① modellizzazione di sistemi dinamici

sistema = modello matematico

$$u \longrightarrow \boxed{\Sigma \quad x} \xrightarrow{\;y\;}$$

$x \in \mathbb{R}^n$
$u \in \mathbb{R}^m$
$y \in \mathbb{R}^p$

Σ deterministico
dinamico causale
tempo-invariante
lineare (linearizzato)
a tempo continuo o discreto
autonomo o non autonomo

↳ rappresentazione interna o in spazio di stato

$$\boxed{\underset{LTI}{\Sigma} : (F, G, H, J)}$$

$F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times m}$
$H \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $J \in \mathbb{R}^{p\times m}$

>> principio di sovrapposizione degli effetti

$$\begin{array}{lcl} x'(\cdot),\, y'(\cdot) & \propto & x_0',\, u'(\cdot) \\ x''(\cdot),\, y''(\cdot) & \propto & x_0'',\, u''(\cdot) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \alpha x'(\cdot) + \beta x''(\cdot) \\ \alpha y'(\cdot) + \beta y''(\cdot) \end{array} \propto \begin{array}{l} \alpha x_0' + \beta x_0'' \\ \alpha u'(\cdot) + \beta u''(\cdot) \end{array}$$

▷ linearizzazione di sistemi non lineari

↳ punto di equilibrio

$$\bar{x}, \bar{u} \; : \; \begin{array}{ll} f(\bar{x}, \bar{u}) = 0 & t.c. \\ f(\bar{x}, \bar{u}) = \bar{x} & t.d. \end{array}$$

•) semplicemente stabile : $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tale che $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta \rightarrow \|x(t) - \bar{x}\| \leq \varepsilon \;\; \forall t \geq 0$

•) asintoticamente stabile : sempl. stabile $\oplus$ $\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x}$

$$\left.\begin{array}{l} \delta_x = x - \bar{x} \\ \delta_u = u - \bar{u} \end{array}\right\} \quad \dot{\delta}_x = J_f^{(x)}(\bar{x}, \bar{u})\, \delta_x + J_f^{(u)}(\bar{x}, \bar{u})\, \delta_u$$

② dinamica di sistemi dinamici

•) tempo continuo

– dominio del tempo

$$\begin{aligned} x(t) &= x_\ell(t) + x_f(t) \\ &\overset{!}{=} e^{Ft} x_0 + \int_0^t e^{F(t-\tau)} G u(\tau)\, d\tau \\ y(t) &= y_\ell(t) + y_f(t) \\ &\overset{!}{=} H e^{Ft} x_0 + \int_0^t \left(H e^{F(t-\tau)} G + J \delta(t-\tau)\right) u(\tau)\, d\tau \\ &\overset{!}{=} H e^{Ft} x_0 + \int_0^t W(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ modi elementari : $e^{\lambda_i t}, \dots, \dfrac{t^{m_{ij}^f - 1}}{m_{ij}^f - 1} e^{\lambda_i t}$

$n = 2$: $e^{\lambda_i t}$, $t e^{\lambda_i t}$

$n = 3$: $e^{\lambda_i t}$, $t e^{\lambda_i t}$, $\frac{t^2}{2} e^{\lambda_i t}$

•) convergenti se $Re[\lambda_i] < 0$
•) limitati se $Re[\lambda_i] = 0$ & $m_i^g = m_i^f$
•) divergenti se $Re[\lambda_i] \geq 0$

- dominio delle frequenze

$$X(s) = X_\ell(s) + X_f(s)$$
$$\stackrel{!}{=} (sI-F)^{-1}x_0 + (sI-F)^{-1}G\,U(s)$$
$$Y(s) = Y_\ell(s) + Y_f(s)$$
$$\stackrel{!}{=} H(sI-F)^{-1}x_0 + H(sI-F)^{-1}G\,U(s) + J\,U(s)$$
$$\stackrel{!}{=} H(sI-F)^{-1}x_0 + W(s)\,U(s)$$

•) tempo discreto

- dominio del tempo

$$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t)$$
$$\stackrel{!}{=} F^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-1-k} G\,u(k)$$
$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t)$$
$$\stackrel{!}{=} HF^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1}\left(HF^{t-1-k}G\,u(k) + J\,u(k)\right)$$
$$\stackrel{!}{=} HF^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} W(t-k)\,u(k)$$

$$\hookrightarrow W(t) = \begin{cases} HF^{t-1-k}G & t \neq 0 \\ J & t = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ modi elementari : $\binom{t}{0}\lambda_i^t \quad \dots \quad \binom{t}{m_{ij}^r - 1}\lambda_i^{t-m_{ij}^r+1}$ se $\lambda_i \neq 0$

