recap : lez. 12

•) raggiungibilità di sistemi a tempo discreto

$$X_R = \mathbb{R}^n \longleftrightarrow \operatorname{rank} \mathcal{R} = n$$

- se Σ è raggiungibile in t passi allora

$$u'_t \in \mathcal{U}_t = \left\{ u'_t = u_t + \bar{u},\ \bar{u} \in \ker \mathcal{R}_t \right.$$

$$u_t = \mathcal{R}_t^T (\mathcal{R}_t \mathcal{R}_t^T)^{-1} (x^* - F^t x_0)$$

$$\overset{!}{=} \operatorname{argmin} \|u'_t\| \quad \text{en. minima} \left. \right\}$$

tale che $x^* = F^t x_0 + \mathcal{R}_t u'_t$, x_0 fissato

- forma canonica / standard di raggiungibilità : $\Sigma = (F, G)$ tali che $\operatorname{rank}(\mathcal{R}) = k < n$

$$T = \left[v_1 \dots v_k,\ \tilde{v}_1 \dots \tilde{v}_{n-k} \right]$$

$$\{ v_1 \dots v_k \} = \operatorname{im} \mathcal{R}$$

$$\{ v_1 \dots v_k,\ \tilde{v}_1 \dots \tilde{v}_{n-k} \} : \text{base di } \mathbb{R}^n$$

$$z = T^{-1} x = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} x_R \\ \hdashline x_{NR} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} k \\ n-k \end{array}$$

$$z(t+1) = T^{-1} F T z + T^{-1} G u$$

$$\overset{!}{=} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$\Sigma_1 = \Sigma_R = (F_{11}, G_1)$: sottosistema raggiungibile k-dim

$\Sigma_2 = \Sigma_{NR} = (F_{22}, 0)$: sottosistema non raggiungibile $(n-k)$-dim

esempio

• $$x(t+1) = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] x(t) + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] u(t)$$

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} G & FG & F^2 G \end{bmatrix}$$

$$\overset{!}{=} \left[\begin{array}{c:c:c} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad : \operatorname{rank} \mathcal{R} = 2$$

$\Sigma_1 = \Sigma_R = (F_{11}, G_1)$: raggiungibile

$$F_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 \end{bmatrix} \quad : \quad \text{rank } R^1 = 2$$

- $$x(t+1) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] x(t) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] u(t)$$

$$R = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad : \quad \text{rank } R = 1 \qquad X_R = \operatorname{Im} R = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$R^{(1)} = \begin{bmatrix} G_1 & F_{11}G_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad : \quad \text{rank } R = 1$$

$$k = 1$$
$$n - k = 2$$

$$T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \quad v_1 \quad \tilde{v}_1 \quad \tilde{v}_2 \end{array} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F' = T^{-1} F T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}$$

$$F_{11} = 2 \in \mathbb{R}$$
$$F_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$G' = T^{-1} G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad G_1 = 1 \in \mathbb{R}$$

$\Sigma_R = (F_{11}, G_1) = (2, 1)$ è raggiungibile

$\boxtimes$

TEST PBH di RAGGIUNGIBILITÀ

Teorema

Il sistema a tempo discreto $\Sigma = (F, G)$ è raggiungibile ($X_R = \mathbb{R}^n$)
SE e solo SE

la matrice $PBH(z) = \left[zI - F \;\vdots\; G \right] \in \mathbb{R}^{n \times (n+m)}$
ha rango pieno $\boxed{\text{per ogni } z \in \mathbb{C}}$

$(\text{rank}(PBH(z)) = n)$

se Σ non è raggiungibile, la matrice $PBH(z)$ ha rango non pieno $(< n)$ per tutti e soli gli $z \in \mathbb{C}$ che sono autovalori di F_{22}

dimostrazione

•) Σ raggiungibile $\longrightarrow$ $\text{rank}(PBH(z)) = n \quad \forall z \in \mathbb{C}$

per assurdo : Σ raggiungibile
$\exists \bar{z} \in \mathbb{C}$ tale che $\text{rank}(PBH(\bar{z})) < n$ $\longrightarrow$ $\exists$ righe linearmente dipendenti

