -K_3 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -K_1 & -1 - K_2 & \lambda - K_3 \end{bmatrix} \right) \\ &= \lambda^3 + (-1 - K_1 - K_3)\lambda^2 + (K_3 - 1 - K_2)\lambda + (1 - K_1 + K_2) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 1 - K_1 + K_2 = 0 \\ K_3 - 1 - K_2 = 0 \\ -1 - K_1 - K_3 = 0 \end{cases} \implies K^* = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -3/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$\boxtimes$

calcolo del vettore di retroazione tramite allocazione di autovalori $(m = 1)$

- se Σ raggiungibile
  allora
  il procedimento permette di allocare gli autovalori di A a piacimento

- se Σ non raggiungibile
  allora
  è possibile cambiare tramite retroazione solo gli autovalori di Σ_R (F_{11})

- se tutti gli autovalori vengono allocati in zero $(p(\lambda) = \lambda^n)$
  allora
  tutti i modi del sistema retroazionati convergono a zero in tempo finito.

  $\implies$ CONTROLLORE DEAD - BEAT

⚠ il procedimento rimane invariato per sistemi a tempo continuo

ma non è possibile avere controllori dead-beat

CONTROLLO di SISTEMI con PIÙ INGRESSI $(m>1)$

Σ raggiungibile a tempo discreto : $x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$ $\quad G \in \mathbb{R}^{n\times m}$

$\Sigma_{(K)}$ retroazione dallo stato : $x(t+1) = (F+GK)x(t) + Gv(t)$

osservazione

$$A = F + GK = F + \underbrace{[g_1 \ \cdots \ g_m]}_{\substack{m \text{ vettori colonna di} \\ \text{dimensione } n}} \underbrace{\begin{bmatrix} k_1^T \\ \vdots \\ k_m^T \end{bmatrix}}_{\substack{m \text{ vettori riga} \\ \text{di dimensione } n}} = F + \underbrace{g_1 k_1^T}_{n\times n} + \underbrace{g_2 k_2^T}_{n\times n} + \cdots + \underbrace{g_m k_m^T}_{n\times n}$$

idea!

selezionare un singolo ingresso u_i (una sola riga k_i^T) e usare la procedura viste in precedenza

ma $\Sigma = (F, g_i)$ potrebbe essere non raggiungibile

esempio

$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$ con $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [g_1 \ \vdots \ g_2]$

$R = [G \ \ FG] = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \text{rank } R = 2 \Rightarrow \Sigma$ raggiungibile

$R_1 = [g_1 \ \ Fg_1] = \left[\begin{array}{c:c} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \text{rank } R_1 = 1 \Rightarrow \Sigma$ non raggiungibile da u_1

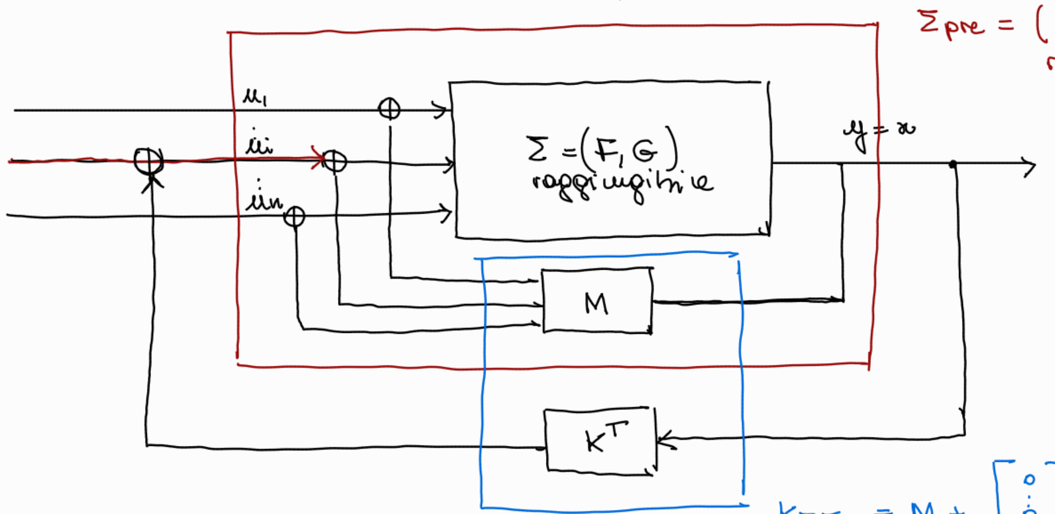
$R_2 = [g_2 \ \ Fg_2] = \left[\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \text{rank } R_2 = 1 \Rightarrow$ " da u_2