$\delta(t) \quad \dots \quad \delta(t - m_{ij}^r + 1)$ se $\lambda = 0$

$n = 2$: $\lambda_i^t,\ t\,\lambda_i^{t-1}$

$\delta(t),\ \delta(t-1)$

$n = 3$: $\lambda_i^t,\ t\,\lambda_i^{t-1},\ \frac{t(t-1)}{2}\lambda_i^{t-2}$

$\delta(t),\ \delta(t-1),\ \delta(t-2)$

•) convergenti se $|\lambda_i| < 1$
•) limitati se $|\lambda_i| = 1$ & $m_i^g = m_i^a$
•) divergenti se $|\lambda_i| \geq 1$

- dominio delle frequenze

$$X(z) = X_\ell(z) + X_f(z)$$
$$\stackrel{!}{=} (zI-F)^{-1}z\,x_0 + (zI-F)^{-1}G\,U(z)$$
$$Y(z) = Y_\ell(z) + Y_f(z)$$
$$\stackrel{!}{=} H(zI-F)^{-1}z\,x_0 + H(zI-F)^{-1}G\,U(z) + J\,U(z)$$
$$\stackrel{!}{=} H(zI-F)^{-1}z\,x_0 + W(z)\,U(z)$$

▷ Stabilità alla Lyapunov

•) Sistemi lineari

- stab. asintotica se $Re[\lambda_i] < 0$ / $|\lambda_i| < 1$ con λ_i autovalori di F
- stab. semplice se $Re[\lambda_i] = 0$ / $|\lambda_i| = 1$ & $m_i^g = m_i^a$ "
- instabilità se $Re[\lambda_i] \geq 0$ / $|\lambda_i| \geq 1$ "

- BIBO stabilità se $Re[p_i] < 0$ / $|p_i| < 1$ con p_i poli di $W(s)$ / $W(z)$ ridotte ai minimi termini

(asint. stabilità $\to$ BIBO stab.)

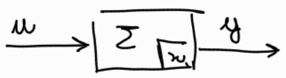
-) sistemi non lineari

sistema linearizzato attorno a un punto di equilibrio è asintot. stabile / instabile allora il punto di eq. è asint. stabile / instabile per il sistema d'origine

③ raggiungibilità e controllabilità

	tempo discreto	tempo continuo
raggiungibilità $R = [G\ FG \dots F^{n-1}G]$	$X_R = \operatorname{im} R$ Σ raggiungibile $\iff X_R = \mathbb{R}^n$ $\iff \operatorname{rank} R = n$ $\iff \operatorname{rank}(PBH(z)) = n$ $\forall z$: autovalore di F	$X_R = \operatorname{im} R$ //
controllabilità	$X_C = \{ x \in \mathbb{R}^n : F^n x \in X_R \}$ Σ controllabile $\iff X_C = \mathbb{R}^n$ $\iff \operatorname{im} F^n \subseteq X_R$ $\iff \operatorname{rank}(PBH(z)) = n$ $\forall z,\ z \neq 0$: autovalore di F $\Longleftarrow \Sigma$ raggiungibile	$X_C = X_R$ Σ controllabile $\iff \Sigma$ raggiungibile

④ RETROAZIONE dallo STATO



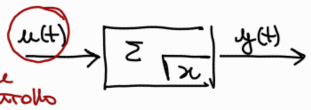
problema di controllo: manipolare il sistema per raggiungere un dato obiettivo agendo su $u(t)$

- problema di regolazione (regulation): stabilizzare il sistema ad uno stato desiderato

- problema di asservimento (tracking): inseguire un riferimento desiderato

soluzione di controllo

controllo in catena aperta
open loop
(feed forward (FF)

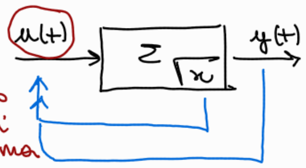


- specifiche di controllo
- informazioni sul sistema

⊕ semplice

⊖ poco robusto

controllo in catena chiusa
closed loop
feedback (FB)