$\exists\, v \neq 0,\ v \in \mathbb{R}^n :$ $\quad v^T \cdot PBH(\bar{z}) = 0$

$$v^T \left[\bar{z}I - F \;\vdots\; G \right] = \left[0 \;\vdots\; 0 \right]$$

$$\begin{cases} v^T(\bar{z}I - F) = 0 & \longrightarrow \quad v^T F = \bar{z} v^T \\ v^T G = 0 \end{cases}$$

$$v^T R = v^T \left[G \;\; FG \;\cdots\; F^{n-1}G \right] = \left[v^T G \;\; v^T F G \;\cdots\; v^T F^{n-1} G \right] = \left[0 \;\; \bar{z} v^T G \;\cdots\; \bar{z}^{n-1} v^T G \right] \Rightarrow \text{rank } R < n \quad : \text{assurdo}$$

•) $\text{rank}(PBH(z)) = n \quad \forall z \in \mathbb{C}$ $\longrightarrow$ Σ raggiungibile

c.v.d.

Osservazione

se Σ non è raggiungibile
allora $(\text{rank } PBH(\bar{z})) < n \quad \forall \bar{z} \in \Lambda_{F_{22}}$

gli autovalori di F_{22} sono un sottoinsieme degli autovalori di F

il rango della matrice $PBH(z)$ può essere valutato solo per gli autovalori di F

esempio

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$

$\Lambda_F = \{0\}$

$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^3 = 0$

$\lambda = 0 \quad , \quad m^a = 3$

$$\text{rank}(PBH(z)) = \text{rank}\left(\left[zI - F \;\vdots\; G \right] \right) = \text{rank}\left(\left[\begin{array}{ccc|cc} z & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 & 1 \end{array} \right] \right) \Bigg|_{z=\lambda=0} = \text{rank}\left(\left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \right) = 3$$

$\Rightarrow \Sigma$ raggiungibile

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$

$\lambda = 1 \qquad m^a = 3$

$$\text{rank}(PBH(z)) = \text{rank}\left(\left[zI - F \;\vdots\; G \right] \right) = \text{rank}\left(\left[\begin{array}{ccc|c} z-1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & z-1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & z-1 & 1 \end{array} \right] \right) \Bigg|_{z=\lambda=1} = \text{rank}\left(\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \right) = 2$$

$\Rightarrow \Sigma$ non è raggiungibile

$\boxtimes$

CONTROLLABILITÀ dei SISTEMI a TEMPO DISCRETO

~ possibilità di raggiungere uno stato desiderato x^* fissato a partire da uno stato iniziale x_0 qualsiasi agendo su u

$x(t+1) = F x(t) + G u(t)$ con $x(0) = x_0$

$x(t) = F^t x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} F^{t-1-k} G u(k) = F^t x_0 + R_t \cdot u_t$

$\hookrightarrow$ $x^*(t) = 0$: controllabilità a zero

qual è l'insieme degli stati controllabili in passi allo stato $x^*(t) = 0$?
quando è possibile controllare a zero tutti i possibili stati $x_0 \in \mathbb{R}^n$?

$$X_c(t) = \{ x_0 \in \mathbb{R}^n : \exists\, u_t \in \mathbb{R}^{mt} \text{ che soddisfa } \underline{0 = F^t x_0 + R_t u_t} \}$$

$0 = F^t x_0 + R_t u_t \longleftrightarrow F^t x_0 = -R_t u_t$

$F^t x_0$ è una combinazione lineare delle colonne di R_t secondo u_t

$$= \{ x_0 \in \mathbb{R}^n : F^t x_0 \in \operatorname{im}(R_t) \} = \{ x_0 \in \mathbb{R}^n : F^t x_0 \in X_R(t) \}$$

