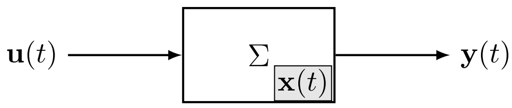
4 RETROAZIONE DALLO STATO

Dato il sistema Σ con con stato $\mathbf{x}(t)$, ingresso $\mathbf{u}(t)$ e uscita $\mathbf{y}(t)$

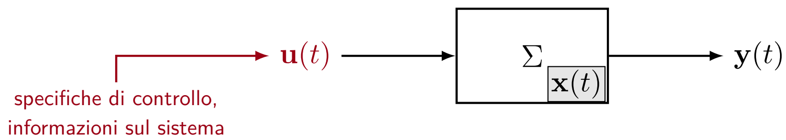


problema di controllo: manipolare il sistema per raggiungere un dato obiettivo agendo sull'ingresso $\mathbf{u}(t)$

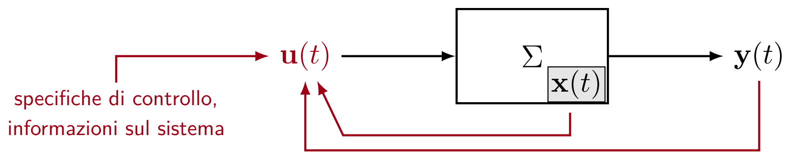
- **problema di regolazione (regulation)**: stabilizzare il sistema ad uno stato desiderato (tipicamente zero)
- **problema di asservimento (tracking)**: inseguire un andamento desiderato dell'uscita

soluzione di controllo

- **controllo in catena aperta o open-loop o feedforward**: la legge di controllo $\mathbf{u}(t)$ non dipende dai valori di $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$
  $\rightarrow$ approccio semplice, ma non ideale se il sistema è incerto e/o soggetto a disturbi esterni



- **controllo in retroazione o closed-loop o feedback**: la legge di controllo $\mathbf{u}(t)$ dipende dai valori di $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$
  $\rightarrow$ approccio più complesso (richiede sensori di misura), ma robusto a incertezze e/o disturbi esterni



  in particolare

  - **retroazione statica**
    - **dallo stato**: $\mathbf{u}(t) = f(\mathbf{x}(t))$ (allo stesso istante t)
    - **dall'uscita**: $\mathbf{u}(t) = f(\mathbf{y}(t))$ (allo stesso istante t)

  - **retroazione dinamica**
    - **dallo stato**: $\mathbf{u}(t) = f(\mathbf{u}(\tau), \mathbf{x}(\tau))$, $\tau \in [t_0, t]$, $t_0 < t$
    - **dall'uscita**: $\mathbf{u}(t) = f(\mathbf{u}(\tau), \mathbf{y}(\tau))$, $\tau \in [t_0, t]$, $t_0 < t$

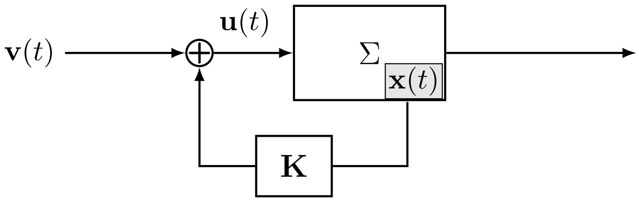
4.1 Controllo in retroazione statica

dato

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\
\mathbf{y}(t) &= \mathbf{H}\mathbf{x}(t)
\end{aligned}
$$

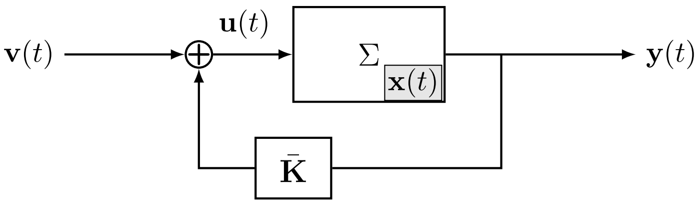
allora

- *controllo in reatroazione statica dallo stato*: $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$, $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$



$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= (\mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{v}(t) \\
\mathbf{y}(t) &= \mathbf{H}\mathbf{x}(t)
\end{aligned}
$$

- *controllo in reatroazione statica dall'uscita*: $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{K}}\mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$, $\bar{\mathbf{K}} \in \mathbb{R}^{m\times p}$