⊠

idea!

rendere Σ raggiungibile da un singolo ingresso u_i con una retroazione preliminare

$\Sigma_{pre} = (F+GM, g_i)$ raggiungibile



$$K_{TOT} = M + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \longleftarrow i\text{-esima riga}$$

Lemma di Heymann

Se $\Sigma = (F, G)$ è raggiungibile e se $g_i \in \mathbb{R}^n$ è una delle m colonne di G non nulla allora
esiste una matrice $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che $\Sigma_{pre} = (F + GM, g_i)$ è raggiungibile

esempio

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \qquad \text{con} \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix}$$

calcolare K^* tale che gli autovalori del sistema retroazionato siano uguali a $\lambda = 1/2$ con molteplicità algebrica 2

$$\rightarrow \Delta_A(\lambda) = p(\lambda) = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 = \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} \qquad \begin{matrix} p_0 = 1/4 \\ p_1 = -1 \end{matrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{allora} \quad F + GM = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{pre} = (F + GM, g_1)$$

$$R_{pre} = \begin{bmatrix} g_1 & (F+GM) g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{rank } R_{pre} = 2$$

$$\Longrightarrow \Sigma_{pre} \text{ raggiungibile}$$

$$k = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} : \quad A = (F + GM) + g_1 k^T = \begin{bmatrix} \dots \end{bmatrix}$$

$$\Delta_A(\lambda) = \lambda^2 - k_1 \lambda - k_2 \quad = \quad p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} k_1 = 1 \\ k_2 = -1/4 \end{matrix} \qquad k = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/4 \end{bmatrix}$$

$$K^* = K_{TOT} = M + \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

☒

calcolo della matrice di retroazione tramite allocazione degli autovalori ($m > 1$)

- esistono diversi algoritmi per il calcolo di M
  M a caso funziona!
- è possibile usare il metodo diretto risolvendo $\Delta_A(\lambda) = \Delta_{F+GK}(\lambda) = p(\lambda)$
  <u>ma</u> potrebbe essere complesso e non lineare
- approccio di Heymann consente di allocare gli autovalori di A a piacemento per $m > 1$ <u>ma</u> ha due limitazioni

STABILIZZABILITÀ dei SISTEMI

un sistema Σ si dice stabilizzabile se esiste un controllo in retroazione dallo stato che rende il sistema asintoticamente stabile

a tempo discreto	a tempo continuo
Σ stabilizzabile	Σ stabilizzabile
$\longleftrightarrow$ gli autovalori non ragg. hanno modulo < 1	$\longleftrightarrow$ gli autovalori non ragg. hanno parte reale < 0
$\longleftrightarrow$ $PBH(z) = [zI - F \quad G]$ ha rango pieno n $\forall z$ con $\lvert z \rvert \geq 1$	$\longleftrightarrow$ $PBH(z) = [zI - F \quad G]$ ha rango pieno n $\forall z$ con $\mathrm{Re}(z) \geq 0$
raggiungibilità $\longrightarrow$ controllabilità $\downarrow$ stabilizzab.	raggiungibilità $\longleftrightarrow$ controllabilità $\downarrow$ stabilizzab.