# RECAP : lez. 13

- ) raggiungibilità dei sistemi a t.d.

  PBH test : $\Sigma$ raggiungibile $\iff$ $\mathrm{rank}\big(\underbrace{PBH(z)}_{[zI-F \,\vdots\, G]}\big) = n \quad \forall z \in \mathbb{C}$

- ) controllabilità dei sistemi a t.d.

  $$X_C(t) = \{ x_0 \in \mathbb{R}^n \mid F^t x_0 \in \mathrm{im}\, R_t \}$$

  $$X_C(1) \subseteq X_C(2) \subseteq \dots \quad X_C(t') = X_C(t'') \quad \forall t'' \geq t'$$

  $$X_C = X_C(t')$$

  $\Sigma$ controllabile $\iff$ $\mathrm{im}\, F^n \subseteq X_R$

  $X_C = \mathbb{R}^n$

  RAGGIUNGIBILITÀ $\Longrightarrow$ CONTROLLABILITÀ

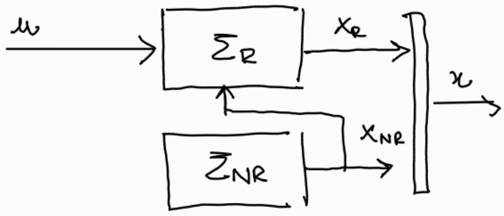
  $\not\Longleftarrow$

# CONTROLLABILITÀ & FORMA CANONICA di RAGGIUNGIBILITÀ

$\Sigma$ non raggiungibile : $\operatorname{rank} \mathcal{R} = k < n$

$\exists\, T = [v_1 \dots v_k \mid \tilde{v}_1 \dots \tilde{v}_{n-k}]$

$$z = \begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \qquad x_R \in \mathbb{R}^k, \quad x_{NR} \in \mathbb{R}^{n-k}$$




$$z(t+1) = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(t) \\ x_{NR}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$\Sigma_R = (F_{11}, G_1)$

$\Sigma_{NR} = (F_{22}, 0)$

osservazioni

- $\Sigma_R = (F_{11}, G_1)$ raggiungibile $\longrightarrow$ $\Sigma_R$ controllabile
- $\Sigma_{NR} = (F_{22}, 0)$ non raggiungibile

  $\Sigma_{NR}$ controllabile (a zero) $\Longleftrightarrow$ $\exists\, \bar{t}$ tale che $x_{NR}(\bar{t}) = F_{22}^{\bar{t}}\, x_{NR}(0) = 0 \quad \forall\, x_{NR}(0)$

  $\Longleftrightarrow$ $\exists\, \bar{t}$ tale che $F_{22}^{\bar{t}}\, v = 0 \quad \forall\, v \in \mathbb{R}^{n-k}$

  $\Longleftrightarrow$ $\exists\, \bar{t}$ tale che $F_{22}^{\bar{t}} = 0$

  $\Longleftrightarrow$ $F_{22}$ è una matrice nilpotente

  $\Longleftrightarrow$ l'unico autovalore di $F_{22}$ è zero

  se $\lambda$ è autovalore di $F_{22}$ corrispondente all'autovettore $v \neq 0$ allora

  $\lambda v = F_{22} v \Longleftrightarrow \lambda^{\bar{t}} v = F_{22}^{\bar{t}} v \longleftrightarrow \lambda^{\bar{t}} = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0$

- $$X_R = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \begin{bmatrix} x_R \\ 0 \end{bmatrix},\ x_R \in \mathbb{R}^k \right\} = \operatorname{im}(\mathcal{R})$$
  $$= \operatorname{im}\left( \begin{bmatrix} G' & F'G' & \dots & F'^{\,n-1}G' \end{bmatrix} \right)$$
  $$= \operatorname{im}\left( \begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 & \dots & F_{11}^{n-1}G_1 \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} \right)$$

- $F_{22}$ invertibile $\Longrightarrow$ $x_{NR}(t) = F_{22}^{t}\, x_{NR}(0) = 0 \Longleftrightarrow x_{NR}(0) = 0$

  $$\left( \begin{aligned} F_{22}^{t}\, x_{NR}(0) &= 0 \\ (F_{22}^{t})^{-1} (F_{22}^{t})\, x_{NR}(0) &= (F_{22}^{t})^{-1}\, 0 \end{aligned} \right)$$

  $$\underline{X_C} = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n \mid F^n x_0 \in X_R = \left\{ \begin{bmatrix} x_R \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right\} = \underline{X_R}$$

più in generale

$F$ invertibile $\Longleftrightarrow$ $F' = T^{-1} F T$ invertibile

$\Longrightarrow$ $F_{22}$ invertibile $\Longrightarrow$ $X_R = X_C$

un sistema a tempo discreto in cui la matrice $F$ è invertibile si dice REVERSIBILE