$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= (\mathbf{F} + \mathbf{G}\bar{\mathbf{K}}\mathbf{H})\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{v}(t) \\
\mathbf{y}(t) &= \mathbf{H}\mathbf{x}(t)
\end{aligned}
$$

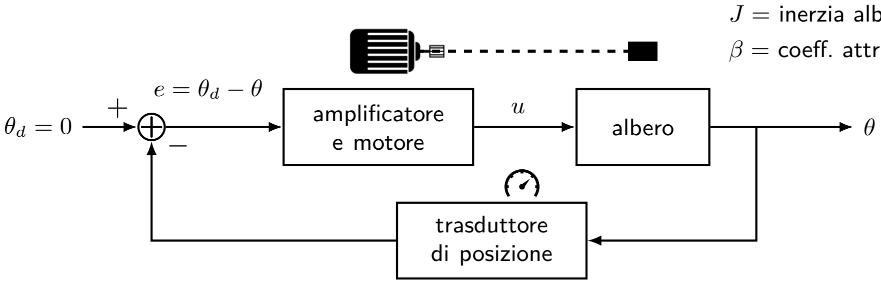
esempio: retroazione dall'uscita

problema di controllo: regolare la posizione angolare di un albero meccanico collegato all'asse di un motore in cc $\rightarrow$ determinare una legge di controllo tale da riportare l'albero nella posizione desiderata θ_d il più rapidamente possibile in caso di perturbazione

$\Rightarrow$ controllo di tipo proporzionale: la coppia esercitata dal motore è proporzionale all'errore $e(t) = \theta_d - \theta(t)$

ipotesi 1) le costanti di tempo di traduttore e motore sono trascurabili rispetto alla costante di tempo meccanica
2) si assume $\theta_d = 0$ per semplicità

J = inerzia albero
β = coeff. attrito viscoso



equazioni del moto dell'albero

$$
\begin{aligned}
J\ddot{\theta} &= -\beta\dot{\theta} + u \\
y &= \theta
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{g}u \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \\
\mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{h}^\top \mathbf{x}
\end{aligned}
$$

legge di controllo

$$u = ke = \bar{k}(\theta_d - \theta) = -\bar{k}\theta = -\bar{k}\mathbf{h}^\top \mathbf{x} \quad \bar{k} \in \mathbb{R}$$

equazioni del moto controllato dell'albero

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{F} - \mathbf{g}\,\bar{k}\mathbf{h}^\top)\mathbf{x} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} - \bar{k}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\right)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\bar{k}}{J} & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{h}^\top \mathbf{x}$$

► scegliere $\bar{k} \in \mathbb{R}$ tale che i modi del sistema retroazionato vadano a zero il più rapidamente possibile (la parte reale degli autovalori di $\mathbf{A}$ sia la più negativa possibile)

$$\Delta_{\mathbf{A}}(s) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{\bar{k}}{J} & \lambda + \frac{\beta}{J} \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + \frac{\beta}{J}\lambda + \frac{\bar{k}}{J} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2J} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta^2}{J^2} - 4\frac{\bar{k}}{J}}$$

$\forall \bar{k} \in \mathbb{R}: \quad \max_{i=1,2} \Re[\lambda_i] \geq -\frac{\beta}{2J}$: i modi elementari del sistema retroazionato non potranno mai tendere a zero più rapidamente di $e^{-\frac{\beta}{2J}}$ $\rightarrow$ esistono dei vincoli sulla prontezza del sistma retroazionato

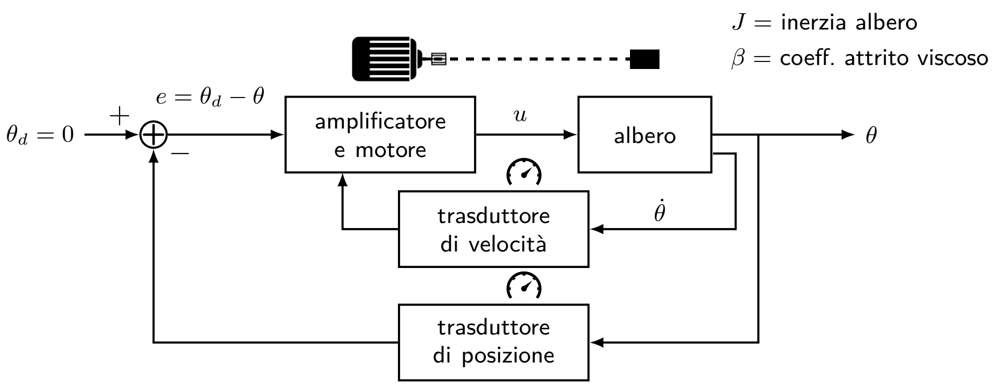
⊠

esempio: retroazione dallo stato

problema di controllo: regolare la posizione angolare di un albero meccanico collegato all'asse di un motore in cc $\rightarrow$ determinare una legge di controllo tale da riportare l'albero nella posizione desiderata θ_d il più rapidamente possibile in caso di perturbazione