Proposizione

> In un sistema di dimensione n, gli spazi controllabili in $1, 2, \ldots$ passi soddisfano la catena di inclusioni $X_c(1) \subseteq X_c(2) \subseteq X_c(3) \subseteq \ldots$
> la catena è stazionaria (almeno) dal t'-esimo passo in poi, ovvero
> $X_c(t') = X_c(t'')$ $\forall\, t'' \geq t'$, con $t' < n$

t' : indice di controllabilità

$X_c(t') = X_c$: massimo spazio di controllabilità

(complete) controllabilità

- un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) controllabile se $X_c = \mathbb{R}^n$
- un sistema Σ a t.d. si dice (completamente) controllabile in t passi se $X_c(t) = \mathbb{R}^n$ con t indice di controllabilità

$\triangleright$ $X_c = X_c(n) = \{ x_0 \in \mathbb{R}^n : F^n x_0 \in \operatorname{im} R_n \}$

$\overset{!}{=} \{ x_0 \in \mathbb{R}^n : F^n x_0 \in X_R \}$

$= \{$ ogni vettore $x_0 \in \mathbb{R}^n$ soddisfa $F^n x_0 \in \operatorname{im} R_n$

ovvero $F^n x_0$ è una combinazione lineare delle colonne di R_n

<u>ma</u>

$F^n x_0$ è una combinazione lineare anche delle colonne di F^n secondo x_0 $\}$

$$\Sigma \text{ controllabile} \longleftrightarrow \operatorname{im}(F^n) \subseteq \operatorname{im}(R_n) = X_R$$

osservazioni

- Σ raggiungibile ($X_R = \mathbb{R}^n$) $\Rightarrow$ Σ controllabile

  $im(F^n) \subseteq \mathbb{R}^n = X_R$

- Σ controllabile ($X_C = \mathbb{R}^n$) $\not\Rightarrow$ Σ raggiungibile

- Σ <u>non</u> raggiungibile ma $F = 0$ $\Rightarrow$ Σ controllabile

  $im(F^n) = \{0\} \in X_R$

esempi

1. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$ $\qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$X_R = im\, R = im\left(\begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix}\right) = im\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix}\right) = span\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \neq \mathbb{R}^2$$

$\longrightarrow$ Σ <u>non</u> è raggiungibile

$$im(F^2) = im\left(\begin{bmatrix} \alpha_1^2 & 0 \\ \alpha_1+\alpha_2 & \alpha_2^2 \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} span\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \subset X_R & \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad ✓ \\ span\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = X_R & \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 \neq 0 \quad ✓ \\ span\left\{\begin{bmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}\right\} \not\subset X_R & \alpha_1 \neq 0,\ \alpha_2 = 0 \quad \times \\ \mathbb{R}^2 \not\subset X_R & \alpha_1 \neq 0,\ \alpha_2 \neq 0 \quad \times \end{cases}$$

$\longrightarrow$ Σ è controllabile se $\alpha_1 = 0$ ($im(F^2) \subseteq X_R$)

2. $x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$ $\qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$R = \begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{rank } R = 2 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

$\longrightarrow$ Σ è raggiungibile (in 2 passi)

Σ è controllabile $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

3. $x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$

$$X_c(1) = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^3 \mid F x_0 \in \operatorname{im} R_1 \right\}$$

$$= \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\}$$

$$= \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \neq \mathbb{R}^3$$

$$X_c(2) = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^3 \mid F^2 x_0 \in \operatorname{im} R_2 \right\} \qquad F \cdot G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\}$$

$$= \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \\ \alpha \end{bmatrix}, \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \mathbb{R}^3$$

$\longrightarrow$ Σ è controllabile in 2 passi

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \operatorname{rank}(R_3) = 1$$

$\longrightarrow$ Σ non è raggiungibile

$\boxtimes$