$\downarrow$

possibilità di ricostruire lo stato iniziale $x_0 = x(0)$
a partire dalla conoscenza di $x(t)$, $u(\tau)$ $\tau \in [0, t-1]$

$$x(t) = F^t x_0 + R_t u_t \longrightarrow F^t x_0 = x(t) - R_t u_t$$

$$x_0 = F^{-t} \underline{x(t)} - F^{-t} R_t \underline{u_t} \qquad u_t = \begin{bmatrix} u(t-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

## TEST PBH di CONTROLLABILITÀ

Teorema

Il sistema a tempo discreto $\Sigma = (F, G)$ è controllabile
SE e SOLO SE
la matrice $PBH(z) = [zI - F \,\vdots\, G] \in \mathbb{R}^{n \times (n+m)}$
ha $\underbrace{\text{rango pieno}}_{\text{rank}(PBH(z)) = n}$ $\forall z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$

se $\text{rank}(PBH(z)) < n$ solo per $z = 0$
allora l'unico autovalore di $F_{22}$ è $\lambda = 0$ $\longleftrightarrow$ $F_{22}$ nilpotente
$\downarrow$
$\Sigma$ controllabile

esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \longrightarrow$$

non raggiungibile ma controllabile in 2 passi in quanto $X_c(2) = \mathbb{R}^3$

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \lambda^2(\lambda - 1) = 0 \quad < \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 0 & m_1^a = 2 \\ \lambda_2 = 1 & m_2^a = 1 \end{matrix}$$

$$PBH(z) = [zI - F \,\vdots\, G] = \begin{bmatrix} z & -1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & z & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & z-1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(PBH(\lambda_2 = 1)) = \text{rank}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3 \quad \checkmark$$

$\boxtimes$

# RAGGIUNGIBILITÀ di SISTEMI LINEARI a TEMPO CONTINUO

$\dot{x}(t) = F x(t) + G u(t)$ con $x(0) = x_0$

allora

$$x^*(t) = e^{Ft} x_0 + \int_0^t F^{t-\tau} G u(\tau)\, d\tau$$

$x_0 = 0$ : $$x^*(t) = \int_0^t F^{t-\tau} G u(\tau)\, d\tau$$

$\mathcal{U}_{[0,t]}$ : insieme delle funzioni m-dimensionali integrabili in $[0,t]$

$$u(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$$
$$t \to u(t) \in \mathbb{R}^m$$

$$X_R(t) = \left\{ x(t) \in \mathbb{R}^n : \exists\, u \in \mathcal{U}_{[0,t]} \text{ tale } x(t) = \int_0^t F^{t-\tau} G u(\tau)\, d\tau \right\}$$

= spazio raggiungibile al tempo $t$

$X_R$ = spazio (massimo) raggiungibile

COMPLETA RAGGIUNGIBILITÀ

un sistema $\Sigma$ a tempo continuo si dice completamente raggiungibile se $\boxed{X_R = \mathbb{R}^n}$

$R = \begin{bmatrix} G & FG & \dots & F^{n-1}G \end{bmatrix}$ : matrice di raggiungibilità

$\Sigma$ raggiungibile $\leftrightarrow$ $\operatorname{im} R = \mathbb{R}^n$ $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{rank} R = n$

⚠ se un sistema a tempo continuo è raggiungibile allora $X_R(t) = \mathbb{R}^n \quad \forall\, t \geq 0$

come a tempo discreto

- $X_R$ è F-invariante e contiene $\operatorname{im} G$
  $\forall v \in X_R$ si ha che $Fv \in X_R$

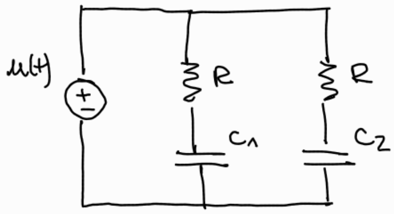
- forma canonica di raggiungibilità

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} \triangleq T^{-1} x, \quad F' = T^{-1} F T = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}, \quad G' = T^{-1} G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con $\Sigma_R = \Sigma_1 = (F_{11}, G_1)$ sottosistema raggiungibile

- test PBH : $\Sigma$ raggiungibile $\longleftrightarrow$ $\operatorname{rank}(PBH(z)) = n \quad \forall z \in \mathbb{C}$

esempio




$x_1(t) = v_{C1}(t)\ ,\quad x_2(t) = v_{C2}(t)$

$x_1(0) = x_2(0) = 0$

modello di stato

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{C1}(t) \\ v_{C2}(t) \end{bmatrix} \qquad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} \\ \frac{1}{RC_2} \end{bmatrix} u(t)$$