$\Rightarrow$ controllo di tipo proporzionale: la coppia esercitata dal motore è proporzionale all'errore $e(t) = \theta_d - \theta(t)$

ipotesi 1) le costanti di tempo di traduttore e motore sono trascurabili rispetto alla costante di tempo meccanica
2) si assume $\theta_d = 0$ per semplicità



equazioni del moto dell'albero

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta} &= -\beta\dot{\theta} + u \\ y &= \theta \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}u = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{g}u \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{h}^\top \mathbf{x} \end{aligned}$$

legge di controllo

$$u = k_1 e + k_2\dot{\theta} = -k_1\theta + k_2\dot{\theta} = -\begin{bmatrix} k_1 & -k_2 \end{bmatrix}\mathbf{x} = -\mathbf{k}^\top \mathbf{x} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

equazioni del moto controllato dell'albero

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{F} - \mathbf{g}\,\mathbf{k}^\top)\mathbf{x} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 & -k_2 \end{bmatrix}\right)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{J} & -\frac{(\beta-k_2)}{J} \end{bmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

▶ scegliere $\bar{k} \in \mathbb{R}$ tale che i modi del sistema retroazionato vadano a zero il più rapidamente possibile (la parte reale degli autovalori di $\mathbf{A}$ sia la più negativa possibile)

$$\Delta_{\mathbf{A}}(s) = \det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{k_1}{J} & \lambda + \frac{(\beta-k_2)}{J} \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + \frac{(\beta-k_2)}{J}\lambda + \frac{k_1}{J} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -\frac{(\beta-k_2)}{2J} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\beta-k_2)^2}{J^2} - 4\frac{k_1}{J}}$$

al variare di $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ è possibile ottenere qualsiasi combinazione di modi elementari del sistema retroazionato $\rightarrow$ non esistono dei vincoli sulla prontezza del sistma retroazionato

⊠

Dato il sistema retroazionato dallo stato

$$\Sigma_{(\mathbf{K})}: \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{v}(t)$$

sia $\mathbf{z} \triangleq \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$ dove $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ rappresenta una matrice di cambio di base
allora è possibile riscrivere le equazioni dei sistema nella nuova base

$$\Sigma'_{(\mathbf{K})}: \quad \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K})\mathbf{T}\mathbf{z}(t) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{v}(t)$$

ovvero

$$\Sigma'_{(\mathbf{K})}: \quad \dot{\mathbf{z}}(t) = (\mathbf{F}' + \mathbf{G}'\mathbf{K}')\mathbf{z}(t) + \mathbf{G}'\mathbf{v}(t), \qquad \mathbf{F}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T}, \mathbf{G}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}, \mathbf{K}' = \mathbf{K}\mathbf{T}$$

è possibile scegliere $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si modo che $\mathbf{z} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x}_R \\ \mathbf{x}_{NR} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_R \in \mathbb{R}^k$ e di conseguenza

$$\mathbf{F}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}' = \mathbf{K}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix}$$

con $\mathbf{F}_{11} \in \mathbb{R}^{k\times k}, \mathbf{F}_{12} \in \mathbb{R}^{k\times(n-k)}, \mathbf{F}_{22} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$, $\mathbf{G}_1 \in \mathbb{R}^{k\times m}, \mathbf{K}_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{K}_2 \in \mathbb{R}^{m\times(n-k)}$
allora si verifica che

$$\mathbf{F}' + \mathbf{G}'\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} + \mathbf{G}_1\mathbf{K}_1 & \mathbf{F}_{12} + \mathbf{G}_1\mathbf{K}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{22} \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ la retroazione non influenza il sottosistema non raggiungibile
non è possibile modificare gli autovalori "non raggiungibili" del sistema

4.1.1 Controllo di sistemi a singolo ingresso

si consideri il sistema a tempo discreto **raggiungibile** con un singolo ingresso ($m = 1$)

$$\Sigma: \quad \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t), \quad \mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$$

e si consideri poi la retroazione della stato

$$\Sigma_{(\mathbf{K})}: \quad \mathbf{x}(t+1) = (\mathbf{F} + \mathbf{g}\mathbf{k}^\top)\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}v(t), \quad \mathbf{g}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$$

è possibile assegnare a $\mathbf{A} = \mathbf{F} + \mathbf{g}\mathbf{k}^\top$ degli autovalori desiderati?