- specifiche di controllo
- informazioni sul sistema
- dinamica del sistema

⊕ robusto

⊖ complesso

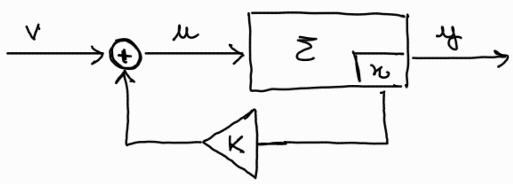
	retroazione statica	retroazione dinamica
retroazione dallo stato	$u(t) = f(x(t))$	$u(t) = f(u(\tau), x(\tau))$ $\tau \in [t_0, t]$
retroazione dall'uscita	$u(t) = f(y(t))$	$u(t) = f(u(\tau), y(\tau))$ $\tau \in [t_0, t]$

CONTROLLO in RETROAZIONE STATICA

$$\Sigma: \quad \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$$
$$y(t) = Hx(t)$$

$J = 0$ per semplicità

- controllo in retroazione statica dallo stato



$v(t) \in \mathbb{R}^m$: ingresso ausiliario
se costante serve a assegnare un determinato equilibrio al sistema

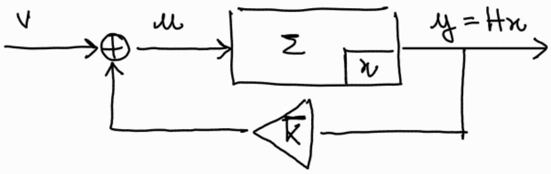
$$u(t) = v(t) + \boxed{Kx(t)}$$

$K \in \mathbb{R}^{m \times n}$
MATRICE di RETROAZIONE

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$$
$$\overset{!}{=} Fx(t) + G(v(t) + Kx(t)) = (F + GK)x(t) + Gv(t) = Ax(t) + Gv(t)$$

$$y(t) = Hx(t)$$

- controllo in retroazione statica dall' uscita

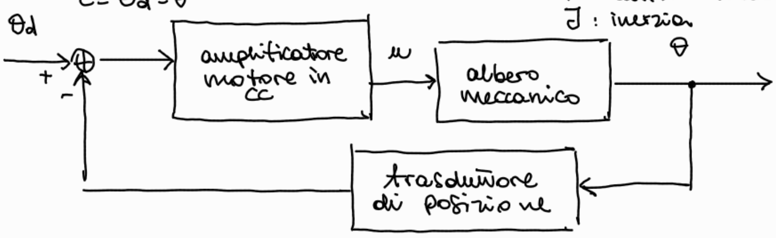


$$u(t) = v(t) + \bar{K}\,y(t) \overset{!}{=} v(t) + \boxed{\bar{K} H x(t)}$$

$\bar{K} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ MATRICE di RETROAZIONE

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$$
$$\overset{!}{=} Fx(t) + G\left(v(t) + \bar{K}Hx(t)\right) = (F + \underset{n\times m \;\; m\times p \;\; p\times n}{G\bar{K}H})\,x(t) + Gv(t) = Ax(t) + Gv(t)$$
$$y(t) = Hx(t)$$

esempio : retroazione dall' uscita



β : attrito viscoso
J : inerzia

coppia esercitata dal motore è PROPORZIONALE all' errore $e = \theta_d - \theta$

hp. •) $\theta_d = 0$

•) le costanti di tempo di trasduttore e motore sono trascurabili rispetto alla costante di tempo meccanica

$$J\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} - u = 0$$
$$J\ddot{\theta} = -\beta\dot{\theta} + u$$
$$y = \theta$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u = Fx + gu$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x = h^T x$$

$$u = k \cdot e = k(\theta_d - \theta) = k \cdot (-\theta) = -k\theta = -ky = -k h^T x \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$\dot{x} = \left(F + g(-kh^T)\right) x = (F - k g h^T)\, x$$
$$\overset{!}{=} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\beta/J \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} 0 \\ 1/J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) x$$
$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{J} & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix}}_{A} x$$

$$\Delta_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{k}{J} & \lambda - \frac{\beta}{J} \end{bmatrix} = \lambda^2 + \frac{\beta}{J}\lambda + \frac{k}{J}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{\beta}{J} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{J^2} - 4\frac{K}{J}}}{2}$$

$$= -\frac{\beta}{2J} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{J^2} - 4\frac{K}{J}}$$

$\forall \bar{K}$: $\max_{i=1,2} \mathrm{Re}[\lambda_i] \geq -\frac{\beta}{2J}$: i modi elementari del sistema retroazionato non possono tendere a zero più rapidamente di $e^{-\beta/2J}$

$\longrightarrow$ vincoli fisici sulla prontezza del sistema

☒