( se $C_1 = C_2 = C$ allora $x_1(t) = x_2(t)$ : $X_R = \{ x \in \mathbb{R}^n : x_1 = x_2 \} \neq \mathbb{R}^2$ )

se $C_1 \neq C_2$ ...

$$\det R = \det \begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} & -\frac{1}{(RC_1)^2} \\ \frac{1}{RC_2} & -\frac{1}{(RC_2)^2} \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{RC_1} \cdot \frac{1}{R^2 C_2^2} + \frac{1}{RC_2} \cdot \frac{1}{R^2 C_1^2}$$

$$= \frac{1}{R^3 C_1 C_2} \left( -\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_1} \right)$$

$$= \frac{1}{R^3 C_1 C_2} \left( \frac{C_2 - C_1}{C_1 C_2} \right)$$

$\det R = 0$ se $C_1 = C_2$ $\longrightarrow$ $\Sigma$ non raggiungibile

$\det R \neq 0$ se $C_1 \neq C_2$ $\longrightarrow$ $\Sigma$ raggiungibile

## CONTROLLABILITÀ dei SISTEMI LINEARI a TEMPO CONTINUO

$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$

allora

$$x(t) = e^{Ft} x_0 + \int_0^t F^{(t-\tau)} G u(\tau)\, d\tau$$

$$X_C(t) = \{ x_0 \in \mathbb{R}^n : \exists\, u \in \mathcal{U}_{[0,t]} \text{ tale che } 0 = e^{Ft} x_0 + \int_0^t F^{(t-\tau)} G u(\tau)\, d\tau \}$$

$$= \{ x_0 \in \mathbb{R}^n : \exists\, u \in \mathcal{U}_{[0,t]} \text{ tale che } -e^{Ft} x_0 = \int_0^t F^{(t-\tau)} G u(\tau)\, d\tau \}$$

$$= \{ x_0 \in \mathbb{R}^n : e^{Ft} x_0 \in X_R \}$$

= spazio controllabile al tempo $t$

$X_C$ = (massimo) spazio controllabile

COMPLETA CONTROLLABILITÀ

un sistema $\Sigma$ a tempo continuo si dice (completamente) controllabile se $\boxed{X_C = \mathbb{R}^n}$

$\boxed{x_0 \in X_C(t)} \iff \exists\, u \in \mathcal{U}_{[0,t]}$ tale che $0 = e^{Ft}x_0 + \int_0^t e^{F(t-\tau)} G\, u(\tau)\, d\tau$

$\iff e^{Ft}x_0 \in X_R(t) = X_R \quad (t>0)$

$\iff x_0 \in e^{-Ft}X_R = \{ v \in \mathbb{R}^n : \exists\, w \in X_R ,\ v = e^{-Ft} w \}$

$\begin{cases} X_R \text{ è } F\text{-invariante e anche } e^{-Ft} \text{ invariante} \\ e^{-Ft} \text{ invertibile} \rightarrow \dim(e^{-Ft}X_R) = \dim(X_R) \end{cases}$

$\iff x_0 \in e^{-Ft}X_R = X_R$

$\iff \boxed{x_0 \in X_R}$

$X_C = X_R$

$\Sigma$ CONTROLLABILE $\iff$ $\Sigma$ RAGGIUNGIBILE

| | tempo discreto | tempo continuo |
|---|---|---|
| raggiungibilità<br>$R = [G \ FG \ \dots \ F^{n-1}G]$<br>$(n \times nm)$ | $X_R = \operatorname{im} R$<br>$\Sigma$ ragg. $\longleftrightarrow X_R = \mathbb{R}^n$<br>$\longleftrightarrow \operatorname{rank} R = n$<br>$\longleftrightarrow \operatorname{rank}(PBH(z)) = n \quad \forall z \in \mathbb{C}$ | $X_R = \operatorname{im} R$<br>$\Sigma$ ragg. $\longleftrightarrow X_R = \mathbb{R}^n$<br>$\longleftrightarrow \operatorname{rank} R = n$<br>$\longleftrightarrow \operatorname{rank}(PBH(z)) = n \quad \forall z \in \mathbb{C}$ |
| controllabilità | $X_C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{im}(F^n) \subseteq X_R\}$<br>$\Sigma$ contr. $\longleftrightarrow X_C = \mathbb{R}^n$<br>$\longleftrightarrow \operatorname{im}(F^n) \subseteq X_R$<br>$\longleftrightarrow \operatorname{rank}(PBH(z)) = n \quad \forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0$<br>$\longleftarrow$ $\Sigma$ raggiungibile | $X_C = X_R$<br>$\Sigma$ contr. $\longleftrightarrow X_C = \mathbb{R}^n$<br>$\longleftrightarrow \Sigma$ ragg. |