- Σ non raggiungibile $\implies \nexists\, \mathbf{k}^\top$ tale che $\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = p(\lambda)$
in quanto (forma standard di raggiungibilità) $\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = \Delta_{\mathbf{F}_{11}+\mathbf{g}_1\mathbf{k}_1^\top}(\lambda) \cup \Delta_{\mathbf{F}_{22}}(\lambda)$ e non è possibile modificare gli autovalori "non raggiungibili" del sistema tramite retroazione

- Σ raggiungibile $\implies \exists\, \mathbf{k}^\top$ tale che $\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = p(\lambda)$
in quanto

Lemma (Forma canonica di controllo)
Il sistema $\Sigma = (\mathbf{F}, \mathbf{g})$ è raggiungibile se e solo se esiste una matrice di cambio di base $\mathbf{T}_c \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che

$$\mathbf{F}_c = \mathbf{T}_c^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{g}_c = \mathbf{T}_c^{-1}\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{F}_c \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è una matrice compagna con polinomio caratteristico $\Delta_{\mathbf{F}_c}(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_0$.

sia quindi $\mathbf{k}_c^\top = \mathbf{k}^\top\mathbf{T}_c = \begin{bmatrix} k_{c,1} & \dots & k_{c,n} \end{bmatrix}, \mathbf{k}_c \in \mathbb{R}^n$
allora

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_c &= \mathbf{F}_c + \mathbf{g}_c\mathbf{k}_c^\top \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{c,1} & \dots & k_{c,n} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ -\alpha_0 + k_{c,1} & -\alpha_1 + k_{c,2} & -\alpha_2 + k_{c,3} & \dots & -\alpha_{n-1} + k_{c,n} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

dove $\mathbf{A}_c \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è una matrice compagna con polinomio caratteristico $\Delta_{\mathbf{A}_c}(\lambda) = \lambda^n + (\alpha_{n-1} - k_{c,n})\lambda^{n-1} + \ldots + (\alpha_0 - k_{c,1})$

di conseguenza, è possibile determinare $\mathbf{k}_c^\top$ in modo che $\Delta_{\mathbf{A}_c}(\lambda) = p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + p_0$ risolvendo il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} \alpha_{n-1} - k_{c,n} & = p_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_0 - k_{c,1} & = p_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_{c,n} & = \alpha_{n-1} - p_{n-1} \\ \vdots \\ k_{c,1} & = \alpha_0 - p_0 \end{cases}$$

per tanto
Σ raggiungibile $\implies \exists\, \mathbf{k}^\top = \mathbf{k}_c^\top\mathbf{T}_c^{-1}$ tale che $\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = p(\lambda)$ con $\mathbf{k}_c^\top$ tale che $\Delta_{\mathbf{A}_c}(\lambda) = p(\lambda)$

Proposizione Per ogni polinomio monico di grado n

$$p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0, \; p_i \in \mathbb{R},$$

esiste un vettore di retroazione $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\Delta_{\mathbf{F}+\mathbf{g}\mathbf{k}^\top}(\lambda) = p(\lambda)$ se e solo se il sistema Σ è raggiungibile.

in generale, se Σ è raggiungibile, come è possibile assegnare a $\mathbf{A} = \mathbf{F} + \mathbf{g}\mathbf{k}^\top$ degli autovalori desiderati?

sia $p(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0$ il polinomio relativo agli autovalori desiderati
allora è necessario risolvere nell'incognita $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 & \cdots & k_n \end{bmatrix}^\top$

$$\boxed{\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{F} - \mathbf{g}\mathbf{k}^\top) = p(\lambda)}$$

sistema di equazioni *lineari* con incognite $k_1, \ldots, k_n$

esempio

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

calcolare il vettore di retroazione $\mathbf{k}^*$ tale che il sistema retroazionato abbia un unico autovalore $\lambda = 0$ con $m^a = 3$

- esistenza di $\mathbf{k}^*$

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} & \mathbf{F}\mathbf{g} & \mathbf{F}^2\mathbf{g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \to \det(\mathcal{R}) = -2 \neq 0 \quad \to \Sigma = (\mathbf{F}, \mathbf{g})\text{raggiungibile} \quad \Rightarrow \mathbf{k}^*\text{esiste}$$

- calcolo di $\mathbf{k}^* = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}^\top$

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{F} - \mathbf{g}\mathbf{k}^\top) &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 1 - k_1 & -2 - k_2 & -k_3 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -k_1 & -1 - k_2 & \lambda - k_3 \end{bmatrix}\right) \\ &= \lambda^3 + \lambda^2(-1 - k_1 - k_3) + \lambda(k_3 - 1 - k2) + (1 - k_1 + k_2) \\ &= p(\lambda) = \lambda^3 \end{aligned}$$

$$\to \begin{cases} -1 - k_1 - k_3 = 0 \\ k_3 - 1 - k2 = 0 \\ 1 - k_1 + k_2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \mathbf{k}^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^\top$$

⊠

calcolo del vettore di retroazione tramite allocazione autovalori (caso $m = 1$)

1. Il procedimento permette di allocare gli autovalori di $\mathbf{F} + \mathbf{g}\mathbf{k}^\top$ a piacimento
   L'unico vincolo è la raggiungibilità di Σ e il fatto che se un autovalore è complesso deve esserci anche il suo complesso coniugato.
2. Se il sistema Σ non è raggiungibile allora è possibile cambiare tramite retroazione solo gli autovalori di $\mathbf{F}_{11}$ (matrice di stato del sottosistema raggiungibile).
3. Se tutti gli autovalori vengono allocati in zero ($p(\lambda) = \lambda^n$) tutti i modi del sistema retroazionato convergono a zero in tempo finito. Il controllore in questo caso viene detto *controllore dead-beat*
4. Il procedimento rimane invariato per sistemi a tempo continuo, ma in questo caso non si possono avere controllori dead-beat.

4.1.2 Controllo di sistemi con più ingressi

si consideri il sistema a tempo discreto **raggiungibile** con più ingressi ($m > 1$)

$$\Sigma: \quad \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

e si consideri poi la retroazione della stato

$$\Sigma_{(\mathbf{K})}: \quad \mathbf{x}(t+1) = (\mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{v}(t), \quad \mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

se Σ è raggiungibile, è possibile assegnare a $\mathbf{A} = \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K}$ degli autovalori desiderati?

si osserva che

$$\mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K} = \mathbf{F} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 & \cdots & \mathbf{g}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{k}_m^\top \end{bmatrix} = \mathbf{F} + \mathbf{g}_1\mathbf{k}_1^\top + \cdots + \mathbf{g}_m\mathbf{k}_m^\top$$

si potrebbe selezionare un singolo ingresso (una sola riga $\mathbf{k}_i^\top$ non nulla) ed usare la procedura vista prima per il caso singolo ingresso ($m = 1$) **ma**, anche se il sistema Σ è raggiungibile, non è detto che lo sia usando un singolo ingresso

esempio

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Σ raggiungibile
  $\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{F}\mathbf{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \text{rank}(\mathcal{R}) = 2$
- Σ **non** raggiungibile con un ingresso

$$\mathbf{g}_1 : \mathcal{R}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 & \mathbf{F}\mathbf{g}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \text{rank}(\mathcal{R}^{(1)}) = 1$$

$$\mathbf{g}_2 : \mathcal{R}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_2 & \mathbf{F}\mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \text{rank}(\mathcal{R}^{(2)}) = 1$$

⊠

se Σ è raggiungibile ma **non** da un ingresso, è possibile assegnare a $\mathbf{A} = \mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{K}$ degli autovalori desiderati?
si potrebbe usare una retroazione preliminare che renda Σ raggiungibile da un ingresso

Lemma (Lemma di Heymann)
Se $(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ è raggiungibile e se $\mathbf{g}_i \in \mathbb{R}^n$ è una colonna non nulla di $\mathbf{G}$, esiste una matrice $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che $(\mathbf{F} + \mathbf{G}\mathbf{M}, \mathbf{g}_i)$ è raggiungibile.

esempio

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcolare la matrice di retroazione $\mathbf{K}^*$ tale che il sistema retroazionato abbia un unico autovalore $\lambda = 1/2$ con $m^a = 2$?

- esistenza di $\mathbf{K}^*$
  $\mathcal{R} = \begin{bmatrix}\mathbf{G} & \mathbf{FG}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ $\to$ rank$(\mathcal{R}) = 2$ $\to \Sigma = (\mathbf{F}, \mathbf{G})$raggiungibile $\Rightarrow \mathbf{K}^*$esiste

- calcolo di $\mathbf{K}^*$

  $\mathbf{g}_1 \ : \ \mathcal{R}^{(1)} = \begin{bmatrix}\mathbf{g}_1 & \mathbf{Fg}_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ $\to$ rank$(\mathcal{R}^{(1)}) = 1$ $\to \Sigma = (\mathbf{F}, \mathbf{g}_1)$ **non** raggiungibile

  $\mathbf{g}_2 \ : \ \mathcal{R}^{(2)} = \begin{bmatrix}\mathbf{g}_2 & \mathbf{Fg}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ $\to$ rank$(\mathcal{R}^{(2)}) = 1$ $\to \Sigma = (\mathbf{F}, \mathbf{g}_2)$ **non** raggiungibile

  sia $\mathbf{M} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ allora $\mathbf{F} + \mathbf{GM} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

  $\mathcal{R}_{pre} = \begin{bmatrix}\mathbf{g}_1 & (\mathbf{F} + \mathbf{GM})\mathbf{g}_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $\to$ rank$(\mathcal{R}_{pre}) = 2$ $\to \Sigma_{pre} = (\mathbf{F} + \mathbf{GM}, \mathbf{g}_1)$raggiungibile

  sia $\mathbf{k} = \begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}^\top$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, sia $\mathbf{A}_1 = \mathbf{F} + \mathbf{GM} + \mathbf{g}_1\mathbf{k}^\top$

  $$\Delta_{\mathbf{A}_1}(\lambda) = \text{det}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{F} - \mathbf{GM} - \mathbf{g}_1\mathbf{k}^\top) = \lambda^2 - k_1\lambda - k_2 = p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1/4$$

  allora $\mathbf{k} = \begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix}1 & -1/4\end{bmatrix}^\top$
  di conseguenza

  $$\mathbf{K}^* = \mathbf{M} + \begin{bmatrix}\mathbf{k}^\top\\ \mathbf{0}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1/4\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

⊠

calcolo della matrice di retroazione tramite allocazione autovalori (caso $m > 1$)

1. Esistono algoritmi per trovare la matrice di retroazione preliminare $\mathbf{M}$. Tuttavia, generando una matrice $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ "a caso" questa renderà Σ raggiungibile da un qualsiasi ingresso quasi certamente (con probabilità 1).

2. Un approccio alternativo è usare il metodo diretto (cioè risolvere $\Delta_{\mathbf{F}+\mathbf{GK}}(\lambda) = p(\lambda)$ con incognite gli elementi di $\mathbf{K}$) anche nel caso $m > 1$. In questo caso, però il sistema di equazioni da risolvere potrebbe essere non lineare.

3. L'approccio tramite lemma di Heymann ci permette di allocare gli autovalori della matrice $\mathbf{F}+\mathbf{GK}$ a nostro piacimento anche per $m > 1$, ma ha delle limitazioni.
   Ad esempio, usando un singolo ingresso non si possono ottenere controllori dead-beat che portano a zero lo stato in un numero di passi $< n$. Usando più ingressi invece è possibile costruire controllori dead-beat che portano a zero lo stato in un numero di passi $< n$. Tramite tecniche di controllo più avanzate che sfruttano tutti gli ingressi di controllo si possono ottenere quindi prestazioni di controllo migliori.

4.2 Stabilizzabilità dei sistemi lineari

stabilizzabilità

- un sistema Σ si dice **stabilizzabile** se esiste un controllo in retroazione dallo stato che rende il sistema asintoticamente stabile

sistemi a tempo discreto

$$\Sigma \ : \ \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t)$$

Teorema Per un sistema a tempo discreto Σ, le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è stabilizzabile.
2. Gli autovalori "non raggiungibili" di $\mathbf{F}$ hanno modulo strettamente minore di 1.
3. La matrice PBH $[z\mathbf{I} - \mathbf{F} \ \mathbf{G}]$ ha rango n, $\forall z$ con $|z| \geq 1$.

sistemi a tempo continuo

$$\Sigma \ : \ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t)$$

Teorema Per un sistema a tempo continuo Σ, le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è stabilizzabile.
2. Gli autovalori "non raggiungibili" di $\mathbf{F}$ hanno parte reale strettamente negativa.
3. La matrice PBH $[z\mathbf{I} - \mathbf{F} \ \mathbf{G}]$ ha rango n, $\forall z$ con $\Re[z] \geq 